

**Министерство образования и науки Республики Казахстан**  
**Костанайский государственный университет им. А.Байтурсынова**  
**Кафедра электроэнергетики и физики**

**Т.И.Глущенко**

**ПРАКТИКУМ  
ПО  
ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ 1**

Учебное пособие

**Костанай, 2013**

УДК \_\_\_\_\_  
ББК \_\_\_\_\_  
Г55

**Автор:**

Глущенко Татьяна Ивановна, кандидат экономических наук

**Рецензенты:**

Курманов Аяп Конлямжаевич, доктор технических наук, профессор,  
зав.кафедрой транспорта и сервиса КИПУ

Утегулов Болатбек Бахытжанович, Заслуженный деятель Республики  
Казахстан, доктор технических наук, профессор кафедры  
электроэнергетики ПГУ

Ткаченко Владимир Васильевич, кандидат технических наук, доцент, зав.  
кафедрой электроэнергетики КГУ

Глущенко Т.И.

Г55 Практикум по теоретическим основам электротехники 1. - Костанай:  
КГУ им. А.Байтурсынова, 2013 – 137 с.

ISBN \_\_\_\_\_

В учебное пособие включены методы расчета цепей постоянного и переменного токов. Особое внимание уделено применению специализированных программ к расчету электрических цепей. Работа предоставляет широкий выбор методов расчета и анализа электрических цепей.

Предназначено для студентов электроэнергетических специальностей; оно может быть рекомендовано преподавателям высших учебных заведений при проведении занятий по теоретическим основам электротехники.

УДК \_\_\_\_\_  
ББК \_\_\_\_\_

Утверждено Учебно-методическим советом Костанайского  
государственного университета им. А. Байтурсынова, протокол от  
\_\_\_\_ 201\_\_ г. № \_\_\_\_.

ISBN \_\_\_\_\_

© Костанайский государственный  
университет им. А.Байтурсынова, 2013 г.

## Содержание

Введение.....	5
1. Линейные электрические цепи постоянного тока .....	7
1.1 Общие теоретические сведения.....	7
1.1.1 Элементы электрических цепей.....	7
1.1.2 Схемы замещения источников электрической энергии..	12
1.1.3 Режимы работы электрической цепи.....	15
1.2 Методы анализа цепей постоянного тока.....	19
1.2.1 Метод эквивалентных преобразований.....	19
1.2.2 Метод уравнений Кирхгофа.....	33
1.2.3 Метод контурных токов.....	36
1.2.4 Метод узловых потенциалов.....	38
1.2.5 Метод активного двухполюсника.....	40
1.2.6 Потенциальная диаграмма.....	42
1.2.7 Баланс мощностей.....	43
1.2.8 Метод двух узлов.....	44
1.2.9 Метод наложения.....	44
1.2.10 Решение задач.....	45
1.3 Применение пакета Mathcad к расчету электрических цепей постоянного тока .....	53
1.3.1 Методы решения задач.....	53
1.3.2 Решение задач.....	57
Указания к выполнению самостоятельной работы №1.....	62
2. Электрические цепи однофазного синусоидального тока. ....	64
2.1 Общие теоретические сведения.....	64
2.1.1 Изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов на плоскости декартовых координат.....	66
2.1.2 Векторное изображение синусоидально изменяющихся величин .....	67
2.1.3 Представление синусоидальных ЭДС, напряжений и токов комплексными числами.....	69
2.1.4 Элементы цепи синусоидального тока. Векторные диаграммы и комплексные соотношения для них.....	73
2.1.5 Закон Ома для участка цепи с источником ЭДС.....	86
2.1.6 Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока.....	87
2.2 Специальные методы расчета .....	91
2.3 Преобразование энергии в электрической цепи. Мгновенная, активная, реактивная и полная мощности синусоидального тока.....	96
2.4 Резонансы в цепях синусоидального тока .....	105
2.5 Векторные и топографические диаграммы.....	113
2.6 Решение задач символическим методом.....	119
2.7 Применение пакета Mathcad к расчету электрических	125

цепей переменного тока.....	
Указания к выполнению самостоятельной работы №2.....	133
Заключение .....	136
Список использованных источников.....	137

## Введение

«Теоретические основы электротехники 1» являются основной теоретической дисциплиной в системе подготовки специалистов в области электроэнергетики. Она базируется на знаниях, полученных студентами в результате изучения физики, математики и информатики. В свою очередь, хорошее знание ТОЭ 1 значительно облегчает изучение специальных электротехнических дисциплин: электрических машин, информационно-измерительной техники, электроэнергетики и др.

Основная задача дисциплины - дать необходимую теоретическую подготовку по главным вопросам исследования и расчета электрических цепей постоянного и переменного тока, трехфазных и несинусоидальных цепей.

Развитие новых технологий привело к внедрению компьютеров в научные исследования. В настоящее время успешное решение большинства научных задач в значительной степени зависит от умения применить вычислительную технику и соответствующие методы. При обучении современного специалиста необходимо связать математику как общетеоретическую дисциплину с практическим ее применением в работе специалиста и дать конкретный практический аппарат для исследований.

Однако следует помнить, что математическими соотношениями можно описать все что угодно и при этом получить соответствующие результаты, не имеющие никакого реального смысла. По этому поводу Эйнштейн сказал, что понятия, которые оказались полезными в упорядочении вещей, легко приобретают над нами такую власть, что мы забываем об их человеческом происхождении. С этими соображениями связано положение: прежде чем математический аппарат может быть использован для изучения реального и сложного явления, необходимо это явление подвергнуть предварительному анализу, выделив его «главную часть».

Решение практической задачи начинается с описания исходных данных и целей решения – т.е. постановка задачи и построение математической модели. Этот этап является наиболее сложным и ответственным этапом. Если выбранная математическая модель слишком грубо отражает взаимосвязи изучаемого явления, то какие бы методы при этом не применялись, найденные значения окажутся бесполезными и могут привести инженера к ошибкам и нелепым выводам. Математическая модель может иметь вид уравнения, системы уравнений или быть выраженной в форме иных, как угодно сложных, математических структур или соотношений, для решения которых применяются математические методы, возникающие вне математики.

Наиболее важными задачами электроэнергетики являются:

1. анализ электрических цепей с понятием о методах теории графов и элементов топологии;
2. приемы определения вероятностей;

3. способы анализа дифференциальных уравнений, используемых при выяснении устойчивых состояний системы и др.

Математические решения прикладных задач обладают серьезной спецификой. Решения таких задач должны быть не только правильными, но и своевременными, экономными по затрачиваемым усилиям, а результаты должны быть пригодными для практического применения. Для решения многих научно-исследовательских задач разработаны различные программы, применение которых позволяет обеспечить необходимую точность решения задач, заменить трудоемкую работу.

Ранее для решения этих задач требовалось знание языков программирования, с появлением математических пакетов работа пользователя значительно упростилась. Наиболее мощные и распространенные математические пакеты MathCAD и MATLAB соответствуют потребностям, как студента, так и профессионала-аналитика. Задача выбрать из многообразия программ наиболее важные и применить их в учебном процессе.

Одним из достоинств пакета MathCAD является реализация принципа WYSIWYG (What You See Is What You Get, т.е. что видишь, то и получаешь), а также простота в изучении и использовании. В системе применен уникальный метод визуализации данных, суть которого заключается в том, что формулы в документе выглядят так же, как на бумаге. Описываемая система предоставляет пользователю около двухсот операторов и логических функций для численного и символьного решения математических задач различной сложности и математического моделирования.

Поэтому исключительно велика роль систем класса MathCAD в образовании. Облегчая решение сложных математических задач, система снимает психологический барьер при использовании теоретической и прикладной математики, делая обучение интересным и достаточно простым. Грамотное применение систем в учебном процессе обеспечивает повышение фундаментальности математического и специального образования, позволяют готовить электронные уроки с использованием изысканных графиков (в том числе анимационных), визуализировать сложные процессы.

## **1 Линейные электрические цепи постоянного тока**

Основная цель расчета электрической цепи заключается в определении токов в ее ветвях. Зная токи, нетрудно найти напряжения и мощности ветвей и отдельных элементов цепи.

Значения токов, напряжений, мощностей дают возможность оценить условия и эффективность работы электротехнического оборудования и приборов во всех участках электрической цепи.

Связь между ЭДС, напряжениями и токами линейных электрических цепей выражается линейными уравнениями, т.е. уравнениями первой степени, поэтому для их расчета применяются аналитические методы с обычными алгебраическими преобразованиями.

Анализом электрических цепей называют определение токов или напряжений в ее ветвях.

Основной задачей этого раздела является овладение методами расчета электрических цепей. К изучению следует приступить после усвоения трех основных законов электрических цепей: закона Ома и двух законов Кирхгофа. Линейные цепи с одним источником проще всего могут быть рассчитаны по закону Ома или методом эквивалентных преобразований. В этом случае при необходимости производят нужные преобразования сопротивлений: параллельного соединения в последовательное и обратно, треугольника в звезду и обратно и т.д.

Разветвленные цепи с несколькими ЭДС рассчитываются при помощи методов, основой которых служат законы Кирхгофа. Методы анализа с применением законов Кирхгофа позволяют рассчитать электрическую цепь любой конфигурации и сложности, т.е. являются основными.

### **1.1 Общие теоретические сведения**

#### **1.1.1 Элементы электрических цепей**

Электромагнитные процессы, протекающие в электротехнических устройствах, как правило, достаточно сложны. Однако во многих случаях, их основные характеристики можно описать с помощью таких интегральных понятий, как: напряжение, ток, электродвижущая сила (ЭДС). При таком подходе совокупность электротехнических устройств, состоящую из соответствующим образом соединенных источников и приемников электрической энергии, предназначенных для генерации, передачи, распределения и преобразования электрической энергии и (или) информации, рассматривают как электрическую цепь. Электрическая цепь состоит из отдельных частей (объектов), выполняющих определенные функции и называемых элементами цепи. Основными элементами цепи являются источники и приемники электрической энергии (сигналов). Электротехнические устройства, производящие электрическую энергию,

называются генераторами или источниками электрической энергии, а устройства, потребляющие ее – приемниками (потребителями) электрической энергии.

У каждого элемента цепи можно выделить определенное число зажимов (полюсов), с помощью которых он соединяется с другими элементами. Различают двух – и многополюсные элементы. Двухполюсники имеют два зажима. К ним относятся источники энергии (за исключением управляемых и многофазных), резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы. Многополюсные элементы – это, например, триоды, трансформаторы, усилители и т.д.

Все элементы электрической цепи условно можно разделить на активные и пассивные. Активным называется элемент, содержащий в своей структуре источник электрической энергии. К пассивным относятся элементы, в которых рассеивается (резисторы) или накапливается (катушка индуктивности и конденсаторы) энергия. К основным характеристикам элементов цепи относятся их вольт-амперные, вебер-амперные и кулон-вольтные характеристики, описываемые дифференциальными или (и) алгебраическими уравнениями. Если элементы описываются линейными дифференциальными или алгебраическими уравнениями, то они называются линейными, в противном случае они относятся к классу нелинейных. Строго говоря, все элементы являются нелинейными. Возможность рассмотрения их как линейных, что существенно упрощает математическое описание и анализ процессов, определяется границами изменения характеризующих их переменных и их частот. Коэффициенты, связывающие переменные, их производные и интегралы в этих уравнениях, называются параметрами элемента.

Если параметры элемента не являются функциями пространственных координат, определяющих его геометрические размеры, то он называется элементом с сосредоточенными параметрами. Если элемент описывается уравнениями, в которые входят пространственные переменные, то он относится к классу элементов с распределенными параметрами. Классическим примером последних является линия передачи электроэнергии (длинная линия).

Цепи, содержащие только линейные элементы, называются линейными. Наличие в схеме хотя бы одного нелинейного элемента относит ее к классу нелинейных.

Рассмотрим пассивные элементы цепи, их основные характеристики и параметры.

### *1. Резистивный элемент (резистор)*

Условное графическое изображение резистора приведено на рисунке 1,а. Резистор – это пассивный элемент, характеризующийся резистивным сопротивлением. Последнее определяется геометрическими размерами



тела и свойствами материала: удельным сопротивлением  $\rho$  (Ом·м) или обратной величиной – удельной проводимостью  $\gamma = \rho^{-1}$  (См/м).

В простейшем случае проводника длиной  $\ell$  и сечением  $S$  его сопротивление определяется выражением

$$R = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{\ell}{\gamma S} \text{ (Ом)} \quad (1.1)$$

где  $\rho$  - удельное сопротивление, Ом·м;

$\ell$  - длина проводника, м;

$S$  – сечение проводника, м<sup>2</sup>.

В общем случае определение сопротивления связано с расчетом поля в проводящей среде, разделяющей два электрода.

Основной характеристикой резистивного элемента является зависимость  $u(i)$  (или  $i(u)$ ), называемая вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Если зависимость  $u(i)$  представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см. рисунок 1,б), то резистор называется линейным и описывается соотношением:

$$u = Ri = m_{Ritg} \alpha \quad (1.2)$$

или

$$i = gu \quad (1.3)$$

где  $g = R^{-1}$  - проводимость.

При этом  $R = \text{const}$ .

Нелинейный резистивный элемент, ВАХ которого нелинейна (рисунок 1,б), характеризуется несколькими параметрами. В частности

безынерционному резистору ставятся в соответствие статическое  $R_{ст} = \frac{U}{I}$

и дифференциальное  $R_d = \left. \frac{du}{di} \right|_I$  сопротивления.

## 2. Индуктивный элемент (катушка индуктивности)

Условное графическое изображение катушки индуктивности приведено на рисунке 2,а. Катушка – это пассивный элемент, характеризующийся индуктивностью. Для расчета индуктивности катушки необходимо рассчитать созданное ею магнитное поле.

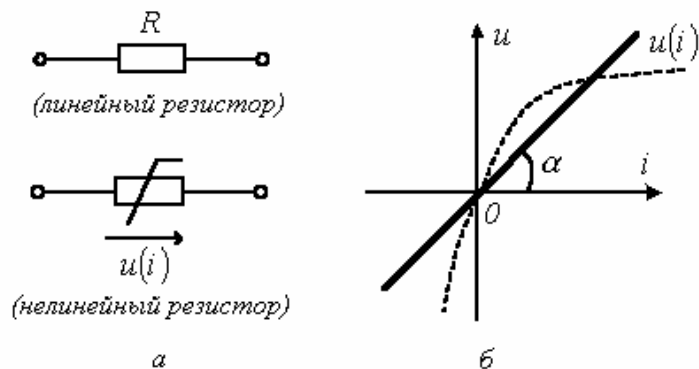


Рисунок 1- Резистивные элементы и их характеристики

Индуктивность определяется отношением потокосцепления к току, протекающему по виткам катушке:

$$L = \frac{\Psi}{i} \text{ (Гн)} \tag{1.4}$$

где  $\Psi$  – потокосцепление;  
 $i$  - ток в катушке.

В свою очередь потокосцепление равно сумме произведений потока, пронизывающего витки, на число этих витков

$$\Psi = \sum w_k \Phi_k,$$

где  $\Phi_k = \int_{S_k} \vec{B} d\vec{S}$

Основной характеристикой катушки индуктивности является зависимость  $\mu(i)$ , называемая вебер-амперной характеристикой. Для линейных катушек индуктивности зависимость  $\mu(i)$  представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см. рисунке 2,б); при этом  $L = m \cdot \mu \cdot \text{tg } \alpha = \text{const}$ .

Нелинейные свойства катушки индуктивности (см. кривую  $\mu(i)$  на рисунке 2,б) определяет наличие у нее сердечника из ферромагнитного материала, для которого зависимость  $B(H) = \mu_0 \mu H$  магнитной индукции от напряженности поля нелинейна. Без учета явления магнитного гистерезиса

нелинейная катушка характеризуется статической  $L_{ст} = \frac{\Psi}{I}$  и

дифференциальной  $L_{д} = \left. \frac{d\Psi}{di} \right|_I$  индуктивностями.

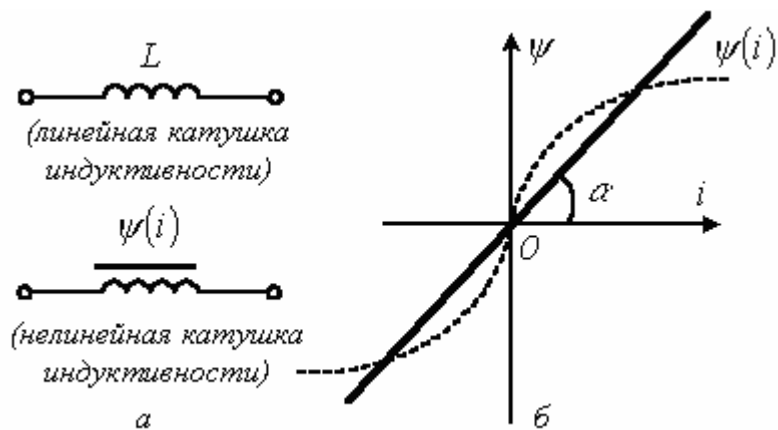


Рисунок 2 - Индуктивные элементы и их характеристики

### 3. Емкостный элемент (конденсатор)

Условное графическое изображение конденсатора приведено на рисунке 3,а.

Конденсатор – это пассивный элемент, характеризующийся емкостью. Для расчета последней необходимо рассчитать электрическое поле в конденсаторе. Емкость определяется отношением заряда  $q$  на обкладках конденсатора к напряжению  $u$  между ними

$$C = \frac{q}{u} (\Phi) \quad (1.5)$$

где  $q$  - заряд;

$u$  – напряжение.

Она зависит от геометрии обкладок и свойств диэлектрика, находящегося между ними. Большинство диэлектриков, используемых на практике, линейны, т.е. у них относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = \text{const}$ . В этом случае зависимость  $q(u)$  представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, (см. рисунок 3,б) и  $C = m \cdot \text{tg } \alpha = \text{const}$ .

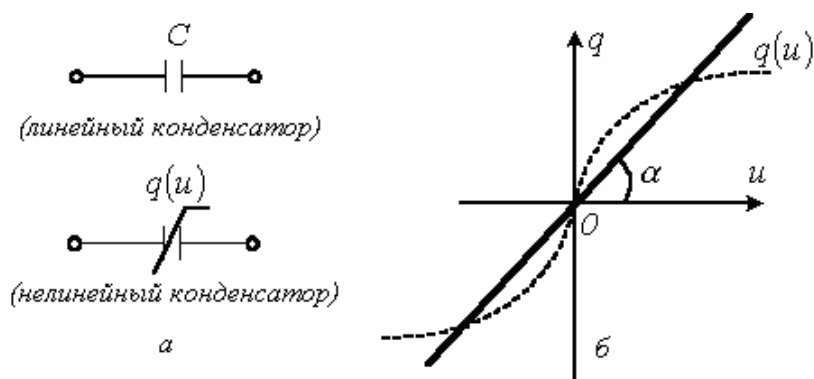


Рисунок 3 - Емкостные элементы и их характеристики

У нелинейных диэлектриков (сегнетоэлектриков) диэлектрическая проницаемость является функцией напряженности поля, что обуславливает нелинейность зависимости  $q(u)$  (рис. 3,б). В этом случае без учета явления электрического гистерезиса нелинейный конденсатор

характеризуется статической емкостью  $C_{ст} = \frac{q}{U}$  и дифференциальной емкостью  $C_d = \left. \frac{dq}{du} \right|_U$ .

### 1.1.2 Схемы замещения источников электрической энергии

Свойства источника электрической энергии описываются ВАХ  $U(I)$ , называемой внешней характеристикой источника. Далее в этом разделе для упрощения анализа и математического описания будут рассматриваться источники постоянного напряжения (тока). Однако все полученные при этом закономерности, понятия и эквивалентные схемы в полной мере распространяются на источники переменного тока. ВАХ источника может быть определена экспериментально на основе схемы, представленной на рисунке 4,а. Здесь вольтметр  $V$  измеряет напряжение на зажимах 1-2 источника  $I$ , а амперметр  $A$  – потребляемый от него ток  $I$ , величина которого может изменяться с помощью переменного нагрузочного резистора (реостата)  $R_H$ .

В общем случае ВАХ источника является нелинейной (кривая 1 на рисунок 4,б). Она имеет две характерные точки, которые соответствуют:

а – режиму холостого хода  $(I = 0; U = U'_{хх})$ ;

б – режиму короткого замыкания  $(U = 0; I = I'_{кз})$ .

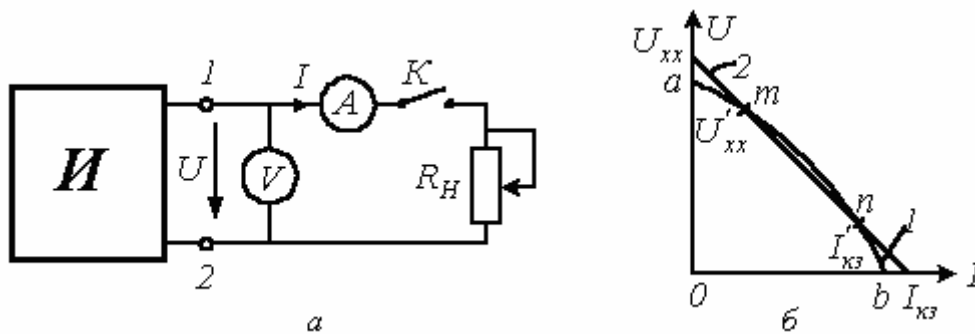


Рисунок 4 - Источник электрической энергии (ЭДС) и их характеристики

Для большинства источников режим короткого замыкания (иногда холостого хода) является недопустимым. Токи и напряжения источника обычно могут изменяться в определенных пределах, ограниченных сверху значениями, соответствующими номинальному режиму (режиму, при котором изготовитель гарантирует наилучшие условия его эксплуатации в отношении экономичности и долговечности срока службы). Это позволяет в ряде случаев для упрощения расчетов аппроксимировать нелинейную ВАХ на рабочем участке *m-n* (см. рисунок 4,б) прямой, положение которой определяется рабочими интервалами изменения напряжения и тока. Следует отметить, что многие источники (гальванические элементы, аккумуляторы) имеют линейные ВАХ.

Прямая 2 на рисунке 4,б описывается линейным уравнением

$$U = U_{xx} - R_{сн} I, \tag{1.6}$$

где  $U_{xx}$  - напряжение на зажимах источника при отключенной нагрузке (разомкнутом ключе К в схеме на рисунке 4,а);

$R_{сн} = U_{xx} / I_{кз}$  - внутреннее сопротивление источника.

Уравнение (1.6) позволяет составить последовательную схему замещения источника (см. рисунок 5,а). На этой схеме символом  $E$  обозначен элемент, называемый идеальным источником ЭДС. Напряжение на зажимах этого элемента  $U_{xx} = E = const$  не зависит от тока источника, следовательно, ему соответствует ВАХ на рисунке 5,б. На основании (1.6) у такого источника  $R_{сн} = 0$ . Отметим, что направления ЭДС и напряжения на зажимах источника противоположны.

Если ВАХ источника линейна, то для определения параметров его схемы замещения необходимо провести замеры напряжения и тока для двух любых режимов его работы.

Существует также параллельная схема замещения источника.

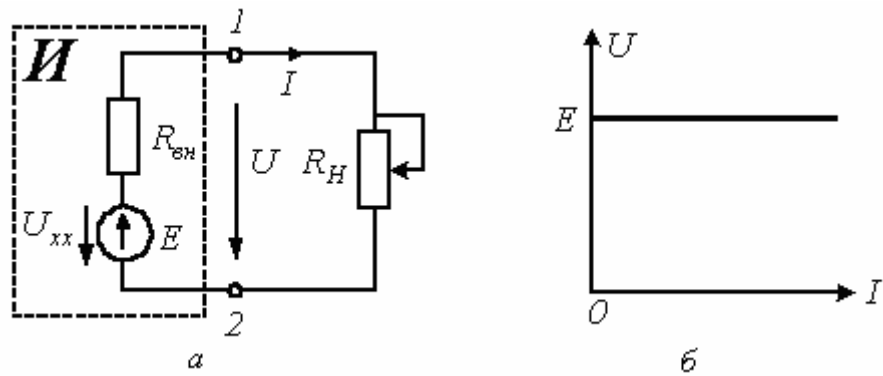


Рисунок 5 - Идеальный источник электрической энергии (ЭДС) и его характеристика

Для ее описания разделим левую и правую части соотношения (1.6) на  $R_{вн}$ . В результате получим

$$I = \frac{U_{xx}}{R_{вн}} - \frac{U}{R_{вн}} = I_{кз} - \frac{U}{R_{вн}}$$

или

$$I = J - g_{вн} U, \quad (1.7)$$

где  $J = I_{кз}$ ;  $g_{вн} = R_{вн}^{-1}$  - внутренняя проводимость источника.

