УДК 517.925.51

Г.Ж.Берденова, Я.Т.Султанаев

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева
Казахстан, Астана, ул. Мунайтпасова 5, e-mail: gulnar_7109@mail.ru
Башкирский государственный педагогический университет имени М.Акмуллы
450074, Россия, Уфа, ул.Октябрьской революции, 3а, e-mail: sultanaevyt@gmail.com

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В статье исследуется асимптотическое поведение решений системы двух сингулярных дифференциальных уравнений четвертого порядка при больших значениях спектрального параметра. На основании полученных формул вычислены индексы дефекта соответсвующего дифференциального оператора.
Ключевые слова: *асимптотическое поведение, система дифференциальных уравнений, L-диагональная система.*

Задача исследования асимптотического поведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений в зависимости от поведения коэффициентов является одной из центральных в теории ОДУ. Решению этой задачи посвящено значительное число работ см. [1] и библиографию к ней. Однако, в основном, в этих работах исследовались скалярные дифференциальные уравнения. Мы исследуем асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений в пространстве вектор-функций.

Рассматривается система уравнений

$$ly = y^{(4)} + Q(x)y = \lambda y, \qquad 0 \leqslant x < +\infty, \tag{1}$$

$\lambda-$комплексный параметр, $\lambda \in \Gamma$, $\Gamma = \{\lambda : \ \lambda = \sigma + \imath\tau, \ \tau = \sigma^{\gamma}, \ 0 < \gamma < 1\}$.

$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$- вектор, $0 \leqslant x < \infty$.

$Q(x)$ - вещественная симметрическая матрица с дважды непрерывно дифференцируемыми элементами $q_{i,j}(x), i, j = 1, 2$, собственные значения которой $\mu_{\rm i}(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

Введем следующие обозначения $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{q_{22}(x) - q_{11}(x)}{2q_{12}(x)}$,

$\varphi\prime(x)$ - скорость вращения собственных векторов матрицы $Q(x)$.

Нас будут интересовать асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения (1) при $\lambda \in \Gamma$, $\lambda \to \infty$, равномерно по x: $0 \leqslant x < +\infty$ в случае медленного вращения собственных векторов матрицы $Q(x)$. Асимптотические формулы, равномерные по x, важны как с точки зрения асимптотической теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения спектральной теории дифференциальных операторов. Дело в том, что их знание позволяет исследовать спектральные свойства соответсвующих дифференциальных операторов (см. например [2]). Отметим, что ранее одним из авторов в работе [3] рассматривался вопрос об асимптотическом поведении решений системы второго порядка $-y'' + Q(x)y = \lambda y, \quad \lambda \in \Gamma, \quad \lambda \to \infty$ равномерно по x. В этой же работе вычислена асимптотика спектра соответствующего дифференциального оператора, что удается сделать благодаря равномерности асимптотических формул. В работе [4] для уравнения (1) найдены асимптотические формулы при $x \longrightarrow \infty$, что достаточно для вычисления индексов дефекта минимального оператора, порожденного в $L^2(0, \infty)$ дифференциальным выражением ly. Для исследования же асимптотики спектра оператора, чему будет посвящена отдельная работа, нужны асимптотические формулы по λ , равномерные по x, что и является основным результатом нашей работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия: для достаточно большого x_0 и при $x \geqslant x_0$*

1. $|\varphi'(x)| \leqslant c$,
2. $0 < A \leqslant \left|\frac{\mu_i(x)}{\mu_j(x)}\right| \leqslant B$, *где c, A, B - положительные константы,*
3. $\int\limits_{x_0}^{\infty} |(\lambda - \mu_i(x))|^{-\frac{1}{4}}\, dx < \infty$, $\int\limits_{x_0}^{\infty} \left|\frac{\varphi''(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}\right| dx = o(1)$, $\lambda \in \Gamma$, $\lambda \to \infty$, $i = 1,\ 2$,
4. $|\mu_i'(x)| \leqslant o(|\mu_i(x)|^{\alpha})|$, *при* $x \to +\infty$, $i = 1,\ 2$, $\quad 0 < \alpha < \frac{5}{4}$,
   $\mu_i'(x)$ *и* $\mu_i''(x)$ *сохраняют знак при* $x \geqslant x_0$.

Тогда система (1) *имеет восемь линейно независимых решений* $y_j(x, \lambda)$, *таких, что при* $\lambda \to \infty$, $\quad \lambda \in \Gamma$ *равномерно по* x, $0 \leqslant x < +\infty$

$$y_{1,2} = \varphi_1(x, \lambda) \exp\left\{\pm \int\limits_0^x (\lambda - \mu_1(t))^{\frac{1}{4}} dt\right\} (1 + o(1)),$$

$$y_{3,4} = \varphi_1(x, \lambda) \exp\left\{\pm i \int\limits_0^x (\lambda - \mu_1(t))^{\frac{1}{4}} dt\right\} (1 + o(1)),$$

$$y_{5,6} = \varphi_2(x, \lambda) \exp\left\{\pm \int\limits_0^x (\lambda - \mu_2(t))^{\frac{1}{4}} dt\right\} (1 + o(1)),$$

$$y_{7,8} = \varphi_2(x, \lambda) \exp\left\{\pm i \int\limits_0^x (\lambda - \mu_2(t))^{\frac{1}{4}} dt\right\} (1 + o(1)),$$

где

$$\varphi_1(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[8]{(\lambda - \mu_1(x))^3}} \begin{pmatrix} cos & \varphi(x) \\ -sin & \varphi(x) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[8]{(\lambda - \mu_2(x))^3}} \begin{pmatrix} sin & \varphi(x) \\ cos & \varphi(x) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. С помощью замены переменных

$$z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$$

от системы (1) перейдем к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$z' = \quad Az,$$

$z = (z_1(x, \lambda),\ z_2(x, \lambda),\ z_3(x, \lambda),\ z_4(x, \lambda))$- новая неизвестная вектор-функция.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -Q + \lambda I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где I- двумерная единичная матрица.

Введем в рассмотрение ортогональную матрицу $U_1 = \begin{pmatrix} cos\ \varphi(x) & sin\ \varphi(x) \\ -sin\ \varphi(x) & cos\ \varphi(x) \end{pmatrix}$такую, что $U_1^{-1} Q U_1 = \Lambda = diag\left\{\mu_1, \mu_2\right\},$

$$\mu_1 \quad = \quad \frac{q_{11}+q_{22}+\sqrt{(q_{11}-q_{22})^2+4q_{12}^2}}{2}, \qquad \mu_2 = \frac{q_{11}+q_{22}-\sqrt{(q_{11}-q_{22})^2+4q_{12}^2}}{2}.$$

Далее произведем замену

$$z = diag\left\{U_1, U_1, U_1, U_1\right\} w = Uw,$$

$$z' = U'w + Uw',$$

$$U'w + Uw' = AUw,$$
$$w' = (U^{-1}AU)w - U^{-1}U'w. \tag{2}$$

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\Lambda + \lambda I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$U^{-1}U' = diag\left\{p,\ p,\ p,\ p\right\}, \quad p = \varphi'(x)\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, поскольку выполняется условие 1) теоремы, то ведущими элементами в системе (2) будут элементы матрицы $U^{-1}AU$. Приведем ее к диагональному виду.

Существует матрица, приводящая $U^{-1}AU$ к диагональному виду. Обозначим ее через $C(x, \lambda)$.

$$C^{-1}(U^{-1}AU)C = M = diag\left\{\tilde\mu_1, \tilde\mu_2, \tilde\mu_3, \tilde\mu_4, \tilde\mu_5, \tilde\mu_6, \tilde\mu_7, \tilde\mu_8\right\}.$$

$$\tilde\mu_1 = (\lambda - \mu_1)^{\frac{1}{4}}, \quad \tilde\mu_2 = (\lambda - \mu_2)^{\frac{1}{4}},$$
$$\tilde\mu_3 = -(\lambda - \mu_1)^{\frac{1}{4}}, \quad \tilde\mu_4 = -(\lambda - \mu_2)^{\frac{1}{4}},$$
$$\tilde\mu_5 = i(\lambda - \mu_1)^{\frac{1}{4}}, \quad \tilde\mu_6 = i(\lambda - \mu_2)^{\frac{1}{4}},$$
$$\tilde\mu_7 = -i(\lambda - \mu_1)^{\frac{1}{4}}, \quad \tilde\mu_8 = -i(\lambda - \mu_2)^{\frac{1}{4}}.$$

Элементы матрицы C определяются из системы уравнений: $c_{1i}\overline{\mu_i} = c_{2i}$, $c_{2i}\overline{\mu_i} = c_{3i}$, $c_{3i}\overline{\mu_i} = c_{4i}$, $\quad c_{4i}\overline{\mu_i} = (-\Lambda + \lambda I)c_{1i}$, где c_{ij}, $\quad i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$ - двумерные матрицы, элементы C.

$$\overline{\mu_1} = \begin{pmatrix} \widetilde\mu_1(x) & 0 \\ 0 & \widetilde\mu_2(x) \end{pmatrix}, \qquad \overline{\mu_2} = \begin{pmatrix} \widetilde\mu_3(x) & 0 \\ 0 & \widetilde\mu_4(x) \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mu_3} = \begin{pmatrix} \widetilde\mu_5(x) & 0 \\ 0 & \widetilde\mu_6(x) \end{pmatrix}, \qquad \overline{\mu_4} = \begin{pmatrix} \widetilde\mu_7(x) & 0 \\ 0 & \widetilde\mu_8(x) \end{pmatrix}.$$

Из этой системы матрица C находится неоднозначно, с точностью до умножения справа на блочно-диагональную матрицу $\delta(x) = diag\left\{\delta_1(x),\ \delta_2(x),\ \delta_3(x),\ \delta_4(x)\right\}$.
Тогда элементы C имеют вид:
$c_{1i} = \delta_1(x)$, $\quad c_{2i} = \delta_1(x)\overline{\mu}_i(x)$, $\quad c_{3i} = \delta_1(x)\overline{\mu}_i^2(x)$, $\quad c_{4i} = \delta_1(x)\overline{\mu}_i^3(x)$. Матрицу C^{-1}находим из условия $C^{-1}C = E$. Обозначим через $T = C^{-1}C'$ и найдем ее элементы.

Выберем матрицу $\delta(x)$ так, чтобы выполнялось условие $(C^{-1}C')_{ii} = 0$, $i = \overline{1,8}$. Тогда блоки матрицы $\delta(x)$ имеют вид:

$$\delta_1(x) = (\overline{\mu}_1(x))^{-\frac{3}{2}},\ \delta_2(x) = (-\overline{\mu}_2(x))^{-\frac{3}{2}},\ \delta_3(x) = (-i\overline{\mu}_3(x))^{-\frac{3}{2}},\ \delta_4(x) = (i\overline{\mu}_4(x))^{-\frac{3}{2}}.$$

$$C = \begin{pmatrix} \overline{\mu}_1(x)^{-\frac{3}{2}} & -\overline{\mu}_2(x)^{-\frac{3}{2}} & -i\overline{\mu}_3(x))^{-\frac{3}{2}} & i\overline{\mu}_4(x)^{-\frac{3}{2}} \\ \overline{\mu}_1(x)^{-\frac{1}{2}} & -(-\overline{\mu}_2(x))^{-\frac{1}{2}} & i(-i\overline{\mu}_3(x))^{-\frac{1}{2}} & -i(i\overline{\mu}_4(x))^{-\frac{1}{2}} \\ \overline{\mu}_1(x)^{\frac{1}{2}} & (-\overline{\mu}_2(x))^{\frac{1}{2}} & -i(-i\overline{\mu}_3(x))^{-\frac{1}{2}} & -(i\overline{\mu}_4(x))^{\frac{1}{2}} \\ \overline{\mu}_1(x)^{\frac{3}{2}} & -(-\overline{\mu}_2(x))^{\frac{3}{2}} & -i(-i\overline{\mu}_3(x))^{-\frac{3}{2}} & i(i\overline{\mu}_4(x))^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overline{\mu}_1(x)^{\frac{3}{2}} & \overline{\mu}_1(x)^{\frac{1}{2}} & \mu_1(x)^{-\frac{1}{2}} & \overline{\mu}_1(x)^{-\frac{3}{2}} \\ (-\overline{\mu}_2(x))^{\frac{3}{2}} & -(-\overline{\mu}_2(x))^{\frac{1}{2}} & (-\overline{\mu}_2(x))^{-\frac{1}{2}} & -(-\overline{\mu}_2(x))^{-\frac{3}{2}} \\ (-i\overline{\mu}_3(x))^{\frac{3}{2}} & -i(-i\overline{\mu}_3(x))^{\frac{1}{2}} & -(-\overline{\mu}_3(x))^{-\frac{1}{2}} & i(-i\overline{\mu}_3(x))^{-\frac{3}{2}} \\ (i\overline{\mu}_4(x))^{\frac{3}{2}} & -i(i\overline{\mu}_4(x))^{\frac{1}{2}} & -(i\overline{\mu}_4(x))^{-\frac{1}{2}} & -i(i\overline{\mu}_4(x))^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix},$$

$$T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \tfrac{-\mu_1'}{\lambda-\mu_1} & 0 & \tfrac{-\mu_1'(1+i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & \tfrac{-\mu_1'(1-i)}{\lambda-\mu_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tfrac{-\mu_2'}{\lambda-\mu_2} & 0 & \tfrac{-\mu_2'(1+i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & \tfrac{-\mu_2'(1-i)}{\lambda-\mu_2} \\ \tfrac{-\mu_1'}{\lambda-\mu_1} & 0 & 0 & 0 & \tfrac{-\mu_1'(1-i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & \tfrac{-\mu_1'(1+i)}{\lambda-\mu_1} & 0 \\ 0 & \tfrac{-\mu_2'}{\lambda-\mu_2} & 0 & 0 & 0 & \tfrac{-\mu_2'(1-i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & \tfrac{-\mu_2'(1+i)}{\lambda-\mu_2} \\ \tfrac{-\mu_1'(1-i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & \tfrac{-\mu_1'(1+i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & 0 & 0 & \tfrac{-\mu_1'}{\lambda-\mu_1} & 0 \\ 0 & \tfrac{-\mu_2'(1-i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & \tfrac{-\mu_2'(1+i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & 0 & 0 & \tfrac{-\mu_2'}{\lambda-\mu_2} \\ \tfrac{-\mu_1'(1+i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & \tfrac{-\mu_1'(1-i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & \tfrac{-\mu_1'}{\lambda-\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tfrac{-\mu_2'(1+i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & \tfrac{-\mu_2'(1-i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & \tfrac{-\mu_2'}{\lambda-\mu_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$w = C(I+G)u,$$

где матрица G с элементами g_{ij} удовлетворяет соотношению:

$$GM - MG = -T - C^{-1}PC,$$

$$g_{ii} = 0, \qquad g_{ij} = \frac{(-C^{-1}C' - C^{-1}PC)_{ij}}{\tilde{\mu}_j - \tilde{\mu}_i}, \qquad i \neq j,$$

$$w' = C'(I+G)u + CG'u + C(I+G)u',$$

$$C'(I+G)u + CG'u + C(I+G)u' = U^{-1}AUC(I+G)u - PC(I+G)u,$$

умножим это равенство слева на C^{-1}

$$T(I+G)u + G'u + (I+G)u' = M(I+G)u - C^{-1}PC(I+G)u,$$

$$Tu + TGu + G'u + (I+G)u' = (M+MG)u - C^{-1}PC(I+G)u,$$

$$Tu + TGu + G'u + (I+G)u' = (M+GM)u + Tu - C^{-1}PCu + C^{-1}PCu - C^{-1}PCGu.$$

Умножив это выражение слева на $(I+G)^{-1}$, получим систему уравнений:

$$u' \ = \ (M + \theta(x,\lambda))u, \qquad (3)$$

Полагая в (3) при фиксированном i, $(i=\overline{1,8})$,

$$u \quad = \quad s \times exp\left\{\int\limits_0^x \widetilde{\mu}_i(t,\lambda)dt\right\},$$

где $s=(s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6,\ s_7,\ s_8)$ - неизвестная вектор-функция, придем к системе уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dx}s_i(x,\lambda) \quad = \quad \nu_i(x,\lambda)s_i(x,\lambda)+\sum_{m=1}^{8}\theta_{im}(x,\lambda)s_m(x,\lambda), \qquad i=\overline{1,8}, \tag{4}$$

где

$$\nu_i(x,\lambda)=\tilde{\mu}_j(x,\lambda)-\tilde{\mu}_i(x,\lambda),$$

$$\theta=\|\theta_{im}(x,\lambda)\|_{i,m=1}^{8}$$

- та же, что и в (3).

Покажем, что

$$\int\limits_0^x \|\theta(x,\lambda)\|dx=o(1), \qquad \lambda\in\Gamma, \quad \lambda\to\infty. \tag{5}$$

Под нормой матриц здесь и в дальнейшем будем понимать сумму абсолютных величин ее элементов.

Оценим элементы g_{ij} матрицы G. Все $g_{ij}(x,\lambda)$ ограничены сверху линейными комбинациями вида:

$$\frac{\mu_i'(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{5}{4}}}, \quad \frac{\varphi'(x)\left[\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{3}{8}}+\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{1}{8}}\right]}{\sum\limits_{i=1}^{2}K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}, \quad K_i=const.$$

Если $\lambda\in\Gamma, \quad \lambda\to\infty, \quad$ то $\quad \lambda=\sigma+\imath\tau, \quad \sigma>0, \quad \tau=\sigma^{\gamma}, \quad 0<\gamma<1.$
Значит,

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu_i(x)) =&(\sigma+\imath\tau-\mu_i(x))=(\sigma-\mu_i(x))\left(1+i\frac{\tau}{\sigma-\mu_i(x)}\right)=\\ &=(\sigma-\mu_i(x))\left(1+i\frac{\sigma^{\gamma}}{\sigma-\mu_i(x)}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Так как $\mu_i(x)<0$,

$$\frac{\sigma^{\gamma}}{\sigma-\mu_i(x)}\leqslant\sigma^{\gamma-1}\to 0 \text{ при } \sigma\to 0 \text{ равномерно по x}, \quad 0\leqslant x<+\infty.$$

Следовательно, из (6) получаем, что $\lambda-\mu_i(x)\sim\sigma-\mu_i(x)$, $\lambda\in\Gamma$, $\lambda\to\infty$ равномерно по x, $0\leqslant x<+\infty$.
Далее

$$\frac{|\mu_i'(x)|}{|(\lambda-\mu_i(x))|^{\frac{5}{4}}}\longrightarrow 0, \quad \lambda\in\Gamma, \quad \lambda\to\infty \text{ равномерно по x}, x\in[0, \ \ x_0], \text{ так как}$$

$$\frac{\mid \mu_i'(x) \mid}{\mid (\lambda-\mu_i(x)) \mid^{\frac{5}{4}}} \leqslant \frac{1}{\sigma^{\frac{5}{4}}} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma \longrightarrow +\infty. \quad \text{Если же, } x \in [x_0,\, +\infty)\,,$$

$$\frac{|\mu_i'(x)|}{|(\lambda-\mu_i(x))|^{\frac{5}{4}}} \leqslant K\frac{1}{(\sigma-\mu_i(x))^{\frac{5}{4}-\alpha}} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma \longrightarrow +\infty \quad \text{равномерно по х.}$$

Что касается слагаемого

$$\frac{\varphi'(x)\left[\left(\dfrac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{3}{8}}+\left(\dfrac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{1}{8}}\right]}{\sum\limits_{i=1}^{2} K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}, \qquad K_i = const,$$

то числитель равномерно ограничен согласно условиям 1) и 2). Знаменатель же бесконечно растет при $\lambda \in \Gamma, \quad \lambda \to \infty$ равномерно по х, т. к.

$|\lambda-\mu_i(x)|^{\frac{1}{4}} \sim |\sigma-\mu_i(x)|^{\frac{1}{4}} > \sigma^{\frac{1}{4}} \longrightarrow \infty.$

Таким образом, $\| \, G(x,\lambda) \, \|$ при $\lambda \in \Gamma, \;\; \lambda \to \infty$ равномерно по х, $\quad 0 \leqslant x < +\infty \quad$ может быть сделана, скажем, меньше $\dfrac{1}{2}$. Следовательно, при $\lambda \in \Gamma, \quad \lambda \to \infty$ матрица $(I+G)$ имеет ограниченную обратную матрицу $(I+G)^{-1}$.

Итак, $\| \, I+G \, \| \leqslant const$, $\| \, (I+G)^{-1} \, \| \leqslant const, \quad \lambda \in \Gamma, \quad \lambda \to \infty$ равномерно по х. Поэтому для справедливости равенства (5) достаточно показать, что эти оценки имеют место для матриц TG, G', $C^{-1}PCG$.

Перейдем к оценке элементов матрицы TG. Они ограничены сверху линейными комбинациями функций вида:

$$\left|\frac{\mu_i'(x)}{(\lambda-\mu_i(x)}\frac{\mu_i'(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{5}{4}}}\right|, \quad \left|\frac{\mu_i'(x)}{(\lambda-\mu_i(x)}\frac{\varphi'(x)\left[\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{3}{8}}+\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{1}{8}}\right]}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}\right|, \quad i,j=1,2. \tag{7}$$

Докажем, что

$$\int\limits_0^\infty \|TG\|\,dx \;\;=\;\; o(1), \qquad \lambda \in \Gamma, \quad \lambda \to \infty.$$

$$\int\limits_0^\infty \left|\frac{(\mu_i'(x))^2}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}}}\right| dx \;\;=\;\; \int\limits_0^{x_0} \left|\frac{(\mu_i'(x))^2}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}}}\right| dx + \int\limits_{x_0}^\infty \left|\frac{(\mu_i'(x))^2}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}}}\right| dx. \tag{8}$$

То, что первое слагаемое в правой части (8) есть $\quad o(1) \quad \lambda \longrightarrow \infty, \quad \lambda \in \Gamma \quad$ следует из непрерывности подынтегральной функции и наличия λ в знаменателе. Что касается второго слагаемого, то

$$\int\limits_{x_0}^\infty \left|\frac{(\mu_i'(x))^2}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}}}\right| dx \leqslant K\int\limits_{x_0}^\infty \frac{\mu_i'^2(x)}{(\sigma-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}}}dx \leqslant K_1\int\limits_{x_0}^\infty \frac{|\mu_i'(x)|}{(\sigma-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}}}dx =$$

$$= \Big|\text{т.к. } \mu_i'(x) \quad \text{сохраняет знак для } x > x_0\Big| =$$

$$= K_2(\sigma-\mu_i(x))^{\alpha-\frac{5}{4}}\Big|_{x_0}^{\infty} \longrightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \longrightarrow +\infty, \text{ так как } \alpha < \frac{5}{4}.$$

Что касается интеграла от второй функции в (7), то мы снова разбиваем интеграл на $\int\limits_0^{x_0}$ и $\int\limits_{x_0}^{\infty}$.

$\int\limits_0^{x_0} \longrightarrow 0$ при $\lambda \in \Gamma, \quad \lambda \longrightarrow \infty$, т.к. подынтегральная функция непрерывна и содержит λ в знаменателе. Согласно условиям 1) и 2)

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\mu_i'(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} \varphi'(x) \left[\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant K \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{|\mu_i'(x)|}{(\sigma-\mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} dx = K_1 (\sigma-\mu_i(x))^{-\frac{1}{4}} \Big|_{x_0}^{\infty} = o(1) \quad \text{при} \quad \sigma \longrightarrow \infty.$$

Докажем теперь, что $\int\limits_0^{\infty} \|G'(x,\lambda)\| \, dx = o(1)$. Для этого воспользуемся оценками, полученными ранее для элементов матрицы G.

В случае, когда

$$g_{ij}(x,\lambda) \quad = \quad \frac{K_{ij}\mu_i'(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{5}{4}}},$$

$$(g_{ij})' = \left(\frac{K_{ij}\mu_i'(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} \right)' = K_{ij} \frac{\mu_i''(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} + K_{ij} \frac{5\mu_i'(x)\mu_i'(x)}{4(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\infty} \left| g_{ij}' \right| dx \leqslant K_{ij} \int_0^{\infty} \left| \frac{\mu_i''(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} + \frac{\mu_i'^2(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}}} \right| dx. \tag{9}$$

Разобьем этот интеграл на $\int\limits_0^{x_0} + \int\limits_{x_0}^{\infty}$, тогда

$$\int\limits_0^{x_0} \left| \frac{\mu_i''(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} + \frac{\mu_i'^2(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}}} \right| dx \quad = \quad o(1), \quad \lambda \in \Gamma, \quad \lambda \longrightarrow \infty,$$

так как подынтегральные функции непрерывны и $\lambda - \mu_i(x) \neq 0$.
Далее в силу условия 4)

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\mu_i'^2(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}}} \right| dx \leqslant K \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{|\mu_i'(x)|}{(\sigma-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}-\alpha}} dx =$$

$$= K \frac{(\sigma-\mu_i(x))^{\alpha-\frac{5}{4}}}{\alpha-\frac{5}{4}} \Big|_{x_0}^{\infty} = o(1), \ \sigma \longrightarrow \infty, \ \text{т.к.} \alpha < \frac{5}{4},$$

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\mu_i''(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{9}{4}}} \right| dx \quad \leqslant \quad K \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{|\mu_i'(x)|}{|(\sigma-\mu_i(x))|^{\frac{5}{4}}} dx \leqslant \frac{1}{\sigma^{\frac{5}{4}}} \longrightarrow 0, \quad \sigma \longrightarrow +\infty.$$

Для элементов

$$(g_{ij})' = \left(\frac{K_{ij}\varphi'(x)\left[\left(\dfrac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{3}{8}} + \left(\dfrac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{1}{8}}\right]}{\sum\limits_{i=1}^{2} K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}} \right)' =$$

$$= K_{ij}\frac{\varphi''(x)}{\sum\limits_{i=1}^{2} K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}\left[\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{1}{8}}\right] +$$

$$+\frac{K_{ij}}{8}\frac{\varphi'(x)\Big((-\mu_i'(x))(\lambda-\mu_j(x)) - \mu_j'(x)(\lambda-\mu_i(x))\Big)}{\sum\limits_{i=1}^{2} K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}(\lambda-\mu_j(x))^2}\left[3\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{-\frac{5}{8}} + \left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{-\frac{7}{8}}\right] -$$

$$-K_{ij}\frac{\varphi'(x)K_i\left[\left(\dfrac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{3}{8}} + \left(\dfrac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{1}{8}}\right](-\mu_i'(x))}{\sum\limits_{i=1}^{2} K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{5}{4}}}. \qquad (10)$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty K_{ij}\frac{\varphi''(x)}{\sum\limits_{i=1}^{2} K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}\left[\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{1}{8}}\right]dx =$$

$$= \int\limits_0^{x_0} K_{ij}\frac{\varphi''(x)}{\sum\limits_{i=1}^{2} K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}\left[\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{1}{8}}\right]dx +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^\infty K_{ij}\frac{\varphi''(x)}{\sum\limits_{i=1}^{2} K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}\left[\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{1}{8}}\right]dx. \qquad (11)$$

Первое слагаемое в правой части (11) есть $o(1)$ при $\lambda \in \Gamma,\ \lambda \longrightarrow \infty$ следует из непрерывности подынтегральной функции и наличия λ в знаменателе.

Для второго слагаемого в (11) справедливы оценки:

$$\int\limits_{x_0}^\infty K_{ij}\left|\frac{\varphi''(x)}{\sum\limits_{i=1}^{2} K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}\left[\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac{1}{8}}\right]\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_{ij}}{K_i}\int\limits_{x_0}^\infty\left|\frac{\varphi''(x)\left(B^{\frac{3}{8}} + B^{\frac{1}{8}}\right)}{(\sigma-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}\right|dx \leqslant const\int\limits_{x_0}^\infty\left|\frac{\varphi''(x)}{(\lambda-\mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}\right|dx = o(1),$$

при $\lambda \in \Gamma, \quad \lambda \longrightarrow \infty$ согласно условию 3).

Далее в (10) оценим второе слагаемое, т.е.

$$\int\limits_0^\infty K_{ij}\left|\frac{\varphi'(x)\Big((-\mu_i'(x))(\lambda-\mu_j(x))-\mu_j'(x)(\lambda-\mu_i(x))\Big)}{\sum\limits_{i=1}^{2}K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac14}(\lambda-\mu_j(x))^2}\right|\left|\left[\frac38\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{-\frac58}+\frac18\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{-\frac78}\right]\right|dx=$$

$$=\int\limits_0^{x_0} K_{ij}\left|\frac{\varphi'(x)\Big((-\mu_i'(x))(\lambda-\mu_j(x))-\mu_j'(x)(\lambda-\mu_i(x))\Big)}{\sum\limits_{i=1}^{2}K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac14}(\lambda-\mu_j(x))^2}\right|\left|\left[\frac38\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{-\frac58}+\frac18\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{-\frac78}\right]\right|dx+$$

$$+\int\limits_{x_0}^\infty K_{ij}\left|\frac{\varphi'(x)\Big((-\mu_i'(x))(\lambda-\mu_j(x))-\mu_j'(x)(\lambda-\mu_i(x))\Big)}{\sum\limits_{i=1}^{2}K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac14}(\lambda-\mu_j(x))^2}\right|\left|\left[\frac38\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{-\frac58}+\frac18\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{-\frac78}\right]\right|dx. \tag{12}$$

Первый интеграл в правой части (12) есть $o(1)$ при $\lambda \in \Gamma, \quad \lambda \longrightarrow \infty$ следует из непрерывности подынтегральной функции и $\lambda-\mu_i(x)\neq 0$.

Для второго слагаемого в (12) справедливы оценки:

$$\int\limits_{x_0}^\infty K_{ij}\left|\frac{\varphi'(x)\Big((-\mu_i'(x))(\lambda-\mu_j(x))-\mu_j'(x)(\lambda-\mu_i(x))\Big)}{\sum\limits_{i=1}^{2}K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac14}(\lambda-\mu_j(x))^2}\right|\left|\left[\frac38\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{-\frac58}+\frac18\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{-\frac78}\right]\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant K_{ij}\int\limits_{x_0}^\infty\frac{|\varphi'(x)|\left|\Big((-\mu_i'(x))(\lambda-\mu_j(x))-\mu_j'(x)(\lambda-\mu_i(x))\Big)\right|\frac{3\left(B^{-\frac58}+B^{-\frac78}\right)}{8}}{\sum\limits_{i=1}^{2}K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac14}(\lambda-\mu_j(x))^2}dx\leqslant$$

$$\leqslant A_1\int\limits_{x_0}^\infty\frac{|\mu_i'(x)(\lambda-\mu_j(x))|+\left|\mu_j'(x)(\lambda-\mu_i(x))\right|}{\left|(\sigma-\mu_i(x))^{\frac14}\right|\left|\sigma-\mu_j(x)\right|^2}dx\leqslant$$

$$\leqslant A_2\int\limits_{x_0}^\infty\left|\frac{\mu_i'(x)}{(\lambda-\mu_j(x))^{\frac54}}\right|dx=o(1),\quad A,A_2=const,\ \lambda\longrightarrow\infty,\ \lambda\in\Gamma.$$

Для третьего интеграла в (10) справедливы оценки:

$$\int\limits_0^\infty K_{ij}\frac{\varphi'(x)K_i\left[\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac38}+\left(\frac{\lambda-\mu_i(x)}{\lambda-\mu_j(x)}\right)^{\frac18}\right]\mu_i'(x)}{4\sum\limits_{i=1}^{2}K_i(\lambda-\mu_i(x))^{\frac54}}=$$

$$
= \int_0^{x_0} K_{ij} \frac{\varphi'(x) K_i \left[\left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \mu_i'(x)}{4 \sum\limits_{i=1}^{2} K_i (\lambda - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} dx +
$$

$$
+ \int_{x_0}^{\infty} K_{ij} \frac{\varphi'(x) K_i \left[\left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \mu_i'(x)}{4 \sum\limits_{i=1}^{2} K_i (\lambda - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} dx. \tag{13}
$$

То что первое слагаемое в правой части (13) $o(1)$ при $\lambda \longrightarrow \infty, \ \lambda \in \Gamma$ следует из непрерывности подынтегральной функции и $\lambda - \mu_i(x) \neq 0$.

Для второго слагаемого в (13) справедливы оценки:

$$
\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{K_{ij}}{K_j} \frac{\left| \varphi'(x) \mu_i'(x) \left(B^{\frac{3}{8}} + B^{\frac{1}{8}} \right) \right|}{\sum_{i=1}^{2} |(\sigma - \mu_i(x))|^{\frac{5}{4}}} dx \leqslant A_3 \int\limits_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\mu_i'(x)}{(\sigma - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} \right| dx = o(1), \ A_3 = const, \ \lambda \longrightarrow \infty, \ \lambda \in \Gamma.
$$

Таким образом, $\int\limits_0^{\infty} \|G'(x, \lambda)\| \, dx = o(1)$ при $\lambda \longrightarrow \infty, \ \lambda \in \Gamma$.

Докажем, что $\int\limits_0^{\infty} \left\| C^{-1} PCG \right\| dx = o(1)$. Поскольку элементы матрицы $C^{-1}PC$ сверху ограничены линейной комбинацией вида:

$$
\left| \varphi'(x) \left[\left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} - \left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \right|,
$$

то, используя полученные выражения для элементов матрицы G, выпишем элементы матрицы $C^{-1}PCG$:

$$
\left(\varphi'(x) \left[\left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \right) K_{ij} \frac{\mu_i'(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} \text{ и}
$$

$$
\left(\varphi'(x) \left[\left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \right)^2 \frac{K_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{2} (\lambda - \mu_i(x))^{\frac{1}{4}}}.
$$

Разобьем интеграл от первого выражения на сумму:

$$
\int\limits_0^{\infty} \left| \left(\varphi'(x) \left[\left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \right) K_{ij} \frac{\mu_i'(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} \right| dx =
$$

$$
= \int\limits_0^{x_0} \left| \left(\varphi'(x) \left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right) K_{ij} \frac{\mu_i'(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} \right| dx +
$$

$$
+ \int\limits_{x_0}^{\infty} \left| \left(\varphi'(x) \left[\left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \right) K_{ij} \frac{\mu_i'(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} \right| dx. \tag{14}
$$

То что касается первого слагаемого в (14), оно есть $o(1)$ при $\lambda \in \Gamma, \ \lambda \longrightarrow \infty$, следует из непрерывности подынтегральной функции и $\lambda - \mu_i(x) \neq 0$.

Для второго слагаемого в (14) числитель ограничен согласно условиям 1), 2). Знаменатель же бесконечно растет при $\lambda \in \Gamma$, $\lambda \longrightarrow \infty$, равномерно по x, так как

$|\lambda - \mu_i(x)| \sim |\sigma - \mu_i(x)|$,

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \left| \left(\varphi'(x) \left[\left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \right) K_{ij} \frac{\mu_i'(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant K_{ij} K \left(B^{\frac{3}{8}} + B^{\frac{1}{8}} \right) \int\limits_{0}^{\infty} \left| \frac{\mu_i'(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} \right| dx \leqslant K_{ij} \bar{K} \int\limits_{0}^{\infty} \left| \frac{\mu_i'(x)}{(\sigma - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} \right| dx = o(1), \text{при } \sigma \longrightarrow +\infty$$

Для второго элемента матрицы $C^{-1}PCG$ справедливы оценки:

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \left| \left(\varphi'(x) \left[\left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} + \left(\frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \right)^2 \frac{K_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{2} (\lambda - \mu_i(x))^{\frac{1}{4}}} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant K^2 \left(B^{\frac{3}{8}} + B^{\frac{1}{8}} \right) K_{ij} \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{(\sigma - \mu_i(x))^{\frac{1}{4}}} = o(1), \text{при } \sigma \longrightarrow +\infty \text{ согласно условиям 1), 3)}$$

Для дальнейшего доказательства нам понадобится лемма, доказанная А.Г. Костюченко и В.П. Белогрудем (см. [2], стр. 165-168)

Лемма. *Пусть выполняются условия*

1) функции $\nu_k(x, \lambda)$ *локально суммируемы при любом значении* $\lambda \in \Gamma$;

2) при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\nu(x, \lambda) \equiv 0$, *а при* $i \neq j$ *функции* $Re\{\nu_k(x, \lambda)\}$ *не меняют знак при* $x > x_0$, *для достаточно больших* x_0 *и* $\lambda \in \Gamma$;

3) функции $\theta_{km}(x, \lambda)$ *суммируемы на* $[0, \infty)$ *и* $\int\limits_a^b \|\theta(x, \lambda)\| \, dx = o(1)$, $\lambda \longrightarrow \infty$, $\lambda \in \Gamma$;

Тогда система (4) имеет решение, удовлетворяющее при $\lambda \longrightarrow \infty$, $\lambda \in \Gamma$,

$s_k(x, \lambda) = 1 + o(1)$ $\quad s_m(x, \lambda) = o(1)$, $\quad m \neq k$ *равномерно относительно* x, $x \in [0, \infty)$.

Покажем, что $Re\,(\tilde{\mu}_i(x) - \tilde{\mu}_j(x))$ не меняет знак при достаточно больших x_0, $i, j = \overline{1, 8}$, $i \neq j$. Покажем, например, для случая $i = 1$, $\quad j = 2$.

$$Re\,(\tilde{\mu}_1(x) - \tilde{\mu}_2(x)) = Re \left((\lambda - \mu_1(x))^{\frac{1}{4}} + (\lambda - \mu_1(x))^{\frac{1}{4}} \right) =$$

$$= Re \left(2\,(\sigma + i\tau - \mu_i)^{\frac{1}{4}} \right) = 2Re \left((\lambda - \mu_1(x))^{\frac{1}{4}} + (\lambda - \mu_1(x))^{\frac{1}{4}} \right).$$

Поскольку $\lambda = \sigma + \imath\tau$, $\quad \tau = \sigma^{\gamma}$, $\quad 0 < \gamma < 1$, $\quad \sigma > 0$, $\quad \tau > 0$, то при $x \longrightarrow \infty$ имеем:

$$2Re \left\{ (\sigma + i\tau - \mu_1(x))^{\frac{1}{4}} \right\} = 2Re \left\{ \left(-\mu_1(x) \left(\frac{\sigma + i\tau}{\mu_1(x)} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{4}} \right\} = 2Re \left\{ \left(-\mu_1(x) \left(\frac{\sigma \left(1 + \frac{i\sigma^{\gamma}}{\sigma} \right)}{\mu_1(x)} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{4}} \right\} =$$

$$= 2Re \left\{ \left(-\mu_1(x) \left(\frac{\sigma(1 + o(1))}{\mu_1(x)} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{4}} \right\} = 2Re \left\{ (-\mu_1(x)(1 + o(1))^{\frac{1}{4}} \right\}$$

Когда $|\mu_1(x)| \to \infty$, $x \to \infty$, то возможны два случая:

1) $\mu_1(x) \to -\infty$, тогда $-\mu_1(x) > 0$, следовательно, $(-\mu_1(x))^{\frac{1}{4}}$ – вещественное число и $Re \left\{ (\mu_1(x))^{\frac{1}{4}} \right\}$ не меняет знак при больших x.

2) $\mu_1(x) \to +\infty$, тогда $-\mu_1(x) < 0$, следовательно, $(-\mu_1(x))^{\frac{1}{4}} = |-\mu_1(x)|^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right)$

Тогда $2Re \left\{ |\mu_1(x)|^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) \right\} = \sqrt{2}\, |\mu(x)|^{\frac{1}{4}}$- также не меняет знак при больших x.

Далее, поскольку мы показали, что $\int\limits_0^\infty \|\theta(x, \lambda\| dx = o(1)$, то система (4) является L-диагональной и к ней применима Лемма.

Теперь с помощью формул $z = Uw$, $w = C(E+G)u$ мы можем от вектора u вернуться к искомому вектору z. Тогда с учетом формул для элементов матриц U и C и того, что $(G)_{ij}(x, \lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Gamma$ равномерно по x, получим нужные асимптотические формулы.

$\square$

Авторы признательны академику М.Отельбаеву за обсуждение полученных результатов.

Список литературы

[1] Федорюк М.В. Асимтотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М: Наука, 1983. - 352 с.

[2] Костюченко А.Г., Саргсян Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). - М: Наука, 1979. - 402 с.

[3] Султанаев Я.Т. Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций // Диф. уравнения. - 1974. - Т.10, є 9. - С.1673-1683.

[4] Султанаев Я.Т., Мякинова О.В. Об индексах дефекта сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в пространстве вектор-функций // Матем. заметки. - 2009 - Т.86, є 6. - С. 950-953

Тема: АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Авторы: Г.Ж.Берденова, Я.Т.Султанаев
Ключевые слова: Асимптотическое поведение, система дифференциальных уравнений, L - диагональная система.
Keywords: Asymptotic behavior, system of differential equations, L - diagonal system.

Реферат:
В статье исследуется асимптотическое поведение решений системы двух сингулярных дифференциальных уравнений четвертого порядка при больших значениях спектрального параметра. На основании полученных формул вычислены индексы дефекта соответсвующего дифференциального оператора.

Title of the article is THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE VECTOR-FUNCTIONS SPACE.
In this paper the asymptotic behavior of the solutions of the two fourth order singular differential equations for large values of the spectral parameter is investigated. By the obtained formulas the deficiency indices of the corresponding differential operator are calculated.

Мақала тақырыбы: ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ КЕҢІСТІГІНДЕГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ШЕШІМДЕРІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ӨЗГЕРІСІ.
Мақалада спектрлік параметрдің үлкен мәні үшін төртінші ретті екі сингулярлы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің асимптотикалық қасиеттері зерттелген. Алынған формулалар негізінде сәйкес дифференциалдық оператордың ақаулық индекстері есептелген.

2010 Mathematics Subject Classification: 47E05, 34L05

Гульнар Жалгасовна Берденова - PhD -докторант ЕНУ имени Л.Н. Гумилева
Адрес: 010008 г. Астана, ул. Мунайтпасова, 5
Сот. тел: 8708-0508497.
e-mail: gulnar_7109@mail.ru

Яудат Талгатович Султанаев - доктор ф.-м. н., профессор БашГПУ имени М. Акмуллы
Адрес: 450074, Россия, г. Уфа, ул. Октябрьской революции, 3а
Сот. тел: +7917-3763294.
e-mail: sultanaevyt@gmail.com