№5. Решите неравенство: $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10.$

Решение. Применяем формулу: $a^{\log_a x} = x$, где $x > 0, a > 0, a \neq 1.$

Тогда имеем:

$$\left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x} + x^{\log_5 x} < 10, \quad x^{\log_5 x} + x^{\log_5 x} < 10, \quad x^{\log_5 x} < 5.$$

Логарифмируем обе части данного неравенства по основанию 5. Тогда имеем:

$$\log_5(x^{\log_5 x}) < \log_5 5, \qquad \log_5 x \log_5 x < 1,$$

$$\log_5^2 x < 1, \quad -1 < \log_5 x < 1, \qquad \begin{cases} 5^{-1} < x < 5^1, \\ x > 0. \end{cases}$$

Тогда множество $(0{,}2;5)$ является решение исходного неравенства.

Ответ: $(0{,}2;5)$.

Литература

1. Абатов Н.Т. Методы решения задач по математике. Алгебра. Учебное пособие для поступающих в ВУЗы.- Костанай, 1998г.
2. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Конкурсные задачи по математике. Справочное пособие.-Москва,1995г.
3. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во ВТУЗы. Учебное пособие / Под редакцией М.И. Сканави.-Москва,1978г.

Абатов Н.Т., к.ф-м.н., доцент

Костанайского государственного университета им. А.Байтурсынова

г.Костанай, Казахстан

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Выпускники школ затрудняются при решении сложных тригонометрических неравенств, которые часто встречаются на ЕНТ по математике. Поэтому рассмотрим некоторые сложные тригонометрические неравенства и укажем способы их решения.

Задача №1. Решите неравенство: $2\cos^2 5x - 9\sin 5x \geq -3.$

Решение. Применяем формулу $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha.$ Тогда уравнение примет вид: $2(1-\sin^2 5x) - 9\sin 5x \geq -3,$

$$2 - 2\sin^2 5x - 9\sin 5x \geq -3, \qquad 2\sin^2 5x + 9\sin 5x - 5 \leq 0.$$

Введём замену: $y = \sin 5x$. И получаем квадратное неравенство: $2y^2 + 9y - 5 \leq 0$.

Применяем метод интервалов. Находим корни квадратного трехчлена: $y_1 = -5, y_2 = \frac{1}{2}$. Тогда множество $-5 \leq y \leq \frac{1}{2}$ является решением квадратного неравенства $2y^2 + 9y - 5 \leq 0$.

Производим обратную замену $y = \sin 5x$. Тогда имеем: $-5 \leq \sin 5x \leq \frac{1}{2}$.

Это двойное неравенство равносильно неравенству $\sin 5x \leq 0{,}5$, так как областью допустимых значений функции $y = \sin x$ является множество $[-1;1]$.

Итак, решаем неравенство $\sin 5x \leq 0{,}5$.

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 5x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi + 2\pi n, \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 5x \leq \frac{13\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{5} \leq x \leq \frac{13\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z.$$

Ответ: $[\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{12\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}], n \in Z$.

Задача №2. Решите неравенство: $\cos x - \cos 0{,}5x + 1 \leq 0.$

Решение. Применяем формулу: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$

Тогда имеем: $2\cos^2 0{,}5x - 1 - \cos 0{,}5x + 1 \leq 0,$

$2\cos^2 0{,}5x - \cos 0{,}5x \leq 0.$ Введём замену: $y = \cos 0{,}5x.$ Тогда получаем квадратное неравенство: $2y^2 - y \leq 0.$ Применяем метод интервалов. Тогда множество $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ является решением неравенства $2y^2 - y \leq 0.$

Производим обратную замену: $y = \cos 0{,}5x.$ Тогда имеем: $0 \leq \cos 0{,}5x \leq \frac{1}{2}.$

Решением этого двойного тригонометрического неравенства является совокупность двух неравенств вида:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 0{,}5x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 0{,}5x \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Преобразуем полученные неравенства:

$$\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leq x \leq \pi + 4\pi n, n \in Z; \qquad -\pi + 4\pi n \leq x \leq -\frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z$$

Ответ: $[\frac{2\pi}{3}+4\pi n;\ \pi+4\pi n]\cup\left[-\pi+4\pi n;\ -\frac{2\pi}{3}+4\pi n\right],\ n\in Z$

Задача №3. Решите неравенство: $\cos 0{,}5x+3\sin 0{,}25x\geq 2.$

Решение. Применяем формулу двойного угла:

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha.$

Тогда данное неравенство примет вид: $1-2\sin^2 0{,}25x+3\sin 0{,}25x\geq 2,$ $2\sin^2 0{,}25x-3\sin 0{,}25x+1\leq 0.$ Введём замену: $y=\sin 0{,}25x.$ Тогда имеем: $2y^2-3y+1\leq 0.$ Применяем метод интервалов. Тогда множество $\frac{1}{2}\leq y\leq 1$ является решением неравенства $2y^2-3y+1\leq 0.$

Производим обратную замену: $y=\sin 0{,}25x.$ Тогда имеем: $\frac{1}{2}\leq\sin 0{,}25x\leq 1$

Это двойное неравенство равносильно неравенству: $\sin 0{,}25x\geq\frac{1}{2},$ так как областью допустимых значений функции $y=\sin x$ является множество $[-1;1].$

Итак, решаем неравенство $\sin 0{,}25x\geq\frac{1}{2},$

$\frac{\pi}{6}+2\pi n\leq 0{,}25x\leq\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z;$

$\frac{4\pi}{6}+8\pi n\leq x\leq\frac{20\pi}{6}+8\pi n,\ n\in Z;\quad \frac{2\pi}{3}+8\pi n\leq x\leq\frac{10\pi}{3}+8\pi n,\ n\in Z;$

Ответ: $[\frac{2\pi}{3}+8\pi n;\ \frac{10\pi}{3}+8\pi n],\ n\in Z$

Задача №4. Решите неравенство: $\sin 9x>\cos 9x$

Решение. Применяем формулу $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$

Тогда имеем: $\sin 9x-\cos 9x>0,\ \frac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)>0,\ \sin\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)>0.$

Учтём, что функция $y=\sin x$ положительная в первой и во второй четвертях. Поэтому неравенство $\sin\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)>0$ имеет решение:

$2\pi n<9x-\frac{\pi}{4}<\pi+2\pi n,\ n\in Z;\quad \frac{\pi}{4}+2\pi n<9x<\pi+\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;$

$\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi n}{9}<x<\frac{5\pi}{9}+\frac{2\pi n}{9},\ n\in Z;$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi n}{9};\ \frac{5\pi}{9}+\frac{2\pi n}{9}\right),\ n\in Z.$

Задача №5. Решите неравенство: $\sin\frac{x}{6}-\cos\frac{x}{6}\leq -1.$

Решение. Обе части данного неравенства умножим на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и применяем формулу $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta).$

Тогда имеем: $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{6}\leq-\frac{\sqrt{2}}{2};$

$\sin\frac{x}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{x}{6}\sin\frac{\pi}{4}\leq-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Находим решение полученного неравенства:

$\frac{5\pi}{4}+2\pi n\leq\frac{x}{6}-\frac{\pi}{4}\leq\frac{7\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;$

$\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi n\leq\frac{x}{6}\leq\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;$

$\frac{3\pi}{2}+2\pi n<\frac{x}{6}<2\pi+2\pi n,\ n\in Z;\qquad 9\pi+12\pi n<x<12\pi+12\pi n,\ n\in Z;$

Итак, множество $[9\pi+12\pi n;\ 12\pi+12\pi n],\ n\in Z$ является решением исходного неравенства.

Ответ: $[9\pi+12\pi n;\ 12\pi+12\pi n],\ n\in Z.$

Литература

1.Абатов Н.Т. Методы решения задач по математике. Алгебра. Учебное пособие для поступающих в ВУЗы.- Костанай, 1998г.

2.Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Конкурсные задачи по математике. Справочное пособие.-Москва,1995г.