Уравнению (1.7) соответствует схема замещения источника на рисунке 6,а.

На этой схеме символом  $J$  обозначен элемент, называемый идеальным источником тока. Ток в ветви с этим элементом равен  $J = I_{кз}$  и не зависит от напряжения на зажимах источника, следовательно, ему соответствует ВАХ на рисунке 6,б. На этом основании с учетом (1.7) у такого источника  $g_{вн} = 0$ , т.е. его внутреннее сопротивление  $R_{вн} = \infty$ .

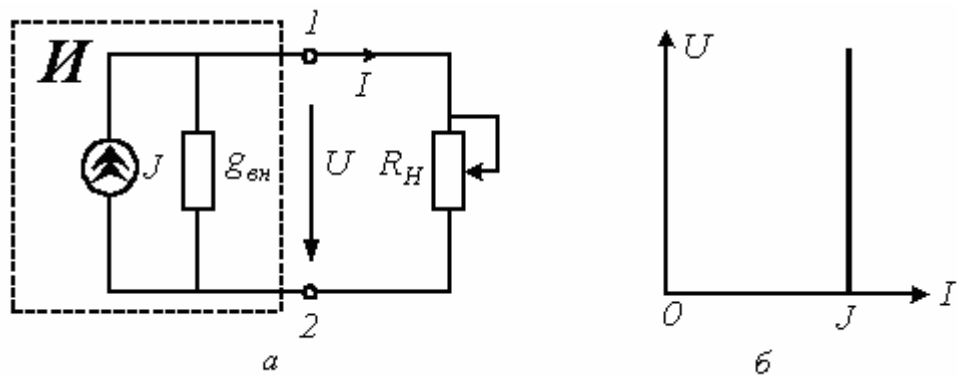


Рисунок 6 - Параллельная схема замещения источника энергии и его характеристика

Отметим, что в расчетном плане при выполнении условия  $E = IR_{\text{эн}}$  последовательная и параллельная схемы замещения источника являются эквивалентными. Однако в энергетическом отношении они различны, поскольку в режиме холостого хода для последовательной схемы замещения мощность равна нулю, а для параллельной – нет.

Кроме отмеченных режимов функционирования источника, на практике важное значение имеет согласованный режим работы, при котором нагрузкой  $R_{\text{н}}$  от источника потребляется максимальная мощность

$$P_{\text{max}} = \frac{U^2}{4R_{\text{эн}}}, \quad (1.8)$$

Условие такого режима

$$R_{\text{н}} = R_{\text{эн}}, \quad (1.9)$$

В заключение отметим, что в соответствии с ВАХ на рисунках 5,б и 6,б идеальные источники ЭДС и тока являются источниками бесконечно большой мощности.

### 1.1.3 Режимы работы электрической цепи

Режим работы электрической цепи, т.е. ее электрическое состояние, определяется значениями токов, напряжений и мощностей ее отдельных элементов.

В электрических цепях различают номинальный, рабочий режимы и режимы холостого хода и короткого замыкания.

**Номинальный режим.** Источники и приемники электрической энергии, провода, а также вспомогательные аппараты и приборы характеризуются номинальными величинами тока, напряжения и мощности и т.д., на которые эти устройства рассчитаны заводами-изготовителями для нормальной работы. Номинальные величины обычно указываются в паспорте устройства.

Режим работы, при котором действительные токи, напряжения, мощности элементов электрической цепи соответствуют их номинальным величинам, называются **номинальным** (нормальным).

Отклонение от номинального режима нежелательно, а превышение номинальных величин в большинстве случаев недопустимо, так как при этом не могут быть гарантированы расчетные продолжительность и экономичность работы электрических устройств и установок.

Для обеспечения нормальных условий работы приемников электрической энергии необходимо соблюдать соответствие напряжений:

действительное напряжение на зажимах устройства должно быть равно его номинальному напряжению.

**Рабочий режим.** Режимы электрической цепи по различным причинам могут отличаться от номинального.

Если в электрической цепи действительные характеристики режима отличаются от номинальных величин ее элементов, но отклонения находятся в допустимых пределах, то режим называется рабочим. На рисунке 7 сопротивление соединительных проводов отнесено к приемнику.

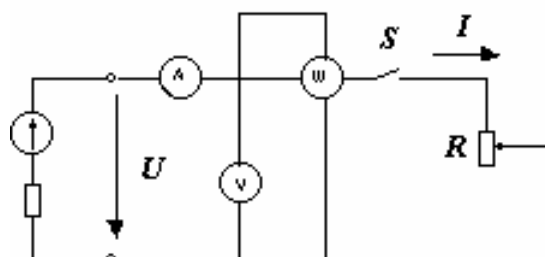


Рисунок 7 – Измерительная схема

Применяя к этой цепи закон сохранения энергии, можно составить уравнение энергетического баланса за некоторое время:

$$W_u - W_o = W_n \quad (1.10)$$

где  $W_u = EIt$  - энергия источника;

$W_n = I^2 R t$  - энергия приемника;

$W_o = I^2 r t$  - энергия потерь в источнике.

В этом случае энергетический баланс имеет вид

$$EIt = I^2 r t + I^2 R t \quad (1.11)$$

После сокращения на  $t$  получим уравнение баланса мощностей

$$EI = I^2 r + I^2 R \quad (1.12)$$

Далее, сокращая на  $I$ , получаем уравнение баланса напряжений

$$EI = Ir + IR \quad \text{или} \quad E = U_o + U \quad (1.13)$$

где  $U_o$  - внутреннее падение напряжения в источнике;

$U$  - напряжение на внешних зажимах источника.

Ток в цепи

$$I = E / (r + R) \quad (1.14)$$



Эта формула является выражением закона Ома для простейшей цепи.

Напряжение  $U$  на внешних зажимах источника, равное в этом случае напряжению на приемнике, меньше ЭДС источника на величину внутреннего падения напряжения  $Ir$ :

$$U = IR = E - Ir \quad (1.15)$$

Отношение мощности  $P_{II}$  приемника к мощности  $P_{II}$  источника называется *коэффициентом полезного действия источника*:

$$\eta = P_{II} / P_{II} \quad (1.16)$$

КПД источника можно определить отношением напряжения на зажимах источника к его ЭДС:

$$\eta = P_{II} / P_{II} = UI / EI = U / E \quad (1.17)$$

При равенстве сопротивления нагрузки внутреннему сопротивлению источника (*режим согласованной нагрузки*), на потребителе выделяется максимальная мощность, однако, при максимальной отдаче КПД цепи  $\eta = 50\%$ .

**Режимы холостого хода и короткого замыкания.** При  $R = \infty$  тока в цепи не будет. Этот случай соответствует размыканию цепи. Режим электрической цепи или отдельных источников, при котором ток в них равен нулю, называется *режимом холостого хода*. При холостом ходе напряжение на внешних зажимах источника равно его ЭДС

$$U = E \quad (1.18)$$

При  $R = 0$ , согласно выражению  $I = E / r = I_k$ , а напряжение на зажимах приемника и источника  $U = 0$ .

Режим электрической цепи, при котором накоротко замкнут участок с одним или несколькими элементами, в связи, с чем напряжение на этом участке равно нулю, называется *режимом короткого замыкания*. Соответственно ток  $I_k$  в цепи называется током короткого замыкания.

Короткое замыкание в электрических установках нежелательно, так как токи короткого замыкания, как правило, в несколько раз превышают номинальные величины, что ведет к резкому увеличению выделения теплоты в токоведущих частях и, следовательно, к порче электрических установок.

Напряжение на зажимах источника уменьшается от  $U = E$  до  $U = 0$ , если ток нагрузки увеличивается от нуля до тока короткого замыкания  $I_k$ .

Энергетические процессы в цепях переменного тока зависят от наличия реактивных сопротивлений: катушек индуктивности,

конденсаторов и характеризуются активной мощностью  $P=UI\cos\varphi$  и реактивной мощностью  $Q=UI\sin\varphi$ . Часть электрической энергии, подводимой от генератора преобразуется в другие виды энергии, а часть энергии затрачивается на создание магнитного (в катушках индуктивности) или электрического поля (в конденсаторах).

Если реактивная мощность электрической цепи не равна нулю, то  $\cos\varphi < 1$ . В электрической цепи переменного тока, в которой имеются катушка индуктивности и конденсатор, включенные последовательно или параллельно, общая реактивная мощность всегда меньше, чем реактивная мощность каждого элемента. В этом случае говорят о компенсации реактивной мощности катушки реактивной мощностью конденсатора, т.к.  $Q_L$  и  $Q_C$  имеют противоположные знаки. Полная компенсация реактивной мощности возможна при резонансе.

Компенсация реактивной мощности в электрических цепях имеет большое технико-экономическое значение. Ток в приемнике, а следовательно, и в проводах, соединяющих его с источником энергии, при этих условиях зависит от величины реактивной мощности  $Q$ :

$$I = \frac{S}{U} = \frac{\sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}}{U} \quad (1.19)$$

Чем больше реактивная мощность приемника, тем больший ток должен быть в самом приемнике, в генераторе, соединительных проводах, трансформаторе и других элементах сети электроснабжения.

Мощность тепловых потерь, согласно закону Джоуля-Ленца, пропорциональна квадрату тока и сопротивлению проводов:

$$\Delta P = I^2 R \quad (1.20)$$

Очевидно, что чем больше ток приемника, тем больше потери энергии во всех элементах электрической цепи. Наиболее полное использование генераторов и трансформаторов соответствует режиму работы с номинальным током при номинальном напряжении.

Реактивную мощность установок, потребляющих электрическую энергию необходимо сокращать. На практике это достигается путем правильного выбора мощности электродвигателей, трансформаторов, рациональной эксплуатации их без недогрузки и работы вхолостую, а также компенсацией с помощью конденсаторов. Для этого параллельно к приемникам подключают конденсаторные батареи.

### Контрольные вопросы

1. Какие схемы замещения источников энергии существуют?
2. Какой источник энергии называют идеальным?

3. Может ли внешняя характеристик источника проходить через начало координат?
4. Какой режим (холостой ход или короткое замыкание) является аварийным для источника тока?
5. В чем заключаются эквивалентность и различие последовательной и параллельной схем замещения источника?

## 1.2 Методы анализа цепей постоянного тока

### 1.2.1 Метод эквивалентных преобразований

Рассматривая цепи с одним источником энергии и пассивными (не имеющим ЭДС) приемниками, нужно уяснить принципиальное различие между последовательным и параллельным способами соединения элементов. При последовательном соединении по всей замкнутой цепи циркулирует один и тоже ток. Напряжение источника делится между приемниками прямо пропорционально их сопротивлениям. Общее сопротивление внешней цепи равно сумме сопротивлений всех приемников.

При параллельном соединении приемники находятся под одинаковым напряжением. Ток источника делится между приемниками прямо пропорционально их проводимостям (обратно пропорционально сопротивлениям).

Метод эквивалентных преобразований основан на замене двухполюсника одного вида на двухполюсник другого вида.

Двухполюсники на рисунке 8 будут эквивалентными, если

$$R_{\text{эк}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (1.21)$$

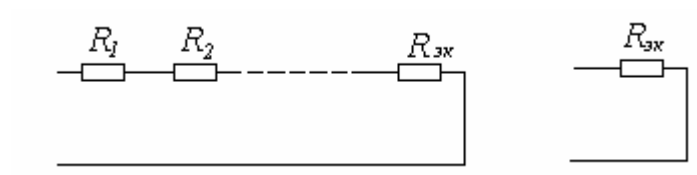


Рисунок 8 - Эквивалентное преобразование последовательного соединения сопротивлений

Эквивалентные преобразования двухполюсников на рисунке 9 определяет отношение

$$\frac{1}{R_{\text{эк}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (1.22)$$

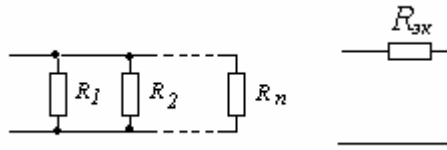


Рисунок 9 - Эквивалентное преобразование параллельного соединения сопротивлений

В случае  $n=2$   $\frac{1}{R_{\text{эк}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ , откуда  $R_{\text{эк}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ .

Если  $n=3$   $\frac{1}{R_{\text{эк}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ , откуда  $R_{\text{эк}} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}$ .

Схему сложной цепи, состоящую из последовательно и параллельно соединенных ветвей, можно преобразовать в простейшую схему с одним приемником и по ней рассчитать общий ток цепи, поступающий от источника энергии. Затем, возвращаясь постепенно к исходной схеме, можно рассчитать напряжения и токи во всех элементах цепи.

При расчетах электрических цепей необходимо учитывать, что реальный источник электрической энергии обладает не только ЭДС, но и внутренним сопротивлением. ЭДС источника компенсирует падение напряжения как на внешнем сопротивлении  $R$ , которым обладает приемник, так и на внутреннем сопротивлении  $r$ .

$$E = I \cdot R + I \cdot r,$$

откуда  $I = \frac{E}{R + r}$ .

Так как напряжение  $U = I \cdot R$ , то  $U = E - I \cdot r$ .

Параметры  $E$  и  $r$  указываются на эквивалентной схеме источника энергии рисунок 10:

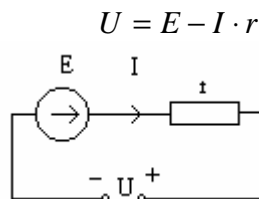


Рисунок 10 – Схема замещения источника ЭДС

Такой же эквивалентной схемой отображают активный приемник энергии (заряжающийся аккумулятор, электродвигатель) рисунок 11. В отличие от источника у активного приемника ЭДС меньше приложенного напряжения, а потребляемый ток направлен навстречу ЭДС:

$$U = E + I \cdot r$$

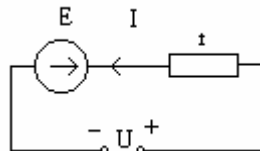


Рисунок 11 – Схема замещения активного приемника

При решении задач часто используется преобразование треугольник-звезда (рисунок 12).

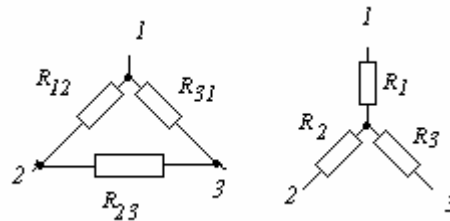


Рис. 12 Эквивалентное преобразование треугольника в звезду и звезды в треугольник

Формулы эквивалентных преобразований имеют вид:  
Сопrotивления лучей звезды

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Сопrotивления треугольника

$$g_{12} = \frac{g_1 \cdot g_2}{g_1 + g_2 + g_3}$$

$$g_{23} = \frac{g_2 \cdot g_3}{g_1 + g_2 + g_3} \quad (1.24)$$

$$g_{31} = \frac{g_3 \cdot g_1}{g_1 + g_2 + g_3}$$

где,  $g_{12}$ ,  $g_{23}$ ,  $g_{31}$  - проводимости сторон треугольника.

Двухполюсники, в которых есть источники ЭДС и (или) тока, называются активными (рисунок 13).

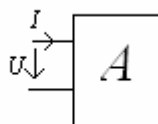


Рисунок 13 - Активный двухполюсник

Двухполюсники на рисунке 14 эквивалентны, если имеют одинаковые внешние характеристики  $U(I)$ .

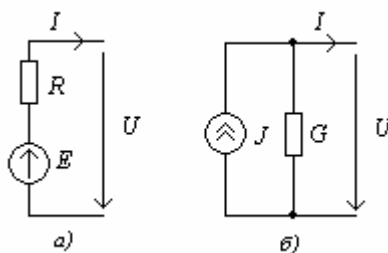


Рисунок 14 - Эквивалентные двухполюсники

Для двухполюсника по схеме рисунке 14 *a* имеем

$$U = E - RI \quad (1.25)$$

Внешняя характеристика двухполюсника по схеме рисунка 14 *б* определяется из уравнения

$$-J + I + GU = 0 \quad (1.26)$$

откуда

$$U = \frac{J}{G} - \frac{1}{G}I \quad (1.27)$$

Двухполюсники эквивалентны, если

$$E = \frac{J}{G}; R = \frac{1}{G} \quad (1.28)$$

Для расчета сложных цепей, имеющих узловые точки, замкнутые контуры и несколько ЭДС, применяют законы Кирхгофа. Согласно первому закону Кирхгофа, сумма токов, подходящих к узловой точке, равна сумме отходящих токов; согласно второму закону, алгебраическая сумма ЭДС в замкнутом контуре равна алгебраической сумме падений напряжений.

**Пример 1.1**

Преобразуя схему (рисунок 15), рассчитать напряжение и токи во всех участках цепи.  $R_1=2$  Ом,  $R_2=6$  Ом,  $R_3=8$  Ом,  $R_4=4$  Ом,  $U=36$  В.

**Решение.**

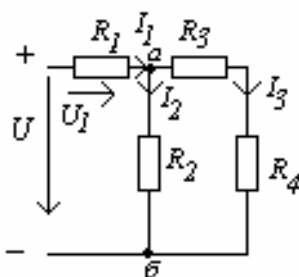


Рисунок 15 – Расчетная схема

Упрощение схемы (рисунок 16) с применением эквивалентных преобразований:

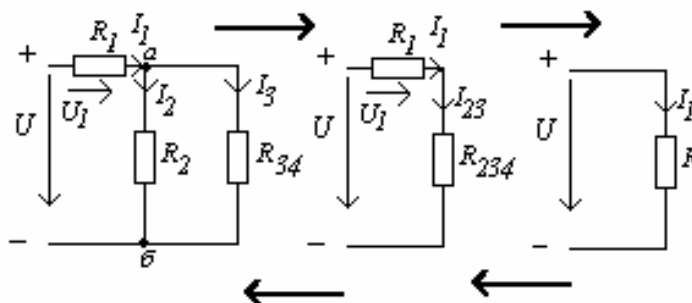


Рисунок 16 – Упрощенные схемы

Расчет схемы:

### Расчет эквивалентных сопротивлений

$$R_{3,4} = R_3 + R_4 = 8 + 4 = 12 \text{ Ом}$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3},$$

$$R_{AB} = \frac{R_2 \cdot R_{3,4}}{R_2 + R_{3,4}} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = 4 \text{ Ом}$$

$$R = R_1 + R_{AB} = 2 + 4 = 6 \text{ Ом}$$

### Расчет токов и напряжений

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{36}{6} = 6 \text{ А}$$

$$U_{AB} = I_1 \cdot R_{AB} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ В}$$

$$I_{3,4} = \frac{U_{AB}}{R_{3,4}} = \frac{12}{12} = 1 \text{ А}$$

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} = \frac{12}{6} = 2 \text{ А}$$

$$U_1 = I_1 R_1 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ В}$$

$$U_3 = I_{3,4} R_3 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ В}$$

$$U_4 = I_{3,4} R_4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ В}$$

### Пример 1.2

Рассчитать и построить внешнюю характеристику источника энергии имеющего:  $E = 100 \text{ В}$  и  $r = 2 \text{ Ом}$ .

#### Решение.

$$U = E - I \cdot r$$

1. Пусть  $I = 0$ , тогда  $U = E = 100 \text{ В}$ .

2. Пусть  $U = 0$  (короткое замыкание), тогда

$$I = I_k = \frac{E}{r} = \frac{100}{2} = 50 \text{ А}$$

3. По полученным координатам наносим точки и строим внешнюю характеристику рисунок 17.

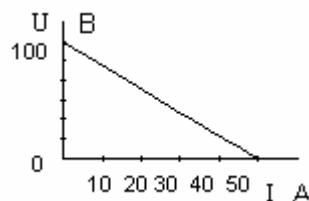


Рисунок 17 - Внешняя характеристика источника энергии



### Пример 1.3

Найти токи в ветвях и напряжение  $U_{ab}$  в цепи по схеме рисунка 18.

Напряжение  $U=75$  В. Параметры цепи:  $R_1=50$  Ом;  $R_{21}=20$  Ом;  $R_{22}=30$  Ом;  $R_{31}=30$  Ом;  $R_{32}=20$  Ом.

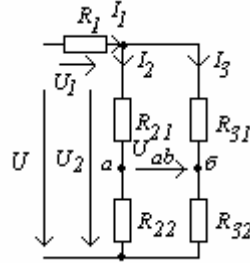


Рисунок 18- Расчетная схема

### Решение.

Определяем положительные направления токов ветвей (рисунок 18).

В ветвях с токами  $I_2$  и  $I_3$  резисторы  $R_{21}$ ,  $R_{22}$  и  $R_{31}$ ,  $R_{32}$  соединены последовательно.

Следовательно,

$$R_2 = R_{21} + R_{22} = 50 \text{ Ом};$$

$$R_3 = R_{31} + R_{32} = 50 \text{ Ом}.$$

Участки  $R_2$ ,  $R_3$  соединены параллельно, поэтому

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{50 \cdot 50}{50 + 50} = 25 \text{ Ом}.$$

Электрическую цепь, состоящую из двух последовательно соединенных резисторов, называют делителем напряжения.

Рассчитываем делитель напряжения  $R_1$ ,  $R_{23}$ .

Токи и напряжения делителя определяются по выражениям:

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_{23}} = \frac{75}{50 + 25} = 1 \text{ А};$$

$$U_1 = I_1 R_1 = 1 \cdot 50 = 50 \text{ В};$$

$$U_2 = I_1 R_{23} = 1 \cdot 25 = 25 \text{ В};$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{25}{50} = 0,5 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_2}{R_3} = \frac{25}{50} = 0,5 \text{ А}.$$

Напряжение  $U_{ab}$  находим по второму закону Кирхгофа

$$U_{ab} = I_2 R_{22} - I_3 R_{32}.$$

Получаем

$$U_{ab} = 0,5 \cdot 30 - 0,5 \cdot 20 = 50 \text{ В.}$$

### Пример 1.4

Найти ток в ветви  $a$ - $b$  цепи по схеме рисунка 19. Параметры цепи:  $R_1=47 \text{ Ом}$ ;  $R_2=75 \text{ Ом}$ ;  $R_3=33 \text{ Ом}$ ;  $R_4=25 \text{ Ом}$ ;  $R_5=40 \text{ Ом}$ . Напряжение  $U=100 \text{ В}$ .

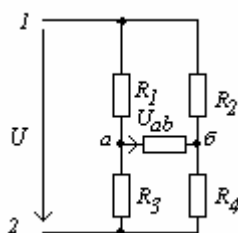


Рисунок 19 – Расчетная схема

### Решение.

Определяем положительное направление тока  $I$  ветви  $a$ - $b$ . Преобразуем треугольник из резисторов  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  в звезду  $R_{35}$ ,  $R_{45}$ ,  $R_{34}$ . По формулам эквивалентных преобразований имеем:

$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{33 \cdot 25}{33 + 25 + 40} = 8,42 \text{ Ом}$$

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{25 \cdot 40}{33 + 25 + 40} = 10,2 \text{ Ом}$$

$$R_{35} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{33 \cdot 40}{33 + 25 + 40} = 13,47 \text{ Ом}$$

Получаем схему замещения (рисунок 20).

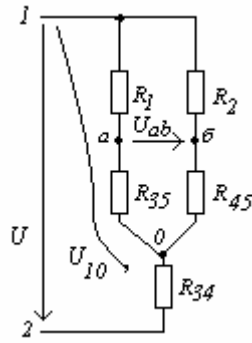


Рисунок 20- Схема замещения

Определяем эквивалентные сопротивления последовательно и параллельно соединенных участков:

$$R_{135} = R_1 + R_{35} = 60,47 \text{ Ом};$$

$$R_{245} = R_2 + R_{45} = 85,2 \text{ Ом};$$

$$R_{10} = \frac{R_{135} R_{245}}{R_{135} + R_{245}} = \frac{60,47 \cdot 85,2}{60,47 + 85,2} = 35,7 \text{ Ом}.$$

Рассчитываем делитель напряжения  $R_{10}$ ,  $R_{34}$ . Напряжение

$$U_{10} = \frac{U \cdot R_{10}}{R_{10} + R_{34}} = \frac{100 \cdot 35,7}{35,7 + 8,42} = 80,92 \text{ В}.$$

Рассчитываем делители  $R_1 - R_{35}$ ;  $R_2 - R_{45}$  и определяем

$$U_{ab} = U_{10} \left( \frac{R_{35}}{R_{135}} - \frac{R_{45}}{R_{245}} \right) = 8,32 \text{ В}$$

Ток в ветви а -b находим по закону Ома:

$$I = \frac{U_{ab}}{R_5} = \frac{8,32}{40} = 0,208 \text{ А}.$$

### Пример 1.5

Выполнить эквивалентные преобразования для двухполюсника (схема на рисунке 21). Параметры резисторов двухполюсника:  $R_1 = 75 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ . Источники:  $E_1 = 30 \text{ В}$ ;  $J_1 = 1 \text{ А}$ .

### Решение.

Этапы выполнения преобразований поясняет рисунок 22.

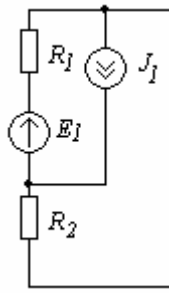


Рисунок 21- Расчетная схема

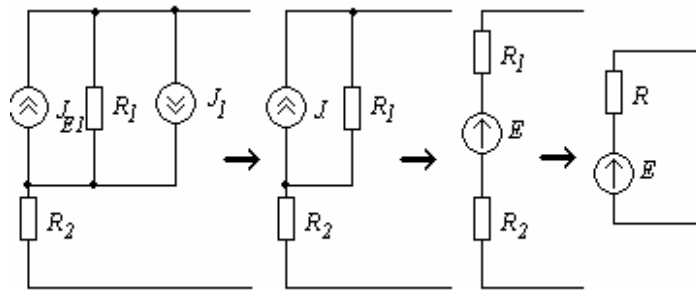


Рисунок 22 – Преобразование схемы

Расчет выполняется по формулам эквивалентных преобразований:

$$J_{E1} = E_1 / R_1 = 30 / 75 = 0,4 \text{ A};$$

$$J = J_{E1} - J_1 = -0,6 \text{ A};$$

$$E = JR_1 = -0,6 \cdot 75 = -45 \text{ B};$$

$$R = R_1 + R_2 = 125 \text{ Ом}.$$

### Пример 1.6

Методом эквивалентных преобразований рассчитать токи ветвей в цепи со схемой (рисунок 23). Параметры резисторов ветвей:  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 130 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 43 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 75 \text{ Ом}$ ;  $R_6 = 110 \text{ Ом}$ ;  $R_7 = 200 \text{ Ом}$ ;  $R_8 = 45 \text{ Ом}$ . Источники:  $E_1 = 15 \text{ B}$ ;  $E_5 = 24 \text{ B}$ ;  $E_7 = 8 \text{ B}$ ;  $J_6 = 0,2 \text{ A}$ ;  $J_7 = 0,1 \text{ A}$ .

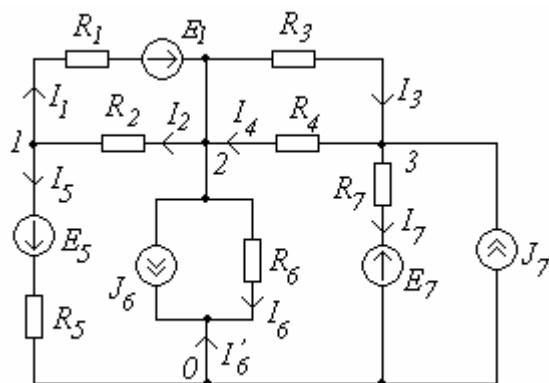


Рисунок 23 – Расчетная схема

**Решение.**

Назначаем положительные направления токов в ветвях. Узлы схемы отмечаем цифрами 1, 2, 3 и 0.

Выполняем эквивалентные преобразования для двухполюсника между узлами 1-2 (рисунок 24).

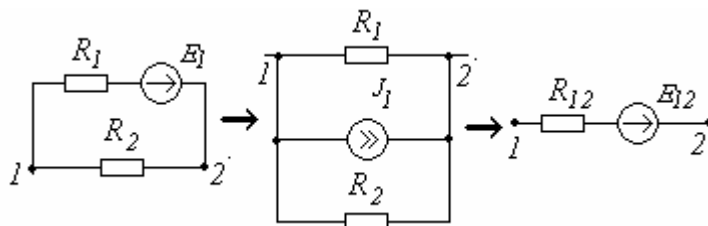


Рисунок 24 Схема преобразования двухполюсника между узлами 1-2

Находим:

$$J_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ А};$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 130}{100 + 130} = 56,52 \text{ Ом};$$

$$E_{12} = J_1 R_{12} = 0,15 \cdot 56,52 = 8,48 \text{ В}.$$

Между узлами 2-3 резисторы соединены параллельно, поэтому

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{43 \cdot 75}{43 + 75} = 27,33 \text{ Ом}.$$

Получаем схему (рисунок 25):

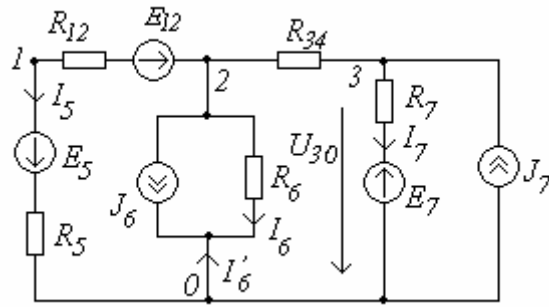


Рисунок 25 – Схема после преобразования двухполюсника 1-2

Преобразование для двухполюсника между узлами 3-0 поясняет рисунок 26:

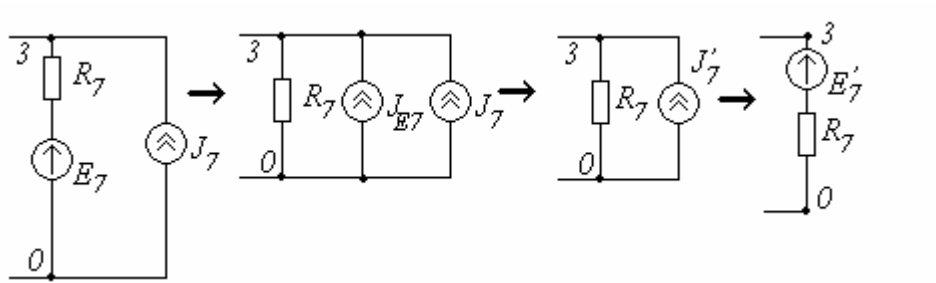


Рисунок 26 - Схема преобразования двухполюсника между узлами 3-0

Находим:

$$J_{E7} = \frac{E_7}{R_7} = \frac{8}{200} = 0,04 \text{ A};$$

$$J'_7 = J_{E7} + J_7 = 0,04 + 0,1 = 0,14 \text{ A};$$

$$E'_7 = J'_7 R_7 = 0,14 \cdot 200 = 28 \text{ В}.$$

Получаем эквивалентную схему рисунок 27:

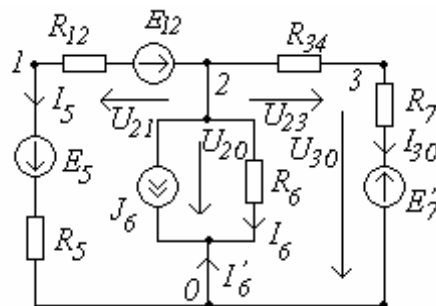


Рисунок 27 - Схема после преобразования двухполюсника 3-0

Ветви на участках 2-1; 1-0 соединены последовательно. Сопротивление этой ветви составит:

$$R_{125} = R_{12} + R_5 = 56,52 + 91 = 147,52 \text{ Ом.}$$

ЭДС этой ветви:

$$E_{125} = E_{12} - E_5 = 8,48 - 24 = -15,52 \text{ В.}$$

Ветви на участках 2-3, 3-0 соединены последовательно. Сопротивление

$$R_{347} = R_{34} + R_7 = 27633 + 200 = 227,33 \text{ Ом.}$$

Получаем двухполюсник с двумя узлами (рисунок 28).

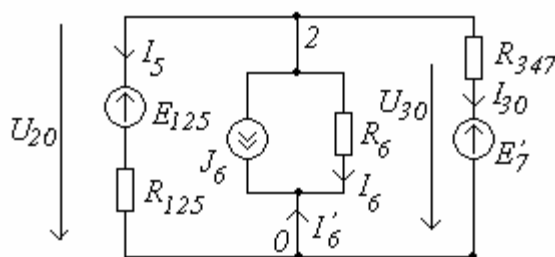


Рисунок 28 - Схема после преобразования

Рассчитываем напряжение  $U_{20}$ .

Рассчитаем схему методом узловых потенциалов:

$$G_{22}U_{20} = J_{22} \text{ ,}$$

где  $G_{22} = \frac{1}{R_{125}} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}$  собственная проводимость ветвей, принадлежащих узлу 2;

$$J_{22} = \frac{E_{125}}{R_{125}} - J_6 + \frac{E_7}{R_7} \text{ узловой ток.}$$

Подставляем данные:

$$G_{22} = \frac{1}{147,52} + \frac{1}{110} + \frac{1}{200} = 0,021 \text{ См,}$$

$$J_{22} = \frac{-15,52}{147,52} - 0,2 + \frac{8}{200} = -0,182 \text{ А.}$$

Напряжение

$$U_{20} = \frac{-0,185}{0,02} = -8,982 \text{ В.}$$

Рассчитываем токи:

$$I_5 = \frac{U_{20} - E_{125}}{R_{125}} = \frac{-8,982 - (-15,52)}{147,52} = 0,044 \text{ А;}$$

$$I_6 = \frac{U_{20}}{R_6} = \frac{-8,982}{110} = -0,082 \text{ А;}$$

$$I_{30} = \frac{U_{20} - E'_7}{R_{347}} = \frac{-8,982 - 28}{227,33} = -0,163 \text{ А.}$$

Ток  $I'_6$  определяем по закону Кирхгофа:

$$I_6 + I'_6 + J_6 = 0 ,$$

Откуда

$$I'_6 = -I_6 - J_6 = -0,082 - 0,2 = -0,282 \text{ А.}$$

Рассчитываем напряжения  $U_{21}$ ,  $U_{23}$  и  $U_{30}$  (рисунок 27).

Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$U_{21} - I_5 R_{12} = E_{12} ,$$

Откуда

$$U_{21} = I_5 R_{12} + E_{12} = 0,044 \cdot 56,52 + 8,48 = 10,967 \text{ В.}$$

Напряжение:

$$U_{23} = I_{30} R_{34} = -0,163 \cdot 27,33 = -4,446 \text{ В;}$$

$$U_{30} = U_{20} - U_{23} = -8,982 - (-4,446) = -4,536 \text{ В.}$$

Рассчитываем токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_7$  (рисунок 23).

По второму закону Кирхгофа имеем:

$$U_{21} + I_1 R_1 = E_1$$



Откуда

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{21}}{R_1} = \frac{15 - 10,967}{100} = 0,04 \text{ A.}$$

По закону Ома:

$$I_2 = \frac{U_{21}}{R_2} = \frac{-10,967}{130} = 0,084 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = \frac{-4,446}{43} = -0,103 \text{ A};$$

$$I_4 = -\frac{U_{23}}{R_4} = -\frac{-10,967}{75} = 0,059 \text{ A.}$$

По второму закону Кирхгофа имеем

$$I_7 R_7 - U_{30} = -E_7,$$

откуда

$$I_7 = \frac{U_{30} - E_7}{R_7} = \frac{-4,536 - 8}{200} = -0,063 \text{ A.}$$

Выполняем проверку правильности решения. Рассчитываем баланс мощностей.

Мощность источников определяется из выражения:

$$\begin{aligned} P_{ист} &= E_5 I_5 + E_1 I_1 - E_7 I_7 - U_{20} J_6 + U_{30} J_7 = \\ &= 24 \cdot 0,044 + 15 \cdot 0,04 - 8 \cdot (-0,063) - (-8,982)0,2 + (-4,536)0,1 = 3,511 \text{ Вт} \end{aligned}$$

Мощность, рассеиваемая в резисторах:

$$\begin{aligned} P_R &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7 = \\ &= 0,04^2 \cdot 100 + 0,084^2 \cdot 130 + (-0,103)^2 \cdot 43 + 0,059^2 \cdot 75 + 0,044^2 \cdot 91 + \\ &+ (-0,082)^2 \cdot 110 + (-0,063)^2 \cdot 200 = 3,511 \text{ Вт} \end{aligned}$$

Получаем  $P_{ист} = P_R$ , задача решена, верно.

## 1.2.2 Метод уравнений Кирхгофа

Разветвленные цепи (рисунок 29) с несколькими ЭДС рассчитываются при помощи первого и второго законов Кирхгофа.

### Пример 1.7

В схеме  $E_1=32$  В;  $E_2=25$  В;  $R_1=7$  Ом;  $R_2=5$  Ом;  $R_3=8$  Ом;  $R_4=6$  Ом;  $R_5=13$  Ом;  $R_6=11$  Ом.

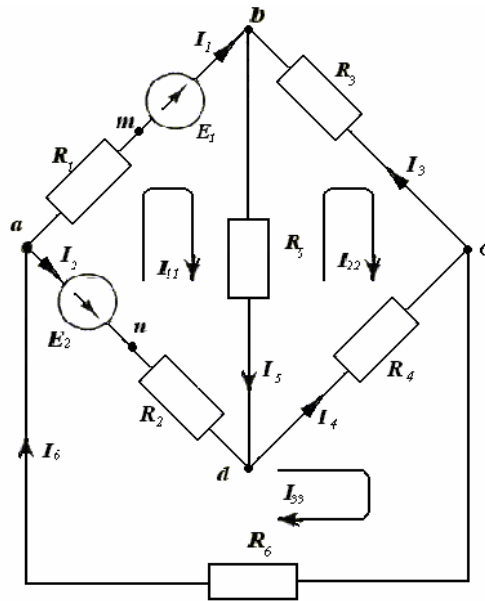


Рисунок 29 – Расчетная схема

**Решение.**

1. Намечаем произвольно направления токов во всех ветвях (рисунок 29).

2. Составляем уравнения по первому закону Кирхгофа. Число их в общем случае на единицу меньше числа узлов (для рассматриваемой схемы с четырьмя узлами нужно составить три таких уравнения):

$$\begin{aligned}
 I_6 - I_1 - I_2 &= 0 \text{ - для узла } a; \\
 I_1 + I_3 - I_5 &= 0 \text{ - для узла } b; \\
 -I_3 + I_4 - I_6 &= 0 \text{ - для узла } c;
 \end{aligned}
 \tag{1.29}$$

3. Выбираем произвольно направление обхода каждого контура цепи (например, по часовой стрелке) и составляем уравнения по второму закону Кирхгофа. Контур, для которых составляются уравнения, нужно выбрать так, чтобы каждый из них включал в себя хотя бы одну ветвь, не вошедшую в другие контуры. Только при этом условии уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа, будут независимыми друг от друга. Поэтому и контуры, выбранные с соблюдением приведенного выше условия, принято называть независимыми. Таким образом, число уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, должно быть равно числу независимых контуров:

$$\begin{aligned}
 I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_2 R_2 &= E_1 - E_2 \text{ — для контура } abda \\
 -I_5 R_5 - I_3 R_3 - I_4 R_4 &= 0 \text{ — для контура } abcd
 \end{aligned}
 \tag{1.30}$$

$$I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_6 R_6 = E_2 \quad \text{— для контура } abca$$

В этих уравнениях все ЭДС и токи, совпадающие с направлением обхода, записываются со знаком плюс; ЭДС и токи, направленные навстречу обходу — со знаком минус. Как видно из данного примера, общее число уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа, равно числу неизвестных токов, т. е. числу ветвей.

Полученная система примет вид:

$$\begin{cases} I_6 - I_1 - I_2 = 0 \\ I_1 + I_3 - I_5 = 0 \\ -I_3 + I_4 - I_6 = 0 \\ I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_2 R_2 = E_1 - E_2 \\ -I_5 R_5 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0 \\ I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_6 R_6 = E_2 \end{cases} \quad (1.31)$$

Подставляем значения сопротивлений и ЭДС:

$$\begin{cases} I_6 - I_1 - I_2 = 0 \\ I_1 + I_3 - I_5 = 0 \\ -I_3 + I_4 - I_6 = 0 \\ I_1 \cdot 7 + I_5 \cdot 13 - I_2 \cdot 5 = 32 - 25 \\ -I_5 \cdot 5 - I_3 \cdot 8 - I_4 \cdot 6 = 0 \\ I_2 \cdot 5 + I_4 \cdot 6 + I_6 \cdot 11 = 25 \end{cases}$$

Составляем матрицы коэффициентов и вычисляем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -8777 \quad \Delta 1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -5 & 0 \\ 25 & 5 & 0 & 6 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -9231$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 7 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 6 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -4910 \quad \Delta 3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 7 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 6 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 7587$$

$$\Delta 4 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 0 & 7 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 25 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -6554 \quad \Delta 5 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 25 & 11 \end{vmatrix} = -1644$$

$$\Delta 6 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 25 \end{vmatrix} = -14140$$

Решив полученную систему шести уравнений с шестью неизвестными, определим искомые токи:

$$I_1 = \frac{\Delta 1}{\Delta} \text{ A}; I_2 = \frac{\Delta 2}{\Delta} \text{ A}; I_3 = \frac{\Delta 3}{\Delta} \text{ A}; I_4 = \frac{\Delta 4}{\Delta} \text{ A}; I_5 = \frac{\Delta 5}{\Delta} \text{ A}; I_6 = \frac{\Delta 6}{\Delta} \text{ A};$$

$$I_1 = \frac{-9231}{-8777} = 1,052 \text{ A}; I_2 = \frac{-4910}{-8777} = 0,559 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{7587}{-8777} = -0,864 \text{ A}; I_4 = \frac{-6554}{-8777} = 0,747 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{-1644}{-8777} = 0,187 \text{ A}; I_6 = \frac{-14140}{-8777} = 1,611 \text{ A}.$$

Если какой-либо ток в результате расчета получился отрицательным, то это означает, что его действительное направление противоположно выбранному в п. 1.

Рассмотренный метод расчета в подавляющем большинстве случаев является достаточно громоздким и потому практически нецелесообразным. Задача значительно упрощается при использовании метода контурных токов и метода узловых потенциалов, в основу которых также положены уравнения Кирхгофа.

### 1.2.3 Метод контурных токов

1. Приписываем каждому контуру свой ток:  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  и выбираем произвольно направление каждого из них. На рисунке 29 все контурные токи направлены по часовой стрелке. Значения контурных токов должны быть равны по абсолютной величине значениям токов в несмежных ветвях, т. е.

$$I_{11}=I_1; I_{22}=-I_3; I_{33}=I_6.$$

Тогда токи во всех ветвях схемы определяются из выражений (1.29):

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11}; & I_2 &= I_6 - I_1 = I_{33} - I_{11}; \\ I_3 &= -I_{22}; & I_4 &= I_3 + I_6 = I_{33} - I_{22}; \\ I_5 &= I_1 + I_3 = I_{11} - I_{22}; & I_6 &= I_{33} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Таким образом, при использовании метода контурных токов уравнения, составленные по 1-му закону Кирхгофа, обращаются в тождества, т. е. этот закон удовлетворяется при любых значениях контурных токов. Значит, для решения задачи этим методом достаточно уравнений, составленных по 2-му закону Кирхгофа.

2. Составляем уравнения по 2-му закону Кирхгофа для контурных токов. Для этого подставим в первое из уравнений (1.30) значения токов в ветвях, приведенные в уравнениях (1.32):

$$I_{11}R_1 + (I_{11} - I_{22})R_5 - (I_{33} - I_{11})R_2 = E_1 - E_2 \quad (1.33)$$

Перегруппировав слагаемые в этом выражении, и сделав соответствующие преобразования с остальными уравнениями системы (1.30), получим уравнения для метода контурных токов:

$$\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_5 + R_2) - I_{22}R_5 - I_{33}R_2 &= E_1 - E_2 \\ I_{22}(R_5 + R_3 + R_4) - I_{11}R_5 - I_{33}R_4 &= 0 \\ I_{33}(R_2 + R_4 + R_6) - I_{11}R_2 - I_{22}R_4 &= E_2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Подставляя заданные значения э.д.с. и сопротивлений, получим:

$$\begin{aligned} I_{11} \cdot 25 - I_{22} \cdot 13 - I_{33} \cdot 5 &= 7 \\ -I_{11} \cdot 13 + I_{22} \cdot 27 - I_{33} \cdot 6 &= 0 \\ -I_{11} \cdot 5 - I_{22} \cdot 6 + I_{33} \cdot 22 &= 25 \end{aligned}$$

Совместное решение этих уравнений дает следующие значения контурных токов:

$$I_{11} = 1.05 \text{ A}; \quad I_{22} = 0.864 \text{ A}; \quad I_{33} = 1.64 \text{ A};$$

Значения токов в ветвях определяем из выражения (1.31):

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} = 1.05 \text{ A}; & I_2 &= I_{33} - I_{11} = 0.56 \text{ A}; & I_3 &= -I_{22} = -0.864 \text{ A}; \\ I_4 &= I_{33} - I_{22} = 0.746 \text{ A}; & I_5 &= I_{11} - I_{22} = 0.186 \text{ A}; & I_6 &= I_{33} = 1.61 \text{ A}. \end{aligned}$$

Знак минус перед током  $I_3$  показывает, что действительное его направление противоположно выбранному. Метод контурных токов позволяет уменьшить число уравнений, необходимых для решения задачи, до числа независимых контуров.

#### 1.2.4 Метод узловых потенциалов

Если бы были известны потенциалы отдельных узлов, то ток в каждой ветви можно было бы очень просто подсчитать по закону Ома:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{E_1 - U_{BA}}{R_1} = [E_1 - (\varphi_B - \varphi_A)]G_1 = (E_1 + \varphi_a - \varphi_b)G_1 \\
 I_2 &= \frac{E_2 - U_{da}}{R_2} [E_2 - (\varphi_d - \varphi_a)]G_2 = (E_2 + \varphi_a - \varphi_d)G_2 \\
 I_3 &= \frac{U_{cb}}{R_3} = [(\varphi_c - \varphi_b)]G_3 \\
 I_4 &= \frac{U_{dc}}{R_4} = [(\varphi_d - \varphi_c)]G_4 \\
 I_5 &= \frac{U_{bd}}{R_5} = [(\varphi_b - \varphi_d)]G_5 \\
 I_6 &= \frac{U_{ca}}{R_6} = [(\varphi_c - \varphi_a)]G_6
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Из этих соотношений видно, что токи в ветвях зависят от разностей потенциалов узлов, к которым эти ветви подсоединены. Это позволяет задать потенциалу одного из узлов любое числовое значение.

Порядок расчета рассматриваемой цепи методом узловых потенциалов следующий.

1. Полагаем потенциал какого-либо одного узла схемы (например, узла  $d$ ) равным нулю:  $\varphi_d = 0$ .

2. Для всех остальных узлов составляем уравнения по первому закону Кирхгофа (система уравнений (1.30)), выразив значения токов из формул (1.35). В этом случае уравнение для узла,  $a$  примет вид:  $(\varphi_c - \varphi_a)G_6 - (E_1 + \varphi_a - \varphi_b)G_1 - (E_2 + \varphi_a)G_2 = 0$ . Сгруппировав отдельно слагаемые, содержащие ЭДС и не содержащие их, и проделав такие же преобразования с остальными уравнениями системы (1.28), получим уравнения для метода узловых потенциалов:

$$\begin{cases}
 \varphi_a(G_6 + G_1 + G_2) - \varphi_b G_2 - \varphi_c G_1 - \varphi_c G_6 = -E_1 G_1 - E_2 G_2 \\
 \varphi_b(G_1 + G_3 + G_5) - \varphi_a G_1 - \varphi_c G_3 = E_1 G_1 \\
 \varphi_c(G_3 + G_4 + G_6) - \varphi_a G_6 - \varphi_b G_3 = 0
 \end{cases} \tag{1.36}$$

Обратите внимание на смысл написанных уравнений. Сумма токов, оттекающих от данного узла под влиянием его потенциала, равна сумме токов, притекающих к этому узлу под влиянием потенциалов соседних узлов и под влиянием ЭДС. Поэтому ЭДС, направленные к узлу, для которого составляется уравнение, записываются со знаком плюс, а ЭДС, направленные от этого узла, — со знаком минус.

3. Определим численные значения проводимостей и подставим их в последнюю систему уравнений:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = 0,143 \text{ См}; \quad G_2 = \frac{1}{R_2} = 0,2 \text{ См}; \quad G_3 = \frac{1}{R_3} = 0,125 \text{ См};$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = 0,167 \text{ См}; \quad G_5 = \frac{1}{R_5} = 0,077 \text{ См}; \quad G_6 = \frac{1}{R_6} = 0,091 \text{ См}.$$

$$\begin{cases} \varphi_a \cdot 0,434 - \varphi_b \cdot 0,143 - \varphi_c \cdot 0,091 = -9,56 \\ -\varphi_a \cdot 0,143 + \varphi_b \cdot 0,345 - \varphi_c \cdot 0,125 = 4,56 \\ -\varphi_a \cdot 0,091 - \varphi_b \cdot 0,125 + \varphi_c \cdot 0,383 = 0 \end{cases}$$

Совместное решение этих уравнений дает следующие значения узловых потенциалов:  $\varphi_a = -22,1 \text{ В}$ ;  $\varphi_b = 2,4 \text{ В}$ ;  $\varphi_c = -4,5 \text{ В}$ .

Тогда по уравнениям (1.35) определяем токи в ветвях:

$$I_1 = 1,07 \text{ А}; \quad I_2 = 0,58 \text{ А}; \quad I_3 = -0,861 \text{ А}; \quad I_4 = 0,751 \text{ А};$$

$$I_5 = -0,185 \text{ А}; \quad I_6 = 1,6 \text{ А}.$$

Метод узловых потенциалов позволяет уменьшить число уравнений, необходимых для решения задачи, до числа узлов без единицы.

4. Сравним результаты расчетов обоими методами и сведем в таблицу 1.

Таблица 1- Результаты расчетов двумя методами

Токи, А	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$
Метод контурных токов	1,05	0,56	-0,864	0,746	0,186	1,61
Метод узловых потенциалов	1,07	0,58	-0,861	0,751	0,185	1,6

Расхождение в результатах совпадают с достаточной точностью.

## 1.2.5 Метод активного двухполюсника

Этот метод применяется для определения тока в одной ветви.

1. Разрываем ветвь, ток в которой нужно определить, и подсчитываем напряжение между точками разрыва (напряжение холостого хода  $U_{xx}$ ). Полученная схема изображена на рисунке 30.

$$R = R_6 + R_2 + \frac{(R_3 + R_5)R_4}{R_3 + R_5 + R_4} = 16 + \frac{21 \cdot 6}{27} = 20,66 \text{ Ом}$$

$$I'_2 = \frac{E_2}{R} = \frac{25}{20,66} = 1,21 \text{ А};$$

$$I'_5 = I'_2 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_5 + R_4} = \frac{1,21 \cdot 6}{48} = 0,69 \text{ А}.$$

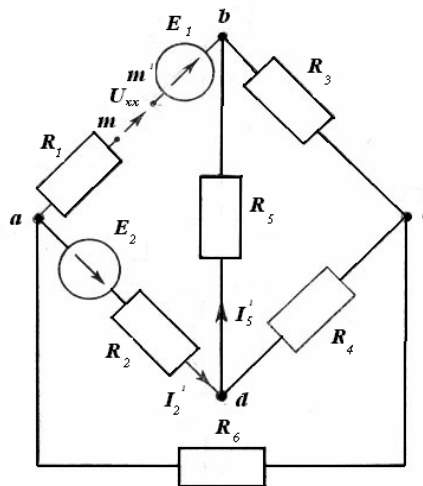


Рисунок 30 – Схема для расчета

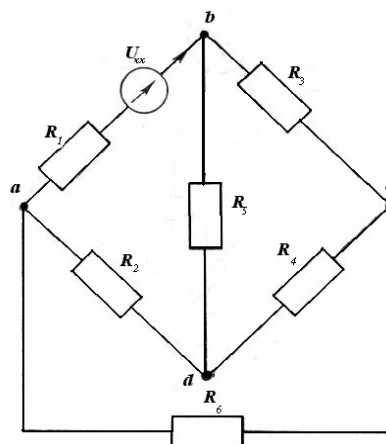


Рисунок 31- Схема для расчета после преобразования



По второму закону Кирхгофа для контура  $damm'bd$ , обходя его по часовой стрелке, подсчитаем напряжение холостого хода.

$$U_{xx} - I'_5 R_5 - I'_2 R_2 = E_1 - E_2,$$

откуда

$$U_{xx} = E_1 - E_2 + I'_5 R_5 + I'_2 R_2 = 32 - 25 + 0,269 \cdot 13 + 1,21 \cdot 5 = 16,55 \text{ В}$$

3. Замыкаем накоротко обе ЭДС, вместо разрыва вводим ЭДС, равную  $U_{xx}$  (рисунок 31). Определим входное сопротивление этой схемы (ее эквивалентное сопротивление относительно зажимов  $ab$ , к которым подключена исследуемая ветвь). Для этой цели преобразуем один из треугольников сопротивлений, например,  $R_3 R_4 R_5$  в эквивалентную звезду сопротивлений  $R_b R_c R_d$  (рисунок 32, а).

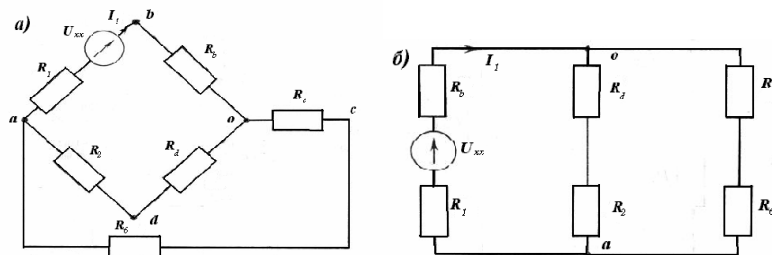


Рисунок 32 – Схема преобразования треугольника в звезду

В этой схеме:

$$R_b = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{8 \cdot 13}{27} = 3,72 \text{ Ом};$$

$$R_c = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{8 \cdot 6}{27} = 1,778 \text{ Ом};$$

$$R_d = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{6 \cdot 13}{27} = 2,89 \text{ Ом}.$$

В результате такого преобразования схема оказалась приведенной к последовательно-параллельной (рисунок 32, б). Она окажется эквивалентной схеме, изображенной на рисунке 33, при условии, что

$$\begin{aligned} R_{bx} &= R_b + \frac{(R_c + R_6)(R_d + R_2)}{R_c + R_6 + R_d + R_2} = 3,72 + \frac{(1,778 + 11)(2,89 + 5)}{20,668} = \\ &= 3,72 + 4,87 = 8,59 \text{ Ом} \end{aligned}$$

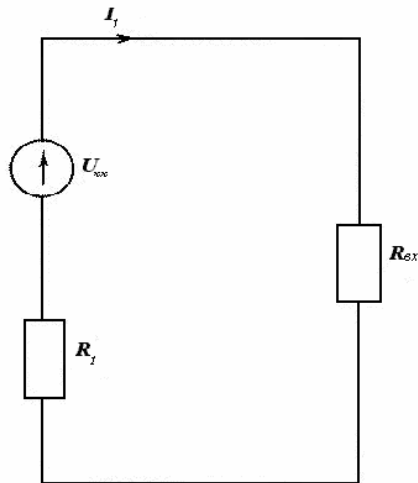


Рисунок 33 – Эквивалентная схема цепи

Тогда ток

$$I_1 = \frac{U_{xx}}{R_{\Sigma x} + R_1} = \frac{16,55}{8,59 + 7} = 1,06 \text{ A.}$$

Расчетное значение совпадает с предыдущими расчетами.

### 1.2.6 Потенциальная диаграмма

Так называют график изменения потенциала вдоль замкнутого контура.

Отложим по оси абсцисс (рисунок 34) все сопротивления контура  $dnambcd$  (см. рисунок 29), двигаясь от точки  $d$ , потенциал которой принят равным нулю. Перемещаясь вдоль этого контура, подсчитаем потенциалы всех точек. Пройдя сопротивление  $R_2$  и двигаясь навстречу току  $I_2$  (от меньшего потенциала к большему), попадаем в точку  $n$ , потенциал которой равен:

$$\varphi_n = \varphi_d + I_2 R_2 = I_2 R_2 = 0,56 \cdot 5 = 2,8 \text{ В.}$$

Потенциал следующей точки  $a$  будет меньше  $\varphi_n$  на величину ЭДС  $E_2$ :  $\varphi_a = \varphi_n - E_2 = 2,8 - 25 = -22,2 \text{ В}$ . Так как между точками  $n$  и  $a$  никакого сопротивления нет, то их абсциссы будут одинаковы.

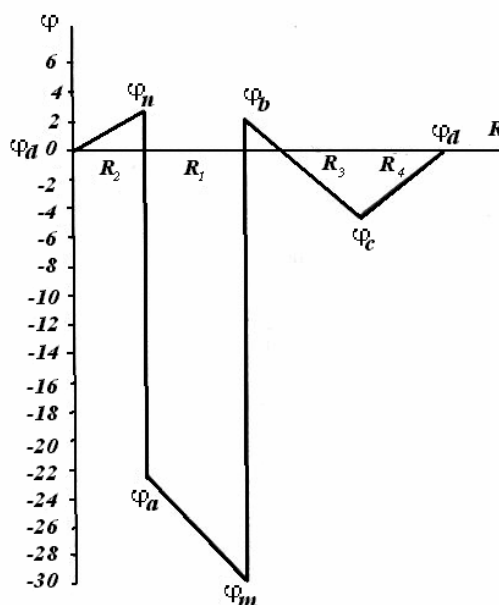


Рисунок 34 - Потенциальная диаграмма

Потенциалы остальных точек определяются аналогично:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \varphi_a - I_1 R_1 = -22,2 - 1,05 \cdot 7 = -29,55 \text{ В}; \\ \varphi_b &= \varphi_m + E_1 = -29,55 + 32 = 2,45 \text{ В}; \\ \varphi_c &= \varphi_b + I_3 R_3 = 2,45 + (-0,864) \cdot 8 = -4,462 \text{ В}; \\ \varphi_d &= \varphi_c + I_4 R_4 = -4,462 + 0,746 \cdot 6 \approx 0. \end{aligned}$$

Значения потенциалов узлов с достаточной точностью совпадают с найденными по методу узловых потенциалов.

### 1.2.7 Баланс мощностей

Баланс мощностей вытекает из закона сохранения энергии. Количество подведенной энергии равняется количеству использованной энергии.

$$\sum EI = \sum I^2 R \quad (1.37)$$

ЭДС в уравнение входит со знаком «плюс», если является источником энергии, со знаком «минус», если является потребителем энергии.

$$\begin{aligned} \sum EI &= E_1 I_1 + E_2 I_2 = 32 \cdot 1,05 + 25 \cdot 0,56 = 33,6 + 14 = 47,6 \text{ Вт}; \\ \sum I^2 R &= 1,05^2 \cdot 7 + 0,56^2 \cdot 5 + 0,864^2 \cdot 8 + 0,746^2 \cdot 6 + 0,186^2 \cdot 13 + \\ &+ 1,61^2 \cdot 11 = 7,72 + 1,57 + 5,96 + 3,35 + 0,45 + 28,5 = 46,55 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Расхождения в результатах вычислений не превосходят 2,2 %.

### 1.2.8 Метод двух узлов

Частным случаем, метода узловых потенциалов является метод двух узлов, применимый только для цепи с двумя узлами. Он позволяет сразу подсчитать напряжение между узлами цепи.

Порядок расчета методом двух узлов следующий:

1. Принимают положительное направление ЭДС эквивалентной цепи.
2. Определяют напряжение узлов  $ab$  по выражению:

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k \cdot G_k + \sum J_k}{\sum G_k} \quad (1.38)$$

где  $E_k$  – ЭДС ветви;

$G_k$  – проводимость ветви;

$J_k$  – ток источника тока ветви.

ЭДС и ток источника тока в уравнение входят со знаком «плюс», если их направление совпадает с выбранным направлением эквивалентной цепи. Если направления не совпадают, ЭДС и ток источника тока входят в уравнение со знаком «минус».

3. Определив напряжение двух узлов, определяют токи в ветвях по выражению:

$$I_n = (E_n - U_{ab}) \cdot G_n \quad (1.39)$$

Если в результате расчетов значение токов отрицательно, то действительное направление токов противоположно выбранному.

### 1.2.9 Метод наложения

При расчете разветвленных электрических цепей с несколькими источниками энергии иногда удается обойтись без решения системы уравнений, если применить метод наложения. В соответствии с этим методом токи в ветвях схемы рассматриваются как алгебраическая сумма токов от каждой ЭДС в отдельности.

Этот метод основан на принципе наложения, который заключается в следующем: полагают, что каждый источник вырабатывает свой частичный ток в ветвях, а действительные токи равняются алгебраической сумме частичных токов.

Порядок расчета этим методом следующий:

1. В схеме закорачивают все ЭДС, кроме одной и определяют частичные токи от действия одной ЭДС. Затем в схеме оставляют другую ЭДС и также определяют частичные токи. Так поочередно

определяют частичные токи от действия всех ЭДС, имеющих в схеме.

2. Определяют действительные токи как алгебраическую сумму частичных токов в ветвях.

Следует иметь ввиду, что при большом числе источников расчет электрической цепи методом наложения сильно усложняется, так как увеличивается число вспомогательных схем и конфигурация каждой из них становится более сложной. По этой причине такой расчет может привести к значительным погрешностям при вычислениях.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение электрической цепи.
2. Назовите эквивалентные схемы источников электрической энергии, начертите и объясните схемы их соединения.
3. Сформулируйте основные законы электрических цепей.
4. Опишите порядок расчета разветвленной цепи с одним источником.
5. В какой последовательности строится потенциальная диаграмма?
6. Для чего производят преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду и обратно? Выведите формулы преобразований.
7. Перечислите методы расчета разветвленных линейных электрических цепей с несколькими источниками, опишите каждый из них и укажите его достоинства и недостатки.

### 1.2.10 Решение задач

#### Пример 1.8

В одну из ветвей сложной электрической цепи включен генератор (рисунок 35), а в другую- аккумуляторная батарея. ЭДС генератора  $E_1=200$  В, внутреннее сопротивление  $R_{01}=1$  Ом, ЭДС батареи  $E_2=140$  В, внутреннее сопротивление  $R_{02}=0,5$  Ом, источник тока  $J=2,8$  А, сопротивление резисторов  $R_1=9$  Ом,  $R_2=19,5$  Ом,  $R_3=4$  Ом.

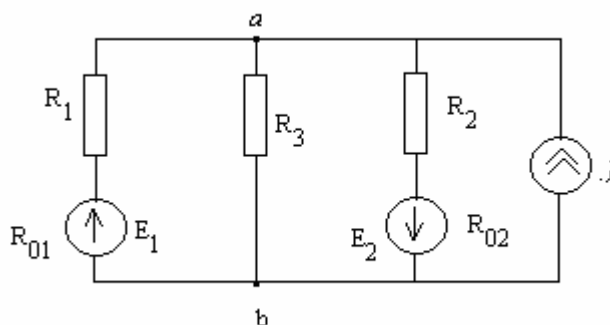


Рисунок 35 – Схема к задаче 1.8

**Решение.**

**Метод двух узлов**

Составляем уравнение для расчета напряжения двух узлов  $ab$  и определяем напряжение:

$$U_{ab} = \frac{E_1 \frac{1}{R_1 + R_{01}} - E_2 \frac{1}{R_2 + R_{02}} + J}{\frac{1}{R_1 + R_{01}} + \frac{1}{R_2 + R_{02}} + \frac{1}{R_3}}$$
$$U_{ab} = \frac{200 \frac{1}{9+1} - 140 \frac{1}{19.5+0.5} + 2.8}{\frac{1}{9+1} + \frac{1}{19.5+0.5} + \frac{1}{5}} = 22 \text{ В}$$

Определяем токи в ветвях:

$$I_1 = (E_1 - U_{ab}) \frac{1}{R_1 + R_{01}} = (200 - 22) \frac{1}{9+1} = 17.8 \text{ А}$$
$$I_2 = (-E_2 - U_{ab}) \frac{1}{R_2 + R_{02}} = (-140 - 22) \frac{1}{19.5+0.5} = -16.2 \text{ А}$$
$$I_3 = (0 - U_{ab}) \frac{1}{R_3} = (0 - 22) \frac{1}{5} = -4.4 \text{ А}$$

Действительные направления токов во второй и третьей ветвях противоположны выбранному положительному направлению, так как расчетные значения отрицательные.

Выполним проверку по 1 закону Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 + I_3 + J = 17.8 - 16.2 - 4.4 + 2.8 = 0$$

Расчет выполнен, верно.

**Пример 1.9**

Рассчитать токи ветвей в электрической цепи (рисунок 36).  
Параметры резисторов:  $R_1=200 \text{ Ом}$ ,  $R_{21}=100 \text{ Ом}$ ,  $R_{22}=200 \text{ Ом}$ ,  $R_3=125 \text{ Ом}$ ,  
 $R_4= R_3 \text{ Ом}$ ,  $R_5=50 \text{ Ом}$ ,  $R_6=60 \text{ Ом}$ ,. Источники:  $E_3=15 \text{ В}$ ,  $E_6=30 \text{ В}$ ,  $J_4=1 \text{ А}$ .  
Выполнить проверку балансом мощности.

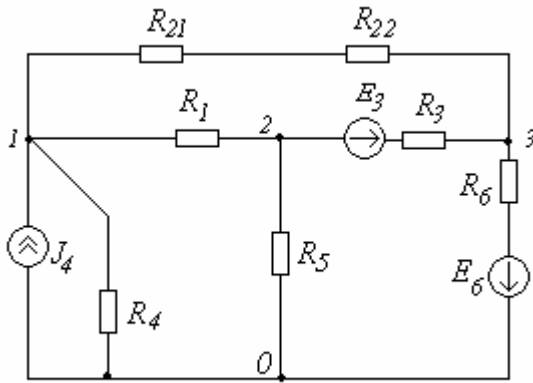


Рисунок 36 - Схема к задаче 1.9

**Решение.**

**Метод узловых и контурных уравнений**

Составляем уравнения по первому и второму законам Кирхгофа (рисунок 37), учитывая выбранные направления:

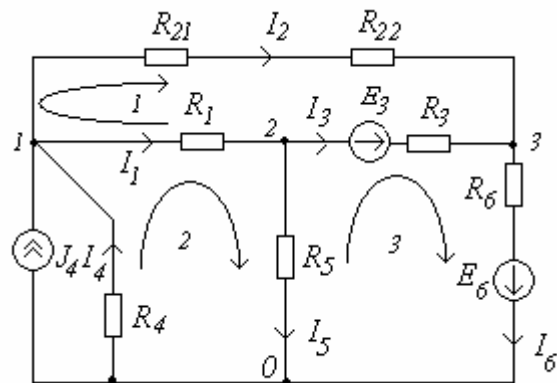


Рисунок 37 – К расчету методом узловых и контурных уравнений

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + J_4 + I_4 = 0 \\ I_1 - I_3 - I_5 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_6 = 0 \\ -I_1 R_1 + I_2 (R_{21} + R_{22}) - I_3 R_3 = -E_3 \\ I_1 R_1 + I_4 R_4 + I_5 R_5 = 0 \\ I_3 R_3 - I_5 R_5 + I_6 R_6 = E_3 + E_6 \end{cases}$$

Подставляем известные значения

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + I_4 = -1 \\ I_1 - I_3 - I_5 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_6 = 0 \\ -I_1 \cdot 200 + I_2(100 + 200) - I_3 \cdot 125 = -15 \\ I_1 \cdot 200 + I_4 \cdot 125 + I_5 \cdot 50 = 0 \\ I_3 \cdot 125 - I_5 \cdot 50 + I_6 \cdot 60 = 15 + 30 \end{cases}$$

Решаем систему матричным уравнением:

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V}$$

$$M = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -200 & 300 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & 0 & 125 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 125 & 0 & -50 & 60 \end{vmatrix} \quad V = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 45 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V} = \begin{vmatrix} 0,285 \\ 0,222 \\ 0,196 \\ -0,493 \\ 0,09 \\ 0,417 \end{vmatrix}$$

Ток  $I_4$  направлен противоположно выбранному направлению.  
 Рассчитываем баланс мощностей.  
 Мощность источника:

$$P_u = E_3 I_3 + E_6 I_6 + J_4 R_4 I_4 = 15 \cdot 0,196 + 30 \cdot 0,417 + 1 \cdot 125 \cdot 0,493 = 77,045 \text{ Вт}$$

Мощность потребителя:

$$P_H = I_1^2 R_1 + I_2^2 (R_{21} + R_{22}) + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 0,285^2 \cdot 200 + 0,222^2 (100 + 200) + 0,196^2 \cdot 125 + 0,493^2 \cdot 125 + 0,09^2 \cdot 50 + 0,417^2 \cdot 60 = 77,045 \text{ Вт}$$

Баланс сошелся, решение выполнено, верно.

### Метод контурных токов

Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов (рисунок 38):



$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_{21} + R_{22} + R_3) - I_{22}R_1 - I_{33}R_3 = -E_3 \\ I_{22}(R_1 + R_5 + R_4) - I_{11}R_1 - I_{33}R_5 - I_{44}R_4 = 0 \\ I_{33}(R_3 + R_5 + R_6) - I_{11}R_3 - I_{22}R_5 = E_3 + E_6 \\ I_{44} = J_4 \end{cases}$$

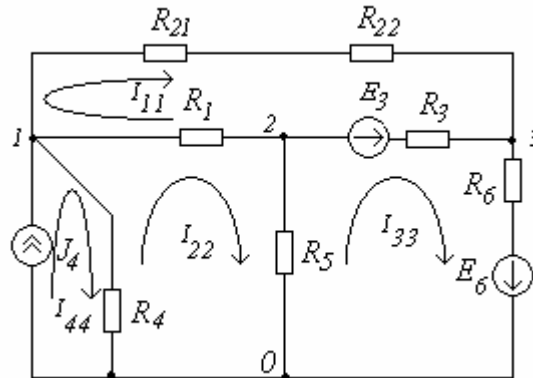


Рисунок 38 – К расчету методом контурных токов

Решаем систему матричным уравнением:

$$\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} 625 & -200 & -125 \\ -200 & 375 & -50 \\ -125 & -50 & 235 \end{vmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{vmatrix} -15 \\ 125 \\ 45 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 0,222 \\ 0,507 \\ 0,417 \end{vmatrix}$$

Определяем действительные токи в ветвях:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} - I_{22} = 0,222 - 0,507 = -0,285 \text{ A}; \\ I_2 &= I_{11} = 0,222 \text{ A}; \\ I_3 &= I_{11} - I_{33} = 0,222 - 0,417 = -0,196 \text{ A}; \\ I_4 &= I_{44} - I_{22} = 1 - 0,507 = 0,493 \text{ A}; \\ I_5 &= I_{22} - I_{33} = 0,507 - 0,417 = 0,09 \text{ A}; \\ I_6 &= I_{33} = 0,417 \text{ A}. \end{aligned}$$

Значения токов совпадают с предыдущим расчетом.

### Метод узловых потенциалов

В схеме (рисунок 36) четыре узла. В качестве базового выбираем узел 0. Для оставшихся узлов составляем уравнения:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_{10} - G_{12}\varphi_{20} - G_{13}\varphi_{30} = J_{11} \\ -G_{21}\varphi_{10} + G_{22}\varphi_{20} - G_{23}\varphi_{30} = J_{22} \\ -G_{31}\varphi_{10} - G_{32}\varphi_{20} + G_{33}\varphi_{30} = J_{33} \end{cases}$$

Определяем собственные проводимости узлов 1, 2 и 3:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{21} + R_{22}} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{200} + \frac{1}{100 + 200} + \frac{1}{125} = 0,016 \text{ См};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{200} + \frac{1}{125} + \frac{1}{50} = 0,033 \text{ См};$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{21} + R_{22}} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{125} + \frac{1}{100 + 200} + \frac{1}{60} = 0,028 \text{ См}.$$

Определяем взаимные проводимости:

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{125} = 0,008 \text{ См};$$

$$G_{31} = G_{13} = \frac{1}{R_{21} + R_{22}} = \frac{1}{100 + 200} = 0,00333 \text{ См}.$$

Определяем узловые токи:

$$J_{11} = J_4 = 1 \text{ А};$$

$$J_{22} = -\frac{E_3}{R_3} = -\frac{15}{125} = -0,12 \text{ А};$$

$$J_{33} = \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_6}{R_6} = \frac{15}{125} - \frac{30}{60} = 0,417 \text{ А}.$$

Получаем уравнение для расчета узловых потенциалов:

$$\begin{cases} 0,016\varphi_{10} - 0,005\varphi_{20} - 0,00333\varphi_{30} = 1 \\ -0,005\varphi_{10} + 0,033\varphi_{20} - 0,008\varphi_{30} = -0,12 \\ -0,00333\varphi_{10} - 0,008\varphi_{20} + 0,028\varphi_{30} = 0,417 \end{cases}$$

Решив систему уравнений, найдем потенциалы в узлах:

$$\varphi_{10} = 61,589 \text{ В};$$

$$\varphi_{20} = 4,494 \text{ В};$$

$$\varphi_{30} = -4,955 \text{ В}.$$

Токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{\varphi_{10} - \varphi_{20}}{R_1} = \frac{61,589 - 4,494}{200} = 0,285 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_{10} - \varphi_{30}}{R_{21} + R_{22}} = \frac{61,589 - (-4,955)}{100 + 200} = 0,222 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{E_3 - (\varphi_{30} - \varphi_{20})}{R_3} = \frac{15 - (-4,955 - 4,494)}{125} = 0,285 \text{ A};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_{10} - 0}{R_4} = \frac{61,589 - 0}{125} = 0,493 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_{20} - 0}{R_5} = \frac{4,494 - 0}{50} = 0,285 \text{ A};$$

$$I_6 = \frac{E_6 - (\varphi_{30} - 0)}{R_6} = \frac{30 - (-4,955 - 0)}{60} = 0,417 \text{ A}.$$

Токи, рассчитанные различными методами, совпадают.

### Пример 1.10

Рассчитать токи ветвей в электрической цепи (рисунок 39). Параметры резисторов:  $R_1=200$  Ом,  $R_2=100$  Ом,  $R_3=125$  Ом,  $R_4= R_3$  Ом. Источники:  $E=15$  В,  $J=0,5$  А. Выполнить проверку балансом мощности.

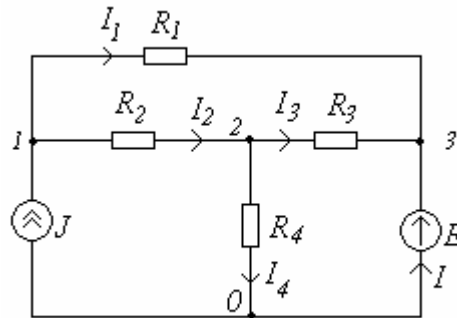


Рисунок 39 – Схема к задаче 1.10

### Решение.

Определяем положительные направления токов ветвей (рисунок 39). В схеме три независимых узла. В качестве базисного принимаем узел 0, потенциал узла 3 равен ЭДС идеального источника:

$$\varphi_{30} = E = 15 \text{ В}.$$

Узловые уравнения для узлов 1 и 2 имеют вид:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_{10} - G_{12}\varphi_{20} - G_{13}\varphi_{30} = J_{11} \\ -G_{21}\varphi_{10} + G_{22}\varphi_{20} - G_{23}\varphi_{30} = J_{22} \end{cases}$$

Определяем собственные проводимости узлов 1 и 2:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{200} + \frac{1}{100} = 0,015 \text{ См};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{100} + \frac{1}{125} + \frac{1}{125} = 0,026 \text{ См}.$$

Определяем взаимные проводимости:

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{125} = 0,008 \text{ См};$$

$$G_{31} = G_{13} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ См}.$$

Определяем узловые токи:

$$J_{11} = J = 0,5 \text{ А};$$

$$J_{22} = 0.$$

Получаем уравнение для расчета узловых потенциалов:

$$\begin{cases} 0,015\varphi_{10} - 0,01\varphi_{20} - 0,005 \cdot 15 = 0,5 \\ -0,015\varphi_{10} + 0,026\varphi_{20} - 0,008 \cdot 15 = 0 \end{cases}$$

Решив систему уравнений, найдем потенциалы в узлах:

$$\varphi_{10} = 55,7 \text{ В};$$

$$\varphi_{20} = 26,03 \text{ В}.$$

Токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{\varphi_{10} - \varphi_{30}}{R_1} = \frac{55,7 - 15}{200} = 0,2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_{10} - \varphi_{20}}{R_2} = \frac{55,7 - 26,03}{100} = 0,3 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_{20} - \varphi_{30}}{R_3} = \frac{26,03 - 15}{125} = 0,09 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_{20} - 0}{R_4} = \frac{26,03 - 0}{125} = 0,21 \text{ А.}$$

Ток  $I$  в ветви с ЭДС определяем из уравнения Кирхгофа для узла 3. Получаем:

$$I = -I_1 - I_3 = 0,2 - 0,09 = -0,29 \text{ А.}$$

Рассчитываем баланс мощностей.

Мощность источников:

$$P_{ист} = (\varphi_{10} - 0) \cdot J + E \cdot I = 55,7 \cdot 0,5 + 15 \cdot (-0,29) = 23,47 \text{ Вт.}$$

Мощность, рассеиваемая в резисторах:

$$P_H = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 = 0,2^2 \cdot 200 + 0,3^2 \cdot 100 + 0,09^2 \cdot 125 + 0,21^2 \cdot 125 = 23,47$$

Вт.

Баланс мощностей выполняется.

### **1.3 Применение пакета Mathcad к расчету электрических цепей постоянного тока**

#### **1.3.1 Методы решения задач**

Многие процессы, происходящие в электрических цепях постоянного и переменного тока, можно описать с помощью систем уравнений. Тогда определение параметров электрической цепи сводится к определению корней системы уравнений.

Существуют прямые и итерационные (от латинского *iteratio*-повторение) методы решения систем уравнений. К прямым методам относят метод Крамера, методы последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса и его модификации: метод главного элемента, метод квадратного корня, метод отражений).

Прямые методы дают точные результаты решения системы за конечное число математических операций. Если все операции выполняются точно без округлений, то решение заданной системы получается точным.

В программе MathCAD существует несколько вариантов решения систем уравнений прямыми методами. При решении уравнений (неравенств) описанными ниже способами результаты вычислений будут автоматически обновляться при изменении условий.

## Применение панели инструментов символьных вычислений

При использовании панели символьных вычислений систему уравнений (неравенств) задают матрицей, число строк которой равно числу уравнений (неравенств), столбец один. При записи уравнений (неравенств) применяют панель логических операторов. Затем выбирают команду **solve** (вычислить) на панели инструментов **Symbolics** (Символьные) и в ячейку вводят имена переменных, относительно которых необходимо решить уравнение (неравенство). Размер матрицы, содержащей переменные, соответствует размеру матрицы уравнений.

Например, решим задачу (рисунок 29) по законам Кирхгофа:  
Задаем параметры электрической цепи:

$$E1 := 32 \quad E2 := 25 \quad R1 := 7 \quad R2 := 5 \quad R3 := 8 \quad R4 := 6 \quad R5 := 13 \quad R6 := 11$$

$$\begin{pmatrix} -I1 - I2 + I6 = 0 \\ I1 + I3 - I5 = 0 \\ -I3 + I4 - I6 = 0 \\ I1R1 - I2R2 + I5R5 = E1 - E2 \\ -I3R3 - I4R4 - I5R5 = 0 \\ I2R2 + I4R4 + I6R6 = E2 \end{pmatrix} \text{solve} \begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \\ I5 \\ I6 \end{pmatrix} \rightarrow \left( \frac{9231}{8777} \frac{4910}{8777} \frac{-7587}{8777} \frac{6554}{8777} \frac{1644}{8777} \frac{14141}{8777} \right) = (1.0520.559-0.8640.7470.1871.611)$$

Результат вычислений:  $I_1=1.052$  А;  $I_2=0.559$  А;  $I_3=-0.864$  А;  $I_4=0.747$  А;  $I_5=0.187$  А;  $I_6=1.611$  А.

## Применение встроенных функций

Для решения системы уравнений задают матрицу коэффициентов, которая не должна быть вырожденной, и вектор свободных членов. Используя встроенную функцию **lsolve**, в скобках отделив запятой, указывают имена переменных матрицы коэффициентов и вектора свободных членов.

Например:

Для решения системы уравнений следует определить матрицу коэффициентов и указать вектор свободных коэффициентов:

$$M := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ R1 & -R2 & 0 & 0 & R5 & 0 \\ 0 & 0 & -R3 & -R4 & -R5 & 0 \\ 0 & R2 & 0 & R4 & 0 & R6 \end{pmatrix} \quad V := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$i := \text{lsolve}(M, V) \quad i = \begin{pmatrix} 1.052 \\ 0.559 \\ -0.864 \\ 0.747 \\ 0.187 \\ 1.611 \end{pmatrix}$$

Результат вычислений:  $I_1=1.052$  А;  $I_2=0.559$  А;  $I_3=-0.864$  А;  $I_4=0.747$  А;  $I_5=0.187$  А;  $I_6=1.611$  А.

Результат вычислений совпадают с предыдущим расчетом.

## Применение символьного блока

Для решения системы уравнений (неравенств) используется символьный блок, который имеет следующую структуру:

1. Начальные условия, заданные с помощью знака локального присваивания.
2. Встроенная функция **Given**, которая открывает блок решений.
3. Последовательность уравнений, заданных с применением логического знака равенства.
4. Определение ограничений, которые накладываются на искомые переменные.
5. Выражение, которое использует встроенные функции поиска решений (**find** и **minner**). После ввода встроенной функции в скобках, отделяя запятой, указывают имена искомых переменных.

Например:

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &-I1 - I2 + I6 = 0 \\ &I1 + I3 - I5 = 0 \\ &-I3 + I4 - I6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 + I_5 \cdot R_5 &= E_1 - E_2 \\
-I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 &= 0 \\
I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 &= E_2
\end{aligned}$$

$$\text{Find}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{9231}{8777} \\ \frac{4910}{8777} \\ \frac{-7587}{8777} \\ \frac{6554}{8777} \\ \frac{1644}{8777} \\ \frac{14141}{8777} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.052 \\ 0.559 \\ -0.864 \\ 0.747 \\ 0.187 \\ 1.611 \end{pmatrix}$$

Результат вычислений:  $I_1=1.052$  А;  $I_2=0.559$  А;  $I_3=-0.864$  А;  $I_4=0.747$  А;  $I_5=0.187$  А;  $I_6=1.611$  А.

### Применение матричного уравнения

Так как систему уравнений можно задать в матричной форме  $\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V}$ , то решение системы будет записываться в виде  $\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V}$ , где  $\mathbf{M}^{-1}$ -обратная матрица к матрице  $\mathbf{M}$ ;

$\mathbf{M}$ -матрица коэффициентов, которая не должна быть вырожденной;  
 $\mathbf{V}$ - вектор свободных членов.

Этот способ не применим, если определитель матрицы коэффициентов равен 0 (вырожденный случай).

Например:

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & -R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{V} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\mathbf{I} := \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V}$$



$$I = \begin{pmatrix} 1.052 \\ 0.559 \\ -0.864 \\ 0.747 \\ 0.187 \\ 1.611 \end{pmatrix}$$

Результат вычислений:  $I_1=1.052$  А;  $I_2=0.559$  А;  $I_3=-0.864$  А;  $I_4=0.747$  А;  $I_5=0.187$  А;  $I_6=1.611$  А.

### 1.3.2 Решение задач

#### Пример 1.11

Рассмотрим задачу 1.8 пункта 1.2.10 (рисунок 35).

#### Решение.

Исходные данные

$$\begin{aligned} E1 &:= 200 & J &:= 2.8 & E2 &:= 140 & R01 &:= 1 \\ R02 &:= 0.5 & R1 &:= 9 & R2 &:= 9.5 & R3 &:= 5 \end{aligned}$$

Расчетная формула для определения узлового напряжения

$$U_{ab} := \frac{E1 \cdot \frac{1}{R1 + R01} - E2 \cdot \frac{1}{R02 + R2} + J}{\frac{1}{R1 + R01} + \frac{1}{R02 + R2} + \frac{1}{R3}}$$

$$U_{ab} = 22$$

Расчетные формулы для определения токов в ветвях

$$\begin{aligned} I1 &:= (E1 - U_{ab}) \cdot \frac{1}{R01 + R1} \\ I2 &:= (-E2 - U_{ab}) \cdot \frac{1}{R02 + R2} \\ I3 &:= (0 - U_{ab}) \cdot \frac{1}{R3} \end{aligned}$$

$$I1 = 17.8$$

$$I2 = -16.2$$

$$I3 = -4.4$$

Проверка по первому закону Кирхгофа

$$I_2 + I_3 + I_1 + J = 0$$

### Пример 1.12

Рассмотрим задачу 1.9 пункта 1.2.10 (рисунок 36).

**Решение.**

### Метод узловых и контурных уравнений

Исходные данные

$$\begin{aligned} R_1 &:= 200 & R_{21} &:= 100 & R_{22} &:= 200 \\ R_3 &:= 125 & R_4 &:= 125 & R_5 &:= 50 \\ R_6 &:= 60 & E_3 &:= 15 & E_6 &:= 30 \\ J_4 &:= 1 \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов и вектор свободных членов

$$M := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -200 & 300 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & 0 & 125 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 125 & 0 & -50 & 60 \end{pmatrix} \quad V := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Матричное уравнение для определения токов

$$I := M^{-1} \cdot V$$

Результаты расчетов токов в ветвях

$$I = \begin{pmatrix} 0.285 \\ 0.222 \\ 0.196 \\ -0.493 \\ 0.09 \\ 0.417 \end{pmatrix}$$

Токи в ветвях

$$\begin{aligned} I_1 &:= I_{0,0} & I_2 &:= I_{1,0} & I_3 &:= I_{2,0} \\ I_4 &:= I_{3,0} & I_5 &:= I_{4,0} & I_6 &:= I_{5,0} \\ I_1 &= 0.285 & I_2 &= 0.222 \\ I_3 &= 0.196 & I_4 &= -0.493 \\ I_5 &= 0.09 & I_6 &= 0.417 \end{aligned}$$

Баланс мощностей

$$\begin{aligned} P_i &:= E_3 \cdot I_3 + E_6 \cdot I_6 + (-I_4 \cdot J_4 \cdot R_4) \\ P_i &= 77.045 \\ P_p &:= I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot (R_{21} + R_{22}) + I_3^2 \cdot R_3 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 + I_4^2 \cdot R_4 \\ P_p &= 77.045 \end{aligned}$$

### Метод контурных токов

Исходные данные

$$\begin{aligned} R_1 &:= 200 & R_{21} &:= 100 & R_{22} &:= 200 \\ R_3 &:= 125 & R_4 &:= 125 & R_5 &:= 50 \\ R_6 &:= 60 & E_3 &:= 15 & E_6 &:= 30 \\ J_4 &:= 1 \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов и вектор свободных членов

$$M := \begin{pmatrix} 625 & -200 & -125 \\ -200 & 375 & -50 \\ -125 & -50 & 235 \end{pmatrix} \quad V := \begin{pmatrix} -15 \\ 125 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Матричное уравнение для определения токов

$$I := M^{-1} \cdot V$$

Результаты расчетов контурных токов

$$I = \begin{pmatrix} 0.222 \\ 0.507 \\ 0.417 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} I_{11} &:= I_{0,0} & I_{22} &:= I_{1,0} \\ I_{33} &:= I_{2,0} & I_{44} &:= J_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= 0.222 & I_{22} &= 0.507 \\ I_{33} &= 0.417 & I_{44} &= 1 \end{aligned}$$

Действительные токи в ветвях

$$\begin{aligned} I_1 &:= I_{22} - I_{11} & I_2 &:= I_{11} \\ I_3 &:= I_{33} - I_{11} & I_4 &:= I_{44} - I_{22} \\ I_5 &:= I_{22} - I_{33} & I_6 &:= I_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= 0.285 & I_2 &= 0.222 \\ I_3 &= 0.196 & I_4 &= 0.493 \\ I_5 &= 0.09 & I_6 &= 0.417 \end{aligned}$$

### Метод узловых потенциалов

Исходные данные

$$\begin{aligned} R_1 &:= 200 & R_{21} &:= 100 & R_{22} &:= 200 \\ R_3 &:= 125 & R_4 &:= 125 & R_5 &:= 50 \\ R_6 &:= 60 & E_3 &:= 15 & E_6 &:= 30 \\ J_4 &:= 1 \end{aligned}$$

Расчетные формулы для определения собственных проводимостей

$$\begin{aligned} G_{11} &:= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{21} + R_{22}} + \frac{1}{R_4} \\ G_{22} &:= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \\ G_{33} &:= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{21} + R_{22}} + \frac{1}{R_6} \end{aligned}$$

Значения собственных проводимостей

$$\begin{aligned} G_{11} &= 0.016 \\ G_{22} &= 0.033 \\ G_{33} &= 0.028 \end{aligned}$$

Расчетные формулы для определения взаимных проводимостей

$$\begin{aligned} G_{12} &:= \frac{1}{R_1} & G_{21} &:= G_{12} \\ G_{13} &:= \frac{1}{R_{21} + R_{22}} & G_{31} &:= G_{13} \end{aligned}$$

$$G_{32} := \frac{1}{R_3} \quad G_{23} := G_{32}$$

Значения взаимных проводимостей

$$\begin{aligned} G_{12} &= 5 \times 10^{-3} \\ G_{13} &= 3.333 \times 10^{-3} \\ G_{32} &= 8 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Расчетные формулы для определения узловых токов

$$\begin{aligned} J_{11} &:= J_4 \\ J_{22} &:= \frac{-E_3}{R_3} \\ J_{33} &:= \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_6}{R_6} \end{aligned}$$

Значения узловых токов

$$\begin{aligned} J_{11} &= 1 \\ J_{22} &= -0.12 \\ I_{33} &= 0.417 \end{aligned}$$

Расчетные формулы для определения узловых потенциалов

Given

$$\begin{aligned} G_{11} \cdot U_{10} - G_{12} \cdot U_{20} - G_{13} \cdot U_{30} &= J_{11} \\ -G_{21} \cdot U_{10} + G_{22} \cdot U_{20} - G_{23} \cdot U_{30} &= J_{22} \\ -G_{31} \cdot U_{10} - G_{32} \cdot U_{20} + G_{33} \cdot U_{30} &= J_{33} \end{aligned}$$

$$U := \text{Find}(U_{10}, U_{20}, U_{30}) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{117450}{1907} \\ \frac{8570}{1907} \\ \frac{-9450}{1907} \end{pmatrix}$$

Значения потенциалов в узлах

$$\begin{aligned} U_{10} &:= U_{0,0} \\ U_{20} &:= U_{1,0} \\ U_{30} &:= U_{2,0} \end{aligned}$$

$$U_{10} = 61.589$$

$$U_{20} = 4.494$$

$$U_{30} = -4.955$$

Токи в ветвях

$$I_1 := \frac{U_{10} - U_{20}}{R_1}$$

$$I_2 := \frac{U_{10} - U_{30}}{R_{21} + R_{22}}$$

$$I_3 := \frac{E_3 - (U_{30} - U_{20})}{R_3}$$

$$I_4 := \frac{U_{10} - 0}{R_4}$$

$$I_5 := \frac{U_{20} - 0}{R_5}$$

$$I_6 := \frac{E_6 - (0 - U_{30})}{R_6}$$

$$I_1 = 0.285 \quad I_2 = 0.222 \quad I_3 = 0.196$$

$$I_4 = 0.493 \quad I_5 = 0.09 \quad I_6 = 0.417$$

Результаты расчетов, выполненные различными методами, совпадают.

### Указания к выполнению самостоятельной работы №1

Для электрической цепи, соответствующей номеру варианта, выполнить следующее:

- 1 Начертить схему электрической цепи. Записать уравнения по законам Кирхгофа и найти токи в ветвях, решив систему уравнений на ЭВМ;
- 2 Выполнить расчет токов во всех ветвях методом контурных токов;
- 3 Проверить правильность решения по второму закону Кирхгофа по двум контурам;
- 4 Составить баланс мощностей цепи;
- 5 Построить потенциальную диаграмму для внешнего контура;
- 6 Определить ток в одной из ветвей (по своему выбору) по методу эквивалентного генератора. Определение токов в цепи после размыкания выбранной ветви выполнить методом узловых потенциалов

Исходные данные приведены в таблице 2, схемы цепи показаны в таблице 3.

Таблица 2- Исходные данные для самостоятельной работы №1

предпоследняя цифра варианта	$E_1, В$	$E_2, В$	$E_3, В$	$E_4, В$	$E_5, В$	$E_6, В$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	$R_4, Ом$	$R_5, Ом$	$R_6, Ом$	$J, А$
1	40	20	70	50	60	30	5	8	15	4	6	9	2
2	20	20	60	60	75	40	80	90	6	12	8	15	2
3	90	100	30	75	50	120	15	12	6	8	10	14	2
4	60	50	70	80	100	40	25	10	12	6	20	8	2
5	100	30	60	90	40	80	15	6	10	18	8	5	2
6	20	40	90	30	60	50	10	4	16	8	12	25	2
7	80	100	60	50	90	30	16	10	20	6	18	22	2
8	40	120	80	90	30	50	12	15	10	8	3	9	2
9	90	80	120	50	75	60	18	6	20	12	15	9	2
0	80	60	75	100	50	90	20	15	25	10	5	14	14

Таблица 3- Схемы для самостоятельной работы №1

последняя цифра варианта	схема электрической цепи	последняя цифра варианта	схема электрической цепи
1		6	
2		7	

Продолжение таблицы 2

3		8	
4		9	
5		0	

## 2. Электрические цепи однофазного синусоидального тока

### 2.1 Общие теоретические сведения

Переменный ток долгое время не находил практического применения. Это было связано с тем, что первые генераторы электрической энергии вырабатывали постоянный ток, который вполне удовлетворял технологическим процессам электрохимии, а двигатели постоянного тока обладают хорошими регулировочными характеристиками. Однако по мере развития производства постоянный ток все менее стал удовлетворять возрастающим требованиям экономичного электроснабжения.

Переменный ток дал возможность эффективного дробления электрической энергии и изменения величины напряжения с помощью трансформаторов. Появилась возможность производства электроэнергии



на крупных электростанциях с последующим экономичным ее распределением потребителям, увеличился радиус электроснабжения.

В настоящее время центральное производство и распределение электрической энергии осуществляется в основном на переменном токе. Цепи с изменяющимися – переменными – токами по сравнению с цепями постоянного тока имеют ряд особенностей. Переменные токи и напряжения вызывают переменные электрические и магнитные поля. В результате изменения этих полей в цепях возникают явления самоиндукции и взаимной индукции, которые оказывают самое существенное влияние на процессы, протекающие в цепях, усложняя их анализ.

Переменным током (напряжением, ЭДС и т.д.) называется ток (напряжение, ЭДС и т.д.), изменяющийся во времени. Токи, значения которых повторяются через равные промежутки времени в одной и той же последовательности, называются периодическими, а наименьший промежуток времени, через который эти повторения наблюдаются, – периодом  $T$ . Для периодического тока имеем

$$i = F(t) = F(t + T), \quad (40)$$

Величина, обратная периоду, есть частота, измеряемая в герцах (Гц):

$$f = 1/T, \quad (41)$$

Диапазон частот, применяемых в технике: от сверхнизких частот (0.01, 10 Гц – в системах автоматического регулирования, в аналоговой вычислительной технике) – до сверхвысоких (3000, 300000 МГц – миллиметровые волны: радиолокация, радиоастрономия). В Казахстане промышленная частота  $f = 50$  Гц.

Мгновенное значение переменной величины есть функция времени. Ее принято обозначать строчной буквой:

$i$  – мгновенное значение тока  $i(t)$ ;

$u$  – мгновенное значение напряжения  $u(t)$ ;

$e$  – мгновенное значение ЭДС  $e(t)$ ;

$p$  – мгновенное значение мощности  $p(t)$ .

Наибольшее мгновенное значение переменной величины за период называется амплитудой (ее принято обозначать заглавной буквой с индексом  $m$ ).

$I_m$  – амплитуда тока;

$U_m$  – амплитуда напряжения;

$E_m$  – амплитуда ЭДС.

### Действующее значение переменного тока

Значение периодического тока, равное такому значению постоянного тока, который за время одного периода произведет тот же самый тепловой или электродинамический эффект, что и периодический ток, называют действующим значением периодического тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}, \quad (42)$$

Аналогично определяются действующие значения ЭДС и напряжения.

### Синусоидально изменяющийся ток

Из всех возможных форм периодических токов наибольшее распространение получил синусоидальный ток. По сравнению с другими видами тока синусоидальный ток имеет то преимущество, что позволяет в общем случае наиболее экономично осуществлять производство, передачу, распределение и использование электрической энергии. Только при использовании синусоидального тока удастся сохранить неизменными формы кривых напряжений и токов на всех участках сложной линейной цепи. Теория синусоидального тока является ключом к пониманию теории других цепей.

#### 2.1.1 Изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов на плоскости декартовых координат

Синусоидальные токи и напряжения можно изобразить графически, записать при помощи уравнений с тригонометрическими функциями, представить в виде векторов на декартовой плоскости или комплексными числами.

Приведенным на рисунке 40, графикам двух синусоидальных ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  соответствуют уравнения:

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \Psi_{e1}); \quad e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \Psi_{e2}).$$

Значения аргументов синусоидальных функций  $(\omega t + \Psi_{e1})$  и  $(\omega t + \Psi_{e2})$  называются фазами синусоид, а значение фазы в начальный момент времени ( $t=0$ ):  $\Psi_{e1}$  и  $\Psi_{e2}$  - начальной фазой ( $\Psi_{e1} > 0; \Psi_{e2} < 0$ ).

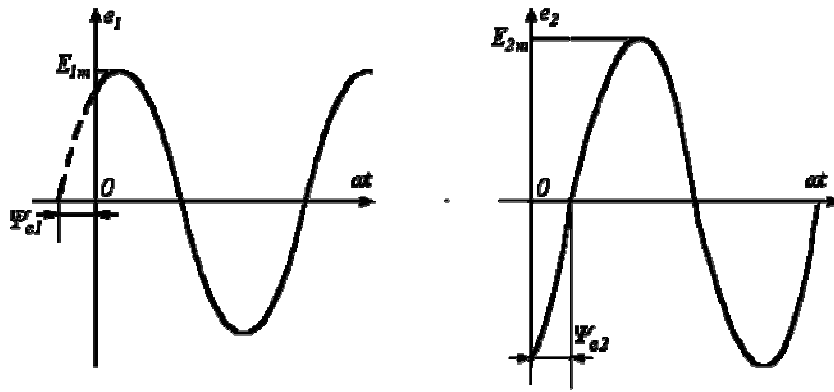


Рисунок 40 – Графики синусоидальной ЭДС  $e_1$  и  $e_2$

Величину  $\omega$ , характеризующую скорость изменения фазового угла, называют угловой частотой. Так как фазовый угол синусоиды за время одного периода  $T$  изменяется на  $2\pi$  рад, то угловая частота есть

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad (43)$$

где  $f$  – частота.

При совместном рассмотрении двух синусоидальных величин одной частоты разность их фазовых углов, равную разности начальных фаз, называют углом сдвига фаз.

Для синусоидальных ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  угол сдвига фаз:

$$\alpha = (\omega t + \Psi_{e1}) - (\omega t + \Psi_{e2}) = \Psi_{e1} - \Psi_{e2}.$$

### 2.1.2 Векторное изображение синусоидально изменяющихся величин

На декартовой плоскости из начала координат проводят векторы, равные по модулю амплитудным значениям синусоидальных величин, и вращают эти векторы против часовой стрелки (в ТОЭ данное направление принято за положительное) с угловой частотой, равной  $\omega$ . Фазовый угол при вращении отсчитывается от положительной полуоси абсцисс. Проекции вращающихся векторов на ось ординат равны мгновенным значениям ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  (рисунок 41 а). Совокупность векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся ЭДС, напряжения и токи, называют векторными диаграммами. При построении векторных диаграмм векторы удобно располагать для начального момента времени ( $t=0$ ), что вытекает из равенства угловых частот синусоидальных величин и эквивалентно тому, что система декартовых координат сама вращается против часовой стрелки со скоростью  $\omega$ .

Таким образом, в этой системе координат векторы неподжны (рисунок 41 б). Векторные диаграммы нашли широкое применение при анализе цепей синусоидального тока. Их применение делает расчет цепи более наглядным и простым. Это упрощение заключается в том, что сложение и вычитание мгновенных значений величин можно заменить сложением и вычитанием соответствующих векторов.

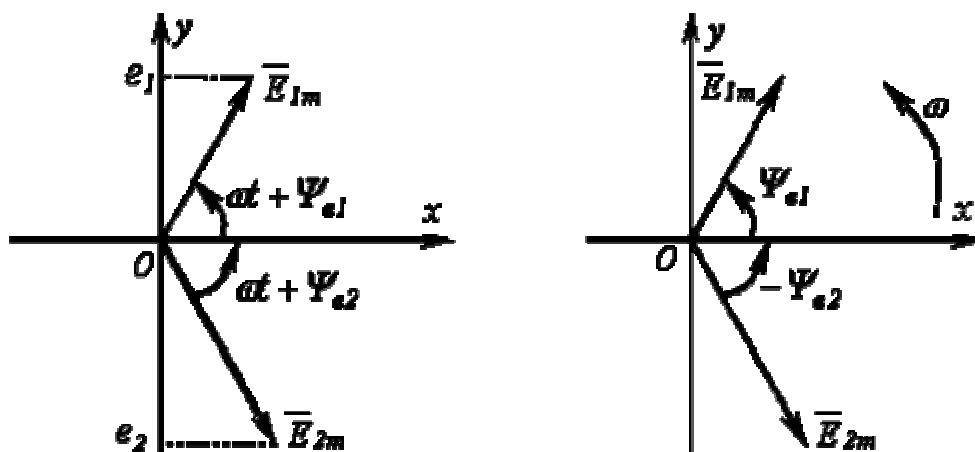


Рисунок 41 – Векторные диаграммы:

Пусть, например, в точке разветвления цепи (рисунок 42,а) общий ток  $i_3$  равен сумме токов  $i_1$  и  $i_2$  двух ветвей:

$$i_3 = i_1 + i_2.$$

Каждый из этих токов синусоидален и может быть представлен уравнением

$$i_1 = I_{1m} \sin(\alpha t + \Psi_1) \quad \text{и} \quad i_2 = I_{2m} \sin(\alpha t + \Psi_2).$$

Результирующий ток также будет синусоидален:

$$i_3 = I_{1m} \sin(\alpha t + \Psi_1) + I_{2m} \sin(\alpha t + \Psi_2) = I_{3m} \sin(\alpha t + \Psi_3).$$

Определение амплитуды  $I_{3m}$  и начальной фазы  $\Psi_3$  этого тока путем соответствующих тригонометрических преобразований получается довольно громоздким и мало наглядным, особенно, если суммируется большое число синусоидальных величин. Значительно проще это осуществляется с помощью векторной диаграммы. На рисунке 42,б изображены начальные положения векторов токов, проекции которых на ось ординат дают мгновенные значения токов для  $t=0$ . При вращении этих

векторов с одинаковой угловой скоростью  $\omega$  их взаимное расположение не меняется, и угол сдвига фаз между ними остается равным  $\alpha = \Psi_1 - \Psi_2$ .

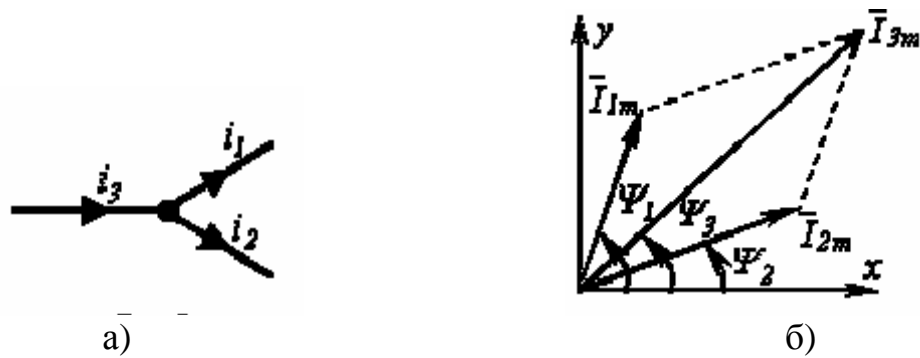


Рисунок 42 – Векторные диаграммы:

Так как алгебраическая сумма проекций векторов на ось ординат равна мгновенному значению общего тока, вектор общего тока равен геометрической сумме векторов токов:

$$\vec{I}_{3m} = \vec{I}_{1m} + \vec{I}_{2m}.$$

Построение векторной диаграммы в масштабе позволяет определить значения  $I_{3m}$  и  $\Psi_3$  из диаграммы, после чего может быть записано решение для мгновенного значения  $i_3$  путем формального учета угловой частоты:

$$i_3 = I_{3m} \sin(\omega t + \Psi_3).$$

### 2.1.3 Представление синусоидальных ЭДС, напряжений и токов комплексными числами

Геометрические операции с векторами можно заменить алгебраическими операциями с комплексными числами, что существенно повышает точность получаемых результатов.

Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует определенное комплексное число, которое может быть записано в:

показательной  $\dot{a} = ae^{j\Psi}$ ,

тригонометрической  $\dot{a} = a \cos\Psi + ja \sin\Psi$  или

алгебраической  $\dot{a} = b + jc$  - формах.

Например, ЭДС  $e = E_m \sin(\omega t + \Psi_e)$ , изображенной на рисунке 43 вращающимся вектором, соответствует комплексное число

$$E_m e^{j(\omega t + \psi_e)} = E_m \cos(\omega t + \psi_e) + j E_m \sin(\omega t + \psi_e) = e' + j e$$

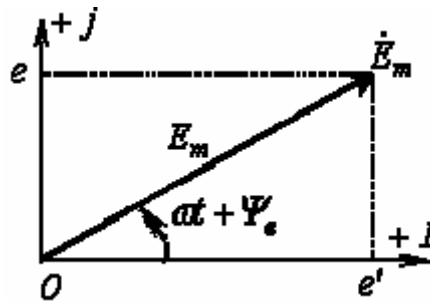


Рисунок 43 – Вектор синусоидальной ЭДС

Фазовый угол  $(\omega t + \psi_e)$  определяется по проекциям вектора на оси “+1” и “+j” системы координат, как

$$\operatorname{tg}(\omega t + \psi_e) = \frac{e}{e'}$$

В соответствии с тригонометрической формой записи мнимая составляющая комплексного числа определяет мгновенное значение синусоидально изменяющейся ЭДС:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e) = I_m \left\{ E_m e^{j(\omega t + \psi_e)} \right\}, \quad (44)$$

Комплексное число  $E_m e^{j(\omega t + \psi_e)}$  удобно представить в виде произведения двух комплексных чисел:

$$E_m e^{j(\omega t + \psi_e)} = \underbrace{E_m e^{j\psi_e}}_{\dot{E}_m} \cdot e^{j\omega t} = \dot{E}_m e^{j\omega t} \quad (45)$$

Параметр  $\dot{E}_m$ , соответствующий положению вектора для  $t=0$  (или на вращающейся со скоростью  $\omega$  комплексной плоскости), называют комплексной амплитудой:  $\dot{E}_m = E_m e^{j\psi_e}$ , а параметр  $\dot{E}_m e^{j(\omega t + \psi_e)}$  - комплексом мгновенного значения.

Параметр  $e^{j\omega t}$  является оператором поворота вектора на угол  $\omega t$  относительно начального положения вектора.

Вообще говоря, умножение вектора на оператор поворота  $e^{\pm j\alpha}$  есть его поворот относительно первоначального положения на угол  $\pm\alpha$ .

Следовательно, мгновенное значение синусоидальной величины равно мнимой части без знака “j” произведения комплекса амплитуды  $\dot{E}_m$  и оператора поворота  $e^{j\alpha t}$ :

$$e = E_m \sin(\alpha t + \Psi_e) = I_m \{ \dot{E}_m e^{j\alpha t} \}.$$

Переход от одной формы записи синусоидальной величины к другой осуществляется с помощью формулы Эйлера:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad (46)$$

Если, например, комплексная амплитуда напряжения задана в виде комплексного числа в алгебраической форме:

$$\dot{U}_m = U'_m + jU''_m,$$

- то для записи ее в показательной форме, необходимо найти начальную фазу  $\Psi_U$ , т.е. угол, который образует вектор  $\dot{U}_m$  с положительной полуосью +1:

$$\operatorname{tg} \Psi_U = \frac{U''_m}{U'_m}.$$

Тогда мгновенное значение напряжения:

$$U = I_m \{ \dot{U}_m e^{j\alpha t} \} = I_m \left\{ \sqrt{U'^2_m + U''^2_m} e^{j \arctg \frac{U''_m}{U'_m}} e^{j\alpha t} \right\} = U_m \sin(\alpha t + \Psi_U),$$

где  $\Psi_U = \arctg(U''_m / U'_m)$ .

При записи выражения для определенности было принято, что  $U'_m > 0$ , т.е. что изображающий вектор находится в первом или четвертом квадрантах. Если  $U'_m < 0$ , то при  $U''_m > 0$  (второй квадрант)

$$\Psi_U = \pi - \arctg \left| \frac{U''_m}{U'_m} \right|, \quad (47)$$

а при  $U''_m < 0$  (третий квадрант)

$$\Psi_U = \pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{U''_m}{U'_m} \right| \quad (48)$$

или

$$\Psi_U = -\pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{U''_m}{U'_m} \right| \quad (49)$$

Если задано мгновенное значение тока в виде  $i = I_m \sin(\omega t + \Psi_i)$ , то комплексную амплитуду записывают сначала в показательной форме, а затем (при необходимости) по формуле Эйлера переходят к алгебраической форме:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\Psi_i} = I_m \cos \Psi_i + j I_m \sin \Psi_i = I'_m + j I''_m.$$

Следует указать, что при сложении и вычитании комплексных чисел следует пользоваться алгебраической формой их записи, а при умножении и делении удобна показательная форма.

Итак, применение комплексных чисел позволяет перейти от геометрических операций над векторами к алгебраическим над комплексами.

Так при определении комплексной амплитуды результирующего тока  $\dot{I}_3$  по рисунку 42а получим:

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = I_1 e^{j\Psi_1} + I_2 e^{j\Psi_2} = I_1 (\cos \Psi_1 + j \sin \Psi_1) + I_2 (\cos \Psi_2 + j \sin \Psi_2) = \\ &= (I_1 \cos \Psi_1 + I_2 \cos \Psi_2) + j (I_1 \sin \Psi_1 + I_2 \sin \Psi_2) = I_3 \cos \Psi_3 + j I_3 \sin \Psi_3 = \\ &= I_3 e^{j\Psi_3}, \end{aligned}$$

где 
$$I_3 = \sqrt{(I_1 \cos \Psi_1 + I_2 \cos \Psi_2)^2 + (I_1 \sin \Psi_1 + I_2 \sin \Psi_2)^2};$$

$$\operatorname{tg} \Psi_3 = \frac{I_1 \sin \Psi_1 + I_2 \sin \Psi_2}{I_1 \cos \Psi_1 + I_2 \cos \Psi_2}.$$

Действующее значение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов в соответствии с выражением (43) для действующего значения синусоидального тока запишем:



$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{I_m^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{I_m^2 \cdot T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Аналогичный результат можно получить для синусоидальных ЭДС и напряжений. Таким образом, действующие значения синусоидальных тока, ЭДС и напряжения меньше своих амплитудных значений в  $\sqrt{2}$  раз:

$$X = \frac{X_m}{\sqrt{2}} \quad (50)$$

Поскольку, как будет показано далее, энергетический расчет цепей переменного тока обычно проводится с использованием действующих значений величин, по аналогии с предыдущим введем понятие комплекса действующего значения

$$\dot{E} = E e^{j\psi_e} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_e}$$

### Контрольные вопросы

1. Какой практический смысл имеет изображение синусоидальных величин с помощью векторов?
2. Какой практический смысл имеет представление синусоидальных величин с использованием комплексных чисел?
3. В чем заключаются преимущества изображения синусоидальных величин с помощью комплексов по сравнению с их векторным представлением?
4. Какое значение синусоидальной величины называют действующим?
5. Какое значение синусоидальной величины называют средним?

### 2.1.4 Элементы цепи синусоидального тока. Векторные диаграммы и комплексные соотношения для них

#### Резистор

Идеальный резистивный элемент не обладает ни индуктивностью, ни емкостью. Если к нему приложить синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  (см. рисунок 44), то ток  $I$  через него будет равен

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \Psi) = I_m \sin(\omega t + \Psi) \quad (51)$$

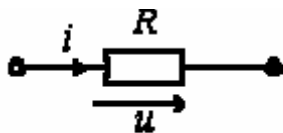


Рисунок 44 – Резистор

Соотношение (51) показывает, что ток имеет ту же начальную фазу, что и напряжение. Таким образом, если на входе двухлучевого осциллографа подать сигналы  $u$  и  $i$ , то соответствующие им синусоиды на его экране будут проходить (см. рисунок 45а) через нуль одновременно, т.е. **на резисторе напряжение и ток совпадают по фазе.**

Из (51) вытекает:

$$U_m = RI_m;$$

$$U = RI.$$

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим им комплексам:

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{U} = Ue^{j\Psi};$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{I} = Ie^{j\Psi},$$

- разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\Psi}}{Ie^{j\Psi}} = \frac{U}{I} = R$$

или

$$\dot{U} = R\dot{I}. \quad (52)$$

Полученный результат показывает, что отношение двух комплексов есть вещественная константа. Следовательно, соответствующие им векторы напряжения и тока (см. рисунок 45б) совпадают по направлению.

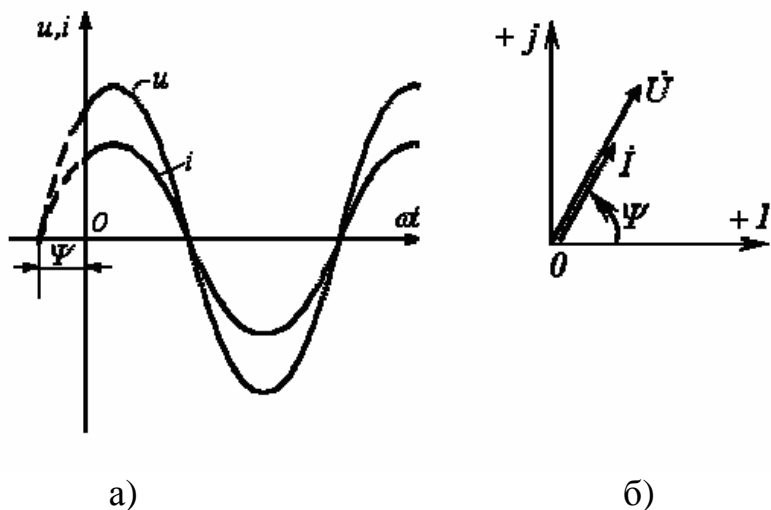


Рисунок 45 – Диаграммы тока и напряжения на резисторе

### Конденсатор

Идеальный емкостный элемент не обладает ни активным сопротивлением (проводимостью), ни индуктивностью. Если к нему приложить синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \Psi)$  (см. рисунок 46), то ток  $i$  через него будет равен

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (53)$$

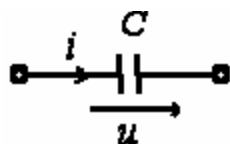


Рисунок 46 – Конденсатор

Полученный результат показывает, что **напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на  $\pi/2$** . Таким образом, если на входы двухлучевого осциллографа подать сигналы  $u$  и  $i$ , то на его экране будет иметь место картинка, соответствующая рисунку 47.

Из (53) вытекает:

$$U_m = \frac{I}{\omega C} I_m = X_C I_m;$$

$$U = \frac{I}{\omega C} I = X_C I.$$

Введенный параметр  $X_C = 1/(\omega C)$  называют **реактивным емкостным сопротивлением конденсатора**. Как и резистивное сопротивление,  $X_C$  имеет размерность **Ом**. Однако в отличие от  $R$  данный параметр является функцией частоты, что иллюстрирует рисунок 47б. Из рисунка 47б вытекает, что при  $f = 0$  конденсатор представляет разрыв для тока, а при  $f \rightarrow \infty$   $X_C = 0$ .

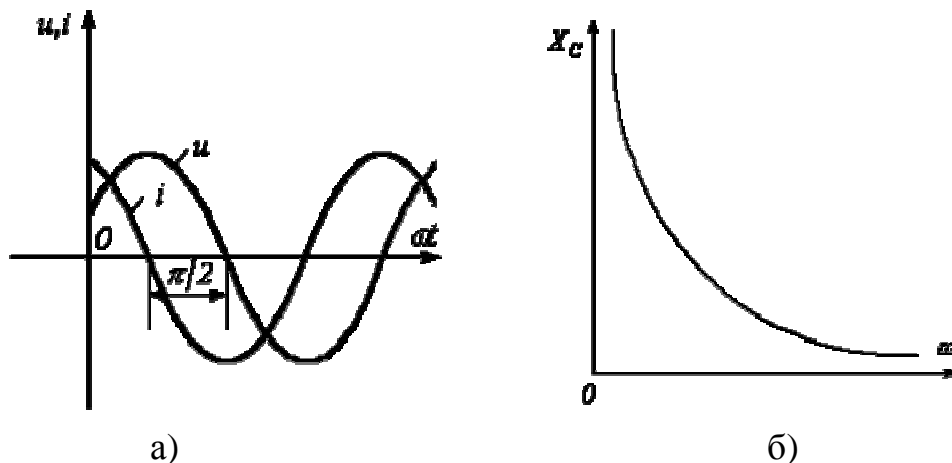


Рисунок 47 – Диаграммы тока и напряжения на конденсаторе

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим им комплексам:

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{U} = U e^{j\Psi};$$

$$i = I_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{i} = I e^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

- разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{i}} = \frac{U e^{j\Psi}}{I e^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{U e^{j\Psi}}{I e^{j\Psi} e^{j\frac{\pi}{2}}} = X_C e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jX_C = \underline{Z}_C$$

или

$$\dot{U} = -jX_C \dot{i} = \underline{Z}_C \dot{i} \quad (54)$$

В последнем соотношении  $\underline{Z}_C = -jX_C$  - комплексное сопротивление

конденсатора. Умножение на  $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$  соответствует повороту вектора на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке. Следовательно, уравнению (54) соответствует векторная диаграмма, представленная на рисунке 48.

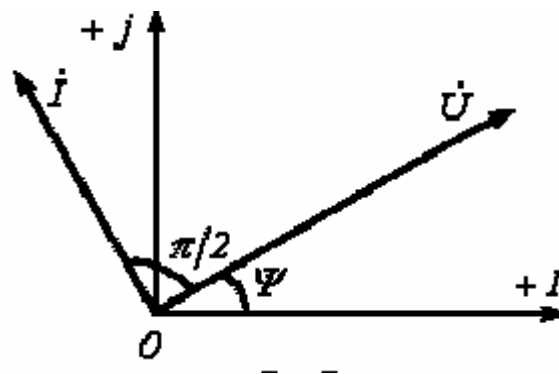


Рисунок 48 – Векторная диаграмма напряжения и тока на конденсаторе

### Катушка индуктивности

Идеальный индуктивный элемент не обладает ни активным сопротивлением, ни емкостью. Пусть протекающий через него ток (см. рисунок 49) определяется выражением  $i = I_m \sin(\omega t + \Psi)$ . Тогда для напряжения на зажимах катушки индуктивности можно записать

$$u = -e = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = \omega LI_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (55)$$

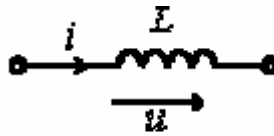


Рисунок 49- Катушка индуктивности

Полученный результат показывает, что **напряжение на катушке индуктивности опережает по фазе ток на  $\pi/2$** .

Таким образом, если на входы двухлучевого осциллографа подать сигналы  $u$  и  $i$ , то на его экране (идеальный индуктивный элемент) будет иметь место картинка, соответствующая рисунку 50,а.

Из (55) вытекает:

$$U_m = \omega LI_m = X_L I_m;$$

$$U = \omega LI = X_L I.$$

Введенный параметр  $X_L = \omega L$  называют **реактивным индуктивным сопротивлением катушки**; его размерность – Ом. Как и у емкостного элемента, этот параметр является функцией частоты. Однако в данном случае эта зависимость имеет линейный характер, что иллюстрирует рисунок 50б. Из рисунка 50,б вытекает, что при  $f = 0$  катушка индуктивности не оказывает сопротивления протекающему через него току, и при  $f \rightarrow \infty$   $X_L \rightarrow \infty$ .

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим комплексам:

$$u = U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{U} = U e^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)};$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{I} = I e^{j\Psi},$$

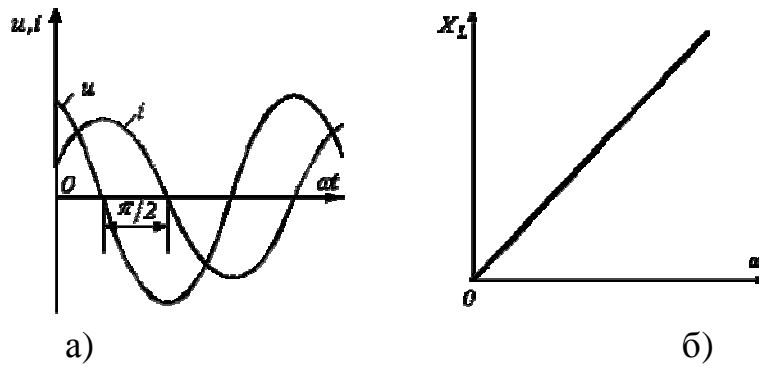


Рисунок 50 – Диаграммы тока и напряжения на индуктивности

разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j(\psi + \frac{\pi}{2})}}{I e^{j\psi}} = \frac{U e^{j\psi} e^{j\frac{\pi}{2}}}{I e^{j\psi}} = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L = \underline{Z}_L$$

или

$$\dot{U} = jX_L \dot{I} = \underline{Z}_L \dot{I} \quad (56)$$

В полученном соотношении  $\underline{Z}_L = jX_L$  - комплексное

сопротивление катушки индуктивности. Умножение на  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$  соответствует повороту вектора на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки. Следовательно, уравнению (56) соответствует векторная диаграмма, представленная на рисунке 51.

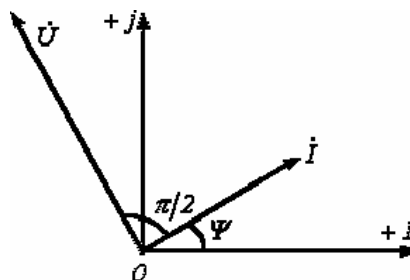


Рисунок 51 - Векторная диаграмма напряжения и тока на катушке индуктивности

## Последовательное соединение резистивного и индуктивного элементов

Пусть в ветви на рисунке 52  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ .

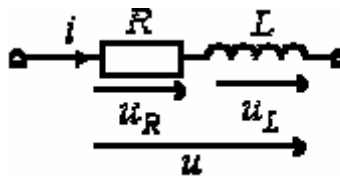


Рисунок 52- Последовательное соединение резистивного и индуктивного элементов

Тогда

$$\begin{aligned}
 u &= u_R + u_L = RI_m \sin(\omega t + \varphi) + \omega LI_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\
 &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m \sin\left(\omega t + \varphi + \arctg \frac{\omega L}{R}\right) = \\
 &= U_m \sin(\omega t + \varphi + \Psi),
 \end{aligned}
 \tag{57}$$

где

$$U_m = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m = Z I_m; \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \Psi = \arctg \frac{\omega L}{R},$$

причем пределы изменения  $\Psi: 0 < \Psi < \frac{\pi}{2}$ .

Уравнению (57) можно поставить в соответствие соотношение

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = R\dot{i} + jX_L\dot{i} = (R + jX_L)\dot{i} = \underline{Z}\dot{i},$$



которому, в свою очередь, соответствует векторная диаграмма на рисунке 53а. Векторы на рисунке 53а образуют фигуру, называемую **треугольником напряжений**.

Аналогично выражение

$$\underline{Z} = R + jX_L = \sqrt{R^2 + X_L^2} e^{j\Psi} = Ze^{j\Psi}$$

графически может быть представлено **треугольником сопротивлений** (см. рисунок 53б), который подобен треугольнику напряжений.

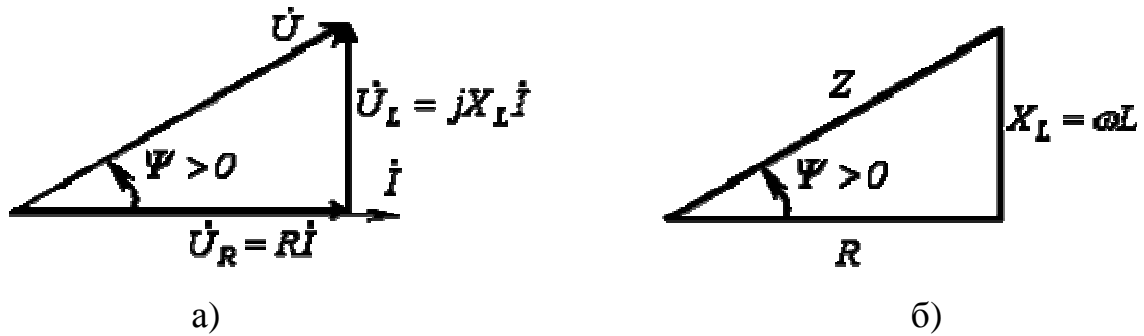


Рисунок 53 – Треугольники напряжений и сопротивлений

### Последовательное соединение резистивного и емкостного элементов

Опуская промежуточные выкладки, с использованием соотношений (52) и (54) для ветви на рисунке 54 можно записать

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C = RI - jX_C \dot{I} = (R - jX_C) \dot{I} = \underline{Z} \dot{I}, \quad (58)$$

где

$$\underline{Z} = R - jX_C = \sqrt{R^2 + X_C^2} e^{j\Psi} = Ze^{j\Psi}; \quad \Psi = -\arctg \frac{X_C}{R} = -\arctg \frac{1}{\omega CR},$$

причем пределы изменения  $\Psi : -\frac{\pi}{2} < \Psi < 0$ .

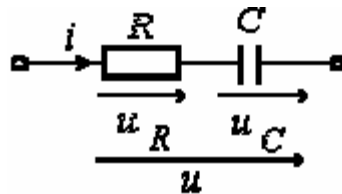


Рисунок 54- Последовательное соединение резистивного и емкостного элементов

На основании уравнения (57) могут быть построены треугольники напряжений (см. рисунок 55а) и сопротивлений (см. рисунок 55б), которые являются подобными.



Рисунок 55 –Треугольники напряжений и сопротивлений

### Параллельное соединение резистивного и емкостного элементов

Для цепи на рисунке 56 имеют место соотношения:

$$U = U_R = U_C ;$$

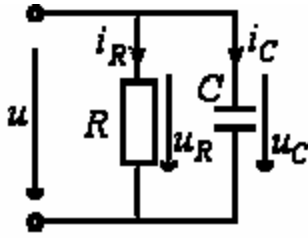


Рисунок 56 - Параллельное соединение резистивного  
и емкостного элементов

$$I_R = \frac{U_R}{R} = gU,$$

где  $g = \frac{1}{R}$  [См] – активная проводимость;

$$I_C = \frac{U_C}{X_C} = b_C U,$$

где  $b_C = \frac{1}{X_C}$  [См] – реактивная проводимость конденсатора.

Векторная диаграмма токов для данной цепи, называемая **треугольником токов**, приведена на рисунке 57а. Ей соответствует уравнение в комплексной форме

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C = g\dot{U} + jb_C\dot{U} = (g + jb_C)\dot{U} = \underline{Y}\dot{U} = Ie^{-j\Psi},$$

где  $I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$ ;

$$\underline{Y} = g + jb_C = \frac{1}{R} + j\omega C = Ye^{-j\Psi} \quad \text{- комплексная проводимость;}$$

$$\Psi = -\arctg \frac{b_C}{g} = -\arctg \omega CR$$

Треугольник проводимостей, подобный треугольнику токов, приведен на рисунке 57б.

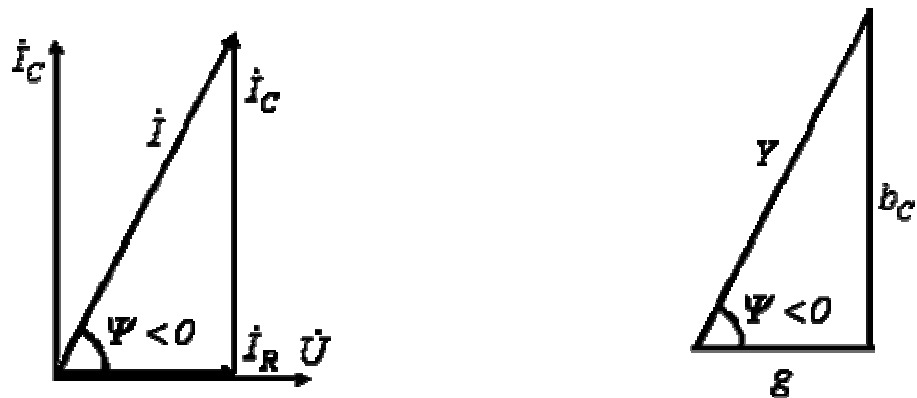


Рисунок 57- Треугольники токов и проводимостей

Для комплексного сопротивления цепи на рисунке 56 можно записать

$$\underline{Z} = \frac{I}{\underline{Y}} = \frac{I}{g + jb_C} = \frac{I}{\frac{I}{R} + \frac{I}{-jX_C}} = \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}$$

Необходимо отметить, что полученный результат аналогичен известному из курса физики выражению для эквивалентного сопротивления двух параллельно соединенных резисторов.

### Параллельное соединение резистивного и индуктивного элементов

Для цепи на рисунке 58 можно записать

$$U = U_R = U_L;$$

$$I_R = \frac{U_R}{R} = gU,$$

где  $g = \frac{1}{R}$  [См] – активная проводимость;

$$I_L = \frac{U_L}{X_L} = b_L U ,$$

где  $b_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$  [См] – реактивная проводимость катушки индуктивности.

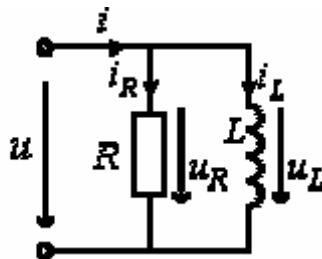


Рисунок 58- Параллельное соединение резистивного и индуктивного элементов

Векторной диаграмме токов (рисунок 59а) для данной цепи соответствует уравнение в комплексной форме

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L = g\dot{U} - jb_L\dot{U} = (g - jb_L)\dot{U} = \underline{Y}\dot{U} = Ie^{-j\Psi} ,$$

где  $I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$  ;

$$\underline{Y} = g - jb_L = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} = Ye^{-j\Psi} \quad \text{- комплексная проводимость;}$$

$$\Psi = \arctg \frac{b_L}{g} = \arctg \frac{R}{\omega L} .$$

**Треугольник проводимостей**, подобный треугольнику токов, приведен на рисунке 59б.

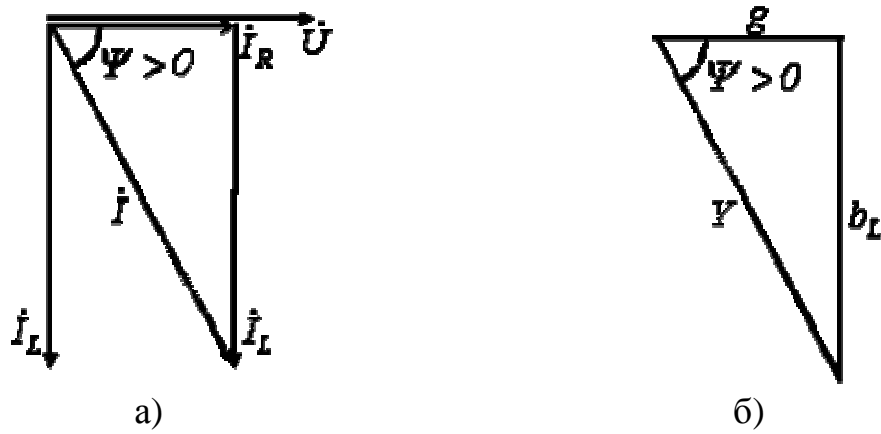


Рисунок 59–Треугольники токов и проводимостей

Выражение комплексного сопротивления цепи на рисунке 58 имеет вид:

$$\underline{Z} = \frac{I}{\underline{Y}} = \frac{I}{g - jb_L} = \frac{I}{\frac{I}{R} + \frac{I}{jX_L}} = \frac{RjX_L}{R + jX_L}$$

### 2.1.5 Закон Ома для участка цепи с источником ЭДС

Возьмем два участка цепи  $a-b$  и  $c-d$  (см. рисунок 60) и составим для них уравнения в комплексной форме с учетом указанных положительных направлений напряжений и токов.



Рисунок 60– Участки цепи, содержащие ЭДС

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_a &= \dot{\phi}_b + \dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1; & \dot{\phi}_c &= \dot{\phi}_d + \dot{E}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_2; \\ \dot{U}_{ab} &= \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b = \dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1; & \dot{U}_{cd} &= \dot{\phi}_c - \dot{\phi}_d = \dot{E}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_2; \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_1}. & \dot{I}_2 &= \frac{-\dot{E}_2 + \dot{U}_{cd}}{\underline{Z}_2}.\end{aligned}$$

Объединяя оба случая, получим

$$\dot{I} = \frac{\pm \dot{E} \mp \dot{U}}{\underline{Z}} \quad (59)$$

или для постоянного тока

$$I = \frac{\pm E \mp U}{R} \quad (60)$$

Формулы (59) и (60) являются **аналитическим выражением закона Ома для участка цепи с источником ЭДС**, согласно которому ток на участке цепи с источником ЭДС равен алгебраической сумме напряжения на зажимах участка цепи и ЭДС, деленной на сопротивление участка. В случае переменного тока все указанные величины суть комплексы. При этом ЭДС и напряжение берут со знаком “+”, если их направление совпадает с выбранным направлением тока, и со знаком “-”, если их направление противоположно направлению тока.

### 2.1.6 Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока

Расчет цепей переменного синусоидального тока может производиться не только путем построения векторных диаграмм, но и аналитически – путем операций с комплексами, **символически изображающими** синусоидальные ЭДС, напряжения и токи. Достоинством векторных диаграмм является их наглядность, недостатком – малая точность графических построений. Применение символического метода позволяет производить расчеты цепей с большой степенью точности.

Символический метод расчета цепей синусоидального тока основан на законах Кирхгофа и законе Ома в комплексной форме.

Уравнения, выражающие законы Кирхгофа в комплексной форме, имеют совершенно такой же вид, как и соответствующие уравнения для цепей постоянного тока. Только токи, ЭДС, напряжения и сопротивления входят в уравнение в виде комплексных величин.

1. Первый закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum \dot{I} = 0. \quad (61)$$

2. Второй закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum \dot{U} = 0 \quad (62)$$

или применительно к схемам замещения с источниками ЭДС

$$\sum \underline{Z} \dot{I} = \sum \dot{E}. \quad (63)$$

3. Соответственно матричная запись законов Кирхгофа в комплексной форме имеет вид:

первый закон Кирхгофа:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}; \quad (64)$$

второй закон Кирхгофа

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}. \quad (65)$$

### Пример.2.1

Дано: Для схемы, приведенной на рисунке 61, используя символический метод определить токи в ветвях и полное сопротивление цепи. Параметры

схемы:  $U = 120 \text{ В}; X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = 100 \text{ Ом}; X_{L2} = \omega L_2 = 50 \text{ Ом};$



$$X_{C3} = \frac{l}{\omega C_3} = 50 \text{ Ом}; \quad R_1 = 25 \text{ Ом}; \quad R_2 = 20 \text{ Ом}.$$

Определить:

- 1) полное комплексное сопротивление цепи  $\underline{Z}$ ;
- 2) токи  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ .

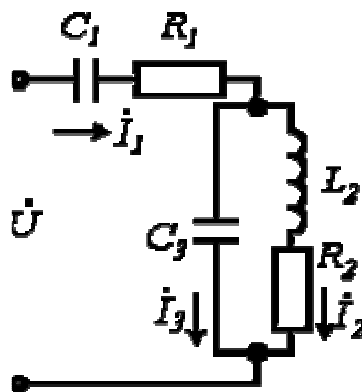


Рисунок 61– Расчетная схема

**Решение.**

1. Записываем сопротивление второй ветви в комплексной форме:

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 20 + j50 \text{ Ом}.$$

2. Находим эквивалентное сопротивление параллельных ветвей:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{-jX_{C3} \cdot \underline{Z}_2}{-jX_{C3} + \underline{Z}_2} = \frac{-j50(20 + j50)}{-j50 + 20 + j50} = 125 - j50 \text{ Ом}.$$

3. Рассчитываем эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= -jX_{C1} + R_1 + \underline{Z}_{23} = -j100 + 25 + 125 - j50 = \\ &= 150 - j150 = \sqrt{2} \cdot 150 e^{-j45^\circ} = 211,5 e^{-j45^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

4. Принимая начальную фазу напряжения за нуль, запишем:

$$\dot{U} = U e^{j0} = 120.$$

Тогда

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{120}{211,5 e^{-j45^\circ}} = 0,57 e^{j45^\circ} = 0,4 + j0,4 \text{ (A)}$$

5. Поскольку ток распределяется обратно пропорционально сопротивлению ветвей (это вытекает из закона Ома), то

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{I}_1 \frac{-jX_{C3}}{-jX_{C3} + \underline{Z}_2} = 0,57 e^{j45^\circ} \frac{-j50}{-j50 + 20 + j50} = 0,57 e^{j45^\circ} (-2,5j) = \\ &= 0,57 e^{j45^\circ} \cdot 2,5 e^{-j90^\circ} = 1,43 e^{-j45^\circ} = 1 - j \text{ (A)}. \end{aligned}$$

6. Ток в третьей ветви определяем по закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0,4 + j0,4 - 1 + j = -0,6 + j1,4 \text{ (A)}.$$

7. Аналогичный результат можно получить, составив для данной схемы уравнения по законам Кирхгофа в комплексной форме

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 &= 0; \\ \dot{I}_1(-jX_{C1} + R_1) + \dot{I}_3(-jX_{C3}) &= \dot{U}; \\ \dot{I}_3(-jX_{C3}) - \dot{I}_2(R_2 + jX_{L2}) &= 0 \end{aligned}$$

или после подстановки численных значений параметров схемы.

### Контрольные вопросы

1. В чем сущность реактивных сопротивлений?
2. Какой из элементов: резистор, катушку индуктивности или конденсатор – можно использовать в качестве шунта для наблюдения за формой тока?
3. Почему катушки индуктивности и конденсаторы не используются в цепях постоянного тока?
4. Какие основные достоинства символического метода?
5. Какие методы расчета можно применять при расчете символическим методом?

## 2.2 Специальные методы расчета

Режим работы любой цепи полностью характеризуется уравнениями, составленными на основании законов Кирхгофа. При этом необходимо составить и решить систему с  $n$  неизвестными, что может оказаться весьма трудоемкой задачей при большом числе  $n$  ветвей схемы. Однако, число уравнений, подлежащих решению, может быть сокращено, если воспользоваться **специальными методами расчета**, к которым относятся методы контурных токов и узловых потенциалов.

### Метод контурных токов

Идея метода контурных токов: уравнения составляются только по второму закону Кирхгофа, но не для действительных, а для воображаемых токов, циркулирующих по замкнутым контурам, т.е. в случае выбора главных контуров равных токам ветвей связи. Число уравнений равно числу независимых контуров, т.е. числу ветвей связи графа  $C = n - m + 1$ . Первый закон Кирхгофа выполняется автоматически. Контурные токи можно выбирать произвольно, лишь бы их число было равно  $C$  и чтобы каждый новый контур содержал хотя бы одну ветвь, не входящую в предыдущие. Такие контуры называются независимыми. Их выбор облегчает использование топологических понятий дерева и ветвей связи.

Направления истинных и контурных токов выбираются произвольно. Выбор положительных направлений перед началом расчета может не определять действительные направления токов в цепи. Если в результате расчета какой-либо из токов, как и при использовании уравнений по законам Кирхгофа, получится со знаком “-”, это означает, что его истинное направление противоположно.

### Пример 2.2

Для электрической цепи, представленной на рисунке 62, определить токи в ветвях методом контурных токов.

#### Решение.

Выразим токи ветвей через контурные токи:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{44} - \dot{I}_{11}; \quad \dot{I}_3 = -\dot{I}_{33};$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_{22}; \quad \dot{I}_5 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}; \quad \dot{I}_6 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{33};$$

$$\dot{I}_7 = \dot{I}_{33} - \dot{I}_{44}; \quad \dot{I}_8 = \dot{I}_{44}.$$

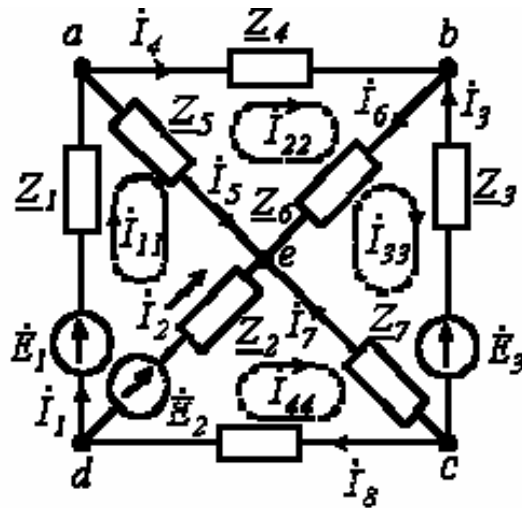


Рисунок 62 – Расчетная схема

Обойдя контур  $aeda$ , по второму закону Кирхгофа имеем

$$\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_5 \dot{I}_5 - \underline{Z}_2 \dot{I}_2 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2.$$

Поскольку  $\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}$ ;  $\dot{I}_5 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}$ ;  $\dot{I}_2 = \dot{I}_{44} - \dot{I}_{11}$ ,

то

$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5) \dot{I}_{11} - \underline{Z}_5 \dot{I}_{22} + 0 \cdot \dot{I}_{33} - \underline{Z}_2 \dot{I}_{44} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2.$$

Таким образом, получили уравнение для первого контура относительно контурных токов. Аналогично можно составить уравнения для второго, третьего и четвертого контуров:

$$\begin{aligned} -\underline{Z}_5 \dot{I}_{11} + (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) \dot{I}_{22} - \underline{Z}_6 \dot{I}_{33} - 0 \cdot \dot{I}_{44} &= 0; \\ 0 \cdot \dot{I}_{11} - \underline{Z}_6 \dot{I}_{22} + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_7) \dot{I}_{33} - \underline{Z}_7 \dot{I}_{44} &= -\dot{E}_3; \\ -\underline{Z}_2 \dot{I}_{11} + 0 \cdot \dot{I}_{22} - \underline{Z}_7 \dot{I}_{33} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_7 + \underline{Z}_8) \dot{I}_{44} &= \dot{E}_2, \end{aligned}$$

Совместно с первым решить их относительно контурных токов и затем по уравнениям, связывающим контурные токи и токи ветвей, найти последние.

Однако данная система уравнений может быть составлена формальным путем:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{11}\dot{I}_{11} - \underline{Z}_{12}\dot{I}_{22} - \underline{Z}_{13}\dot{I}_{33} - \underline{Z}_{14}\dot{I}_{44} &= \dot{E}_{11} \\
-\underline{Z}_{21}\dot{I}_{11} + \underline{Z}_{22}\dot{I}_{22} - \underline{Z}_{23}\dot{I}_{33} - \underline{Z}_{24}\dot{I}_{44} &= \dot{E}_{22}; \\
-\underline{Z}_{31}\dot{I}_{11} - \underline{Z}_{32}\dot{I}_{22} + \underline{Z}_{33}\dot{I}_{33} - \underline{Z}_{34}\dot{I}_{44} &= \dot{E}_{33}; \\
-\underline{Z}_{41}\dot{I}_{11} - \underline{Z}_{42}\dot{I}_{22} - \underline{Z}_{43}\dot{I}_{33} + \underline{Z}_{44}\dot{I}_{44} &= \dot{E}_{44}.
\end{aligned}$$

При составлении уравнений необходимо помнить следующее:

$\underline{Z}_{ii}$  - сумма сопротивлений, входящих в  $i$ -й контур;

$\underline{Z}_{ik}$  - сумма сопротивлений, общих для  $i$ -го и  $k$ -го контуров, причем  $\underline{Z}_{ik} = \underline{Z}_{ki}$ ;

члены на главной диагонали всегда пишутся со знаком “+”;

знак “+” перед остальными членами ставится в случае, если через общее сопротивление  $\underline{Z}_{ik}$   $i$ -й и  $k$ -й контурные токи проходят в одном направлении, в противном случае ставится знак “-”;

если  $i$ -й и  $k$ -й контуры не имеют общих сопротивлений, то  $\underline{Z}_{ik} = 0$ ;

в правой части уравнений записывается алгебраическая сумма ЭДС, входящих в контур: со знаком “+”, если направление ЭДС совпадает с выбранным направлением контурного тока, и “-”, если не совпадает.

В нашем случае, для первого уравнения системы, имеем:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5; \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_5; \quad \underline{Z}_{13} = 0; \quad \underline{Z}_{14} = \underline{Z}_2; \quad \dot{E}_{11} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2.$$

Следует обратить внимание на то, что, поскольку  $\underline{Z}_{ik} = \underline{Z}_{ki}$ , коэффициенты контурных уравнений всегда симметричны относительно главной диагонали.

Если в цепи содержатся помимо источников ЭДС источники тока, то они учитываются в левых частях уравнений как известные контурные токи:  $k$ -й контурный ток, проходящий через ветвь с  $k$ -м источником тока равен этому току ( $\dot{I}_{kk} = \dot{J}_k$ ).

### Метод узловых потенциалов

Данный метод вытекает из первого закона Кирхгофа. В качестве неизвестных принимаются потенциалы узлов, по найденным значениям

которых с помощью закона Ома для участка цепи с источником ЭДС затем находят токи в ветвях. Поскольку потенциал – величина относительная, потенциал одного из узлов (любого) принимается равным нулю. Таким образом, число неизвестных потенциалов, а следовательно, и число уравнений равно  $(m - 1)$ , т.е. числу ветвей дерева  $\partial$ .

### Пример 2.3

Для электрической цепи, представленной на рисунке 63, определить токи в ветвях методом узловых потенциалов, в которой примем  $\phi_c = 0$ .

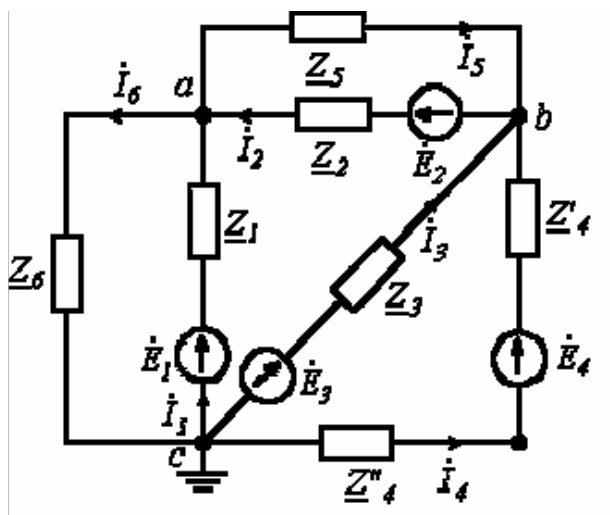


Рисунок 63– Расчетная схема

### Решение.

Допустим, что  $\phi_a$  и  $\phi_b$  известны. Тогда значения токов на основании закона Ома для участка цепи с источником ЭДС

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \phi_a}{Z_1} = (\dot{E}_1 - \phi_a) Y_1; \\ \dot{I}_2 &= (\phi_b - \phi_a + \dot{E}_2) Y_2; \\ \dot{I}_3 &= (\dot{E}_3 - \phi_b) Y_3; \\ \dot{I}_4 &= (\dot{E}_4 - \phi_b) Y_4, \quad \text{где } Y_4 = \frac{1}{Z'_4 + Z''_4}; \\ \dot{I}_5 &= (\phi_a - \phi_b) Y_5; \\ \dot{I}_6 &= \phi_a Y_6. \end{aligned} \right\}$$

Запишем уравнение по первому закону Кирхгофа для узла  $a$ :

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_5 - \dot{I}_6 = 0,$$

и подставим значения входящих в него токов, определенных выше:

$$(\dot{E}_1 - \dot{\phi}_a) \underline{Y}_1 + (\dot{\phi}_b - \dot{\phi}_a + \dot{E}_2) \underline{Y}_2 - (\dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b) \underline{Y}_5 - \dot{\phi}_a \underline{Y}_6 = 0.$$

Сгруппировав соответствующие члены, получим:

$$(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6) \dot{\phi}_a - (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_5) \dot{\phi}_b = \dot{E}_1 \underline{Y}_1 + \dot{E}_2 \underline{Y}_2.$$

Аналогично можно записать для узла  $b$ :

$$-(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_5) \dot{\phi}_a + (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) \dot{\phi}_b = \dot{E}_3 \underline{Y}_3 + \dot{E}_4 \underline{Y}_4 - \dot{E}_2 \underline{Y}_2.$$

Как и по методу контурных токов, система уравнений по методу узловых потенциалов может быть составлена формальным путем. При этом необходимо руководствоваться следующими правилами:

1. В левой части  $i$ -го уравнения записывается со знаком “+” потенциал  $\dot{\phi}_i$   $i$ -го узла, для которого составляется данное  $i$ -е уравнение, умноженный на сумму проводимостей  $\underline{Y}_{in}$  ветвей, присоединенных к данному  $i$ -му узлу, и со знаком “-” потенциал  $\dot{\phi}_k$  соседних узлов, каждый из которых умножен на сумму проводимостей  $\underline{Y}_{ik}$  ветвей, присоединенных к  $i$ -му и  $k$ -му узлам.

Из сказанного следует, что все члены  $\dot{\phi}_i \underline{Y}_{in}$ , стоящие на главной диагонали в левой части системы уравнений, записываются со знаком “+”, а все остальные – со знаком “-”, причем  $\underline{Y}_{ik} = \underline{Y}_{ki}$ . Последнее равенство по аналогии с методом контурных токов обеспечивает симметрию коэффициентов уравнений относительно главной диагонали.

2. В правой части  $i$ -го уравнения записывается так называемый узловый ток  $\dot{J}_i$ , равный сумме произведений ЭДС ветвей, подходящих к  $i$ -му узлу, и проводимостей этих ветвей. При этом член суммы записывается со знаком “+”, если соответствующая ЭДС направлена к  $i$ -му узлу, в противном случае ставится знак “-”. Если в подходящих к  $i$ -му узлу ветвях содержатся источники тока, то знаки токов источников токов, входящих в узловую ток простыми слагаемыми, определяются аналогично.

В заключение отметим, что выбор того или иного из рассмотренных методов определяется тем, что следует найти, а также тем, какой из них

обеспечивает меньший порядок системы уравнений. При расчете токов при одинаковом числе уравнений предпочтительнее использовать метод контурных токов, так как он не требует дополнительных вычислений с использованием закона Ома. Метод узловых потенциалов очень удобен при расчетах многофазных цепей, но не удобен при расчете цепей со взаимной индуктивностью.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность символического метода расчета цепей синусоидального тока?
2. В чем состоит сущность метода контурных токов?
3. В чем состоит сущность метода узловых потенциалов?
4. Как определяются действительные токи через контурные токи?
5. В чем отличие узловых токов от действительных?

### 2.3 Преобразование энергии в электрической цепи. Мгновенная, активная, реактивная и полная мощности синусоидального тока

Передача энергии  $w$  по электрической цепи (например, по линии электропередачи), рассеяние энергии, то есть переход электромагнитной энергии в тепловую, а также и другие виды преобразования энергии характеризуются интенсивностью, с которой протекает процесс, то есть тем, сколько энергии передается по линии в единицу времени, сколько энергии рассеивается в единицу времени. Интенсивность передачи или преобразования энергии называется мощностью  $p$ . Сказанному соответствует математическое определение:

$$p = \frac{dw}{dt} \quad (66)$$

Выражение для мгновенного значения мощности в электрических цепях имеет вид:

$$p = ui \quad (67)$$

Приняв начальную фазу напряжения за нуль, а сдвиг фаз между напряжением и током за  $-\varphi$ , получим:



$$\begin{aligned}
 p &= ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \\
 &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \quad (68)
 \end{aligned}$$

Итак, мгновенная мощность имеет постоянную составляющую и гармоническую составляющую, угловая частота которой в 2 раза больше угловой частоты напряжения и тока.

Когда мгновенная мощность отрицательна, а это имеет место (см. рисунок 64), когда  $u$  и  $i$  разных знаков, т.е. когда направления напряжения и тока в двухполюснике противоположны, энергия возвращается из двухполюсника источнику питания.

Такой возврат энергии источнику происходит за счет того, что энергия периодически запасается в магнитных и электрических полях соответственно индуктивных и емкостных элементов, входящих в состав двухполюсника.

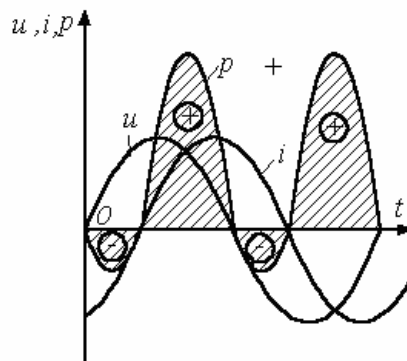


Рисунок 64 – Графики напряжения, тока и мощности

Энергия, отдаваемая источником двухполюснику в течение

времени  $t$  равна  $\int_0^t p dt$ .

Среднее за период значение мгновенной мощности называется

активной мощностью  $P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt \text{ (Вт)}$ .

Принимая во внимание, что  $\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = 0$ , из (3) получим:

$$P = UI \cos \varphi \quad (69)$$

Активная мощность, потребляемая пассивным двухполюсником, не может быть отрицательной (иначе двухполюсник будет генерировать энергию),

поэтому  $\cos \varphi \geq 0$ , т.е. на входе пассивного двухполюсника  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Случай  $P=0$ ,  $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} \right|$  теоретически возможен для двухполюсника, не имеющего активных сопротивлений, а содержащего только идеальные индуктивные и емкостные элементы.

### Резистор (идеальное активное сопротивление).

Здесь напряжение и ток (см. рисунок 65) совпадают по фазе ( $\varphi = 0$ ), поэтому мощность  $P = ui$  всегда положительна, т.е. резистор потребляет активную мощность

$$\begin{aligned} P &= UI \cos \varphi = |\cos 0 = 1| = UI = \\ &= RI^2 = \frac{U^2}{R}. \end{aligned}$$

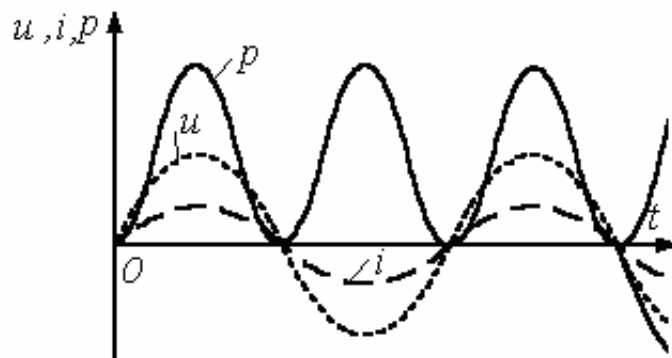


Рисунок 65- Графики напряжения, тока и мощности на резисторе

### Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)

При идеальной индуктивности ток отстает от напряжения по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ . Поэтому в соответствии с (68) можно записать

$$\begin{aligned}
 p &= U_L I_L \cos \frac{\pi}{2} - \\
 &- U_L I_L \cos \left( 2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= -U_L I_L \sin 2\omega t.
 \end{aligned}$$

$$\frac{L I^2}{2}$$

Участок 1-2: энергия  $\frac{L I^2}{2}$ , запасаемая в магнитном поле катушки, нарастает.

Участок 2-3: энергия магнитного поля убывает, возвращаясь в источник  
рисунок бб.

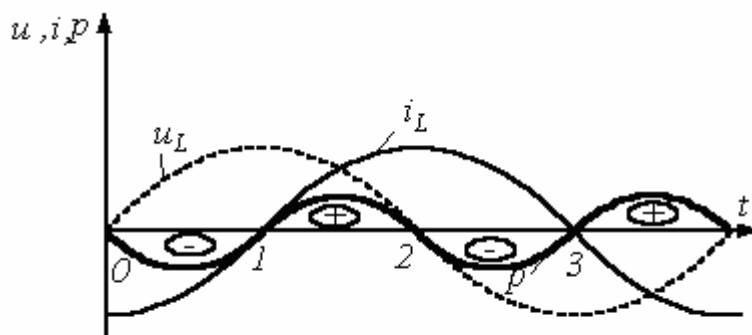


Рисунок бб- Графики напряжения, тока и мощности на катушке индуктивности

### Конденсатор (идеальная емкость)

Аналогичный характер имеют процессы и для идеальной емкости.

Здесь  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ . Поэтому из (2.52) вытекает, что  $p = U_C I_C \sin 2\omega t$ . Таким образом, в катушке индуктивности и конденсаторе активная мощность не потребляется ( $P=0$ ), так как в них не происходит необратимого преобразования энергии в другие виды энергии. Здесь происходит только циркуляция энергии: электрическая энергия запасается в магнитном поле катушки или электрическом поле конденсатора на протяжении четверти периода, а на протяжении следующей четверти периода энергия вновь возвращается в сеть. В силу этого катушку индуктивности и конденсатор называют реактивными элементами, а их сопротивления  $X_L$  и  $X_C$ , в отличие от активного сопротивления  $R$  резистора, – реактивными.

Интенсивность обмена энергии принято характеризовать наибольшим значением скорости поступления энергии в магнитное поле катушки или электрическое поле конденсатора, которое называется **реактивной мощностью**.

В общем случае выражение для реактивной мощности имеет вид:

$$Q = UI \sin \varphi \quad (70)$$

Она положительна при отстающем токе (индуктивная нагрузка-  $\varphi > 0$ ) и отрицательна при опережающем токе (емкостная нагрузка-  $\varphi < 0$ ). Единицу мощности в применении к измерению реактивной мощности называют **вольт-ампер реактивный** (ВАр).

В частности для катушки индуктивности имеем:

$$Q_L = UI \sin \varphi = UI, \text{ так как } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$Q_L = UI = \omega LI^2 = \omega L \frac{I_m^2}{2} = \omega \left[ \frac{LI_m^2}{2} \right].$$

Из последнего видно, что реактивная мощность для идеальной катушки индуктивности пропорциональна частоте и максимальному запасу энергии в катушке. Аналогично можно получить для идеального конденсатора:

$$|Q_C| = \omega \left[ \frac{CI_m^2}{2} \right].$$

### Полная мощность

Помимо понятий активной и реактивной мощностей в электротехнике широко используется понятие **полной мощности**:

$$S = UI \quad (\text{ВА}) \quad (71)$$

Активная, реактивная и полная мощности связаны следующим соотношением:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (72)$$

Отношение активной мощности к полной называют **коэффициентом мощности**. Из приведенных выше соотношений видно, что коэффициент мощности  $\cos \varphi$  равен косинусу угла сдвига между током и напряжением.

Итак,

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}. \quad (73)$$

### Комплексная мощность

Активную, реактивную и полную мощности можно определить, пользуясь комплексными изображениями напряжения и тока. Пусть  $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$ , а  $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$ . Тогда комплекс полной мощности:

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^*, \quad (74)$$

где  $\dot{I}^*$  - комплекс, сопряженный с комплексом  $\dot{I}$ .

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j\varphi} = |\varphi = \psi_u - \psi_i| = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

Комплексной мощности можно поставить в соответствие треугольник мощностей (см. рисунок 67).

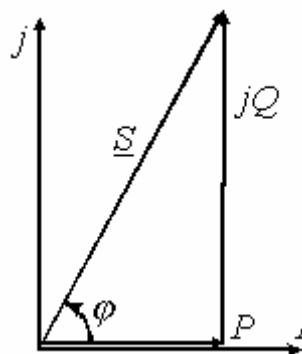


Рисунок 67 – Треугольник мощностей

Рисунку 67 соответствует  $\cos \varphi > 0$  (активно-индуктивная нагрузка).

## Применение статических конденсаторов для повышения $\cos \varphi$

Как уже указывалось, реактивная мощность

$\underline{Z} = R + jX$ ;  $\dot{U} = \underline{Z}\dot{I}$ ;  $\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* = \underline{Z}\dot{I}^2 = RI^2 + jXI^2$  циркулирует между источником и потребителем. Реактивный ток, не совершая полезной работы, приводит к дополнительным потерям в силовом оборудовании и, следовательно, к завышению его установленной мощности. В этой связи понятно стремление к увеличению  $\cos \varphi$  в силовых электрических цепях.

Следует указать, что подавляющее большинство потребителей (электродвигатели, электрические печи, другие различные устройства и приборы) как нагрузка носит активно-индуктивный характер.

Если параллельно такой нагрузке  $Z_H$  (см. рисунок 68а), включить конденсатор  $C$ , то общий ток  $\dot{I}$ , как видно из векторной диаграммы (рисунок 68б), приближается по фазе к напряжению, т.е.  $\cos \varphi$  увеличивается, а общая величина тока (а следовательно, потери) уменьшается при постоянстве активной мощности  $P = UI \cos \varphi$ . На этом основано применение конденсаторов для повышения  $\cos \varphi$ .

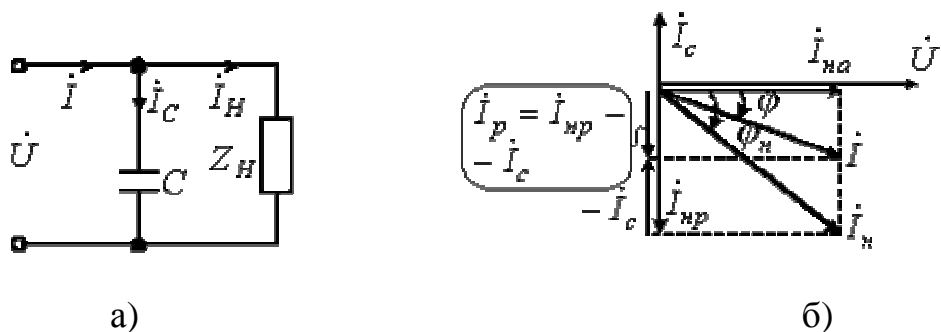


Рисунок 68 – Компенсация реактивной мощности:

- а) Принципиальная схема компенсации реактивной мощности;
- б) Векторная диаграмма, поясняющая компенсацию реактивной мощности

Какую емкость  $C$  нужно взять, чтобы повысить коэффициент мощности от значения  $\cos \varphi_n$  до значения  $\cos \varphi > \cos \varphi_n$ ?

Разложим  $\dot{I}_n$  на активную  $I_{на} = I_n \cos \varphi_n$  и реактивную  $I_{np} = I_n \sin \varphi_n$  составляющие. Ток через конденсатор  $\dot{I}_c$  компенсирует часть реактивной составляющей тока нагрузки  $\dot{I}_n$ :

$$I_p = I_{np} - I_c, \quad (75)$$

$$I_{np} = I_{на} \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{P_n}{U} \operatorname{tg} \varphi_n; \quad (76)$$

$$I_p = I_{на} \operatorname{tg} \varphi = \frac{P_n}{U} \operatorname{tg} \varphi. \quad (77)$$

Из (76) и (77) с учетом (75) имеем

$$I_c = \frac{P_n}{U} (\operatorname{tg} \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi),$$

но  $I_c = \omega C U$ , откуда необходимая для повышения  $\cos \varphi$  емкость:

$$C = \frac{P_n}{U^2 \omega} (\operatorname{tg} \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi). \quad (78)$$

## Баланс мощностей

Баланс мощностей является следствием закона сохранения энергии и может служить критерием правильности расчета электрической цепи.

а) Постоянный ток

Для любой цепи постоянного тока выполняется соотношение:

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \quad (79)$$

Это уравнение представляет собой математическую форму записи баланса мощностей: суммарная мощность, генерируемая источниками электрической энергии, равна суммарной мощности, потребляемой в цепи. Следует указать, что в левой части (79) слагаемые имеют знак “+”, поскольку активная мощность рассеивается на резисторах. В правой части (79) сумма слагаемых больше нуля, но отдельные члены здесь могут иметь знак “-”, что говорит о том, что соответствующие источники работают в режиме потребителей энергии (например, заряд аккумулятора).

б) Переменный ток.

Из закона сохранения энергии следует, что сумма всех отдаваемых активных мощностей равна сумме всех потребляемых активных мощностей, т.е.

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \cos \varphi_{kz}(\text{генератора}) \quad (80)$$

Доказано, что баланс соблюдается и для реактивных мощностей:

$$\sum_{k=1}^n \pm X_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \sin \varphi_{kz} \quad (81)$$

где знак “+” относится к индуктивным элементам ( $X = \omega L$ ),

“-” – к емкостным ( $X_c = 1/(\omega C)$ ).

Умножив (81) на “j” и сложив полученный результат с (80), придем к аналитическому выражению баланса мощностей в цепях синусоидального тока (без учета взаимной индуктивности):

$$\sum_{k=1}^n (R_k \pm jX_k) I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k (\cos \varphi_{kz} + j \sin \varphi_{kz}) = \sum_{k=1}^n E_k I_k e^{j\varphi_{kz}}$$

ИЛИ

$$\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k \times I_k$$



## Контрольные вопросы

1. Что такое активная мощность?
2. Что такое реактивная мощность, с какими элементами она связана?
3. Что такое полная мощность?
4. Почему необходимо стремиться к повышению коэффициента мощности  $\cos \varphi$ ?
5. Критерием чего служит баланс мощностей?

## 2.4 Резонансы в цепях синусоидального тока

Резонансом называется такой режим работы цепи, включающий в себя индуктивные и емкостные элементы, при котором ее входное сопротивление (входная проводимость) вещественно. Следствием этого является совпадение по фазе тока на входе цепи с входным напряжением.

### Резонанс в цепи с последовательно соединенными элементами (резонанс напряжений)

Для цепи на рисунок 69 имеет место

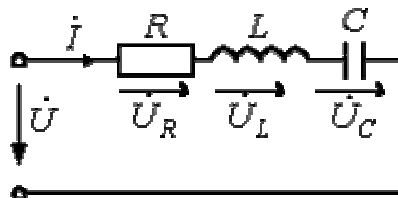


Рисунок 69 - Цепь с последовательно соединенными элементами

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{i} \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = \dot{i} \underline{Z}$$

где

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{j\varphi}; \quad (82)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (83)$$

В зависимости от соотношения величин  $\omega L$  и  $1/(\omega C)$  возможны три различных случая:

1. В цепи преобладает индуктивность, т.е.  $\omega L > 1/(\omega C)$ , а следовательно,

$\dot{U}_L > \dot{U}_C$ . Этому режиму соответствует векторная диаграмма на рисунке 70а.

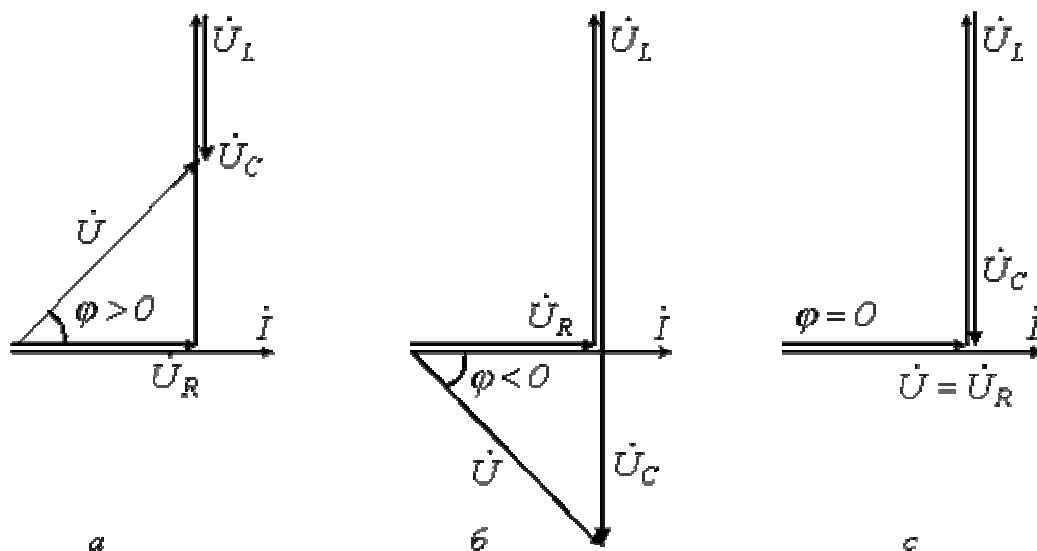


Рисунок 70 – Векторные диаграммы для цепи с последовательно соединенными элементами

2. В цепи преобладает емкость, т.е.  $\omega L < 1/(\omega C)$ , а значит,  $\dot{U}_L < \dot{U}_C$ . Этот случай отражает векторная диаграмма на рис. 70,б.

3.  $\dot{U}_L = \dot{U}_C$  - случай резонанса напряжений (рис. 70,в).

Условие резонанса напряжений:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (84)$$

При этом, как следует из (83) и (84),  $\underline{Z} = R; \varphi = 0$ .

При резонансе напряжений или режимах, близких к нему, ток в цепи резко возрастает. В теоретическом случае при  $R=0$  его величина стремится к бесконечности. Соответственно возрастанию тока увеличиваются напряжения на индуктивном и емкостном элементах, которые могут во много раз превысить величину напряжения источника питания.

Пусть, например, в цепи на рис. 1  $U = 10 \text{ В}; R = 1 \text{ Ом}; X_L = X_C = 1000 \text{ Ом}$ .  
Тогда  $I = U/Z = U/R = 10 \text{ А}$ , и, соответственно,  
 $U_L = U_C = IX_L = IX_C = 10^4 \text{ В}$ .

Явление резонанса находит полезное применение на практике, в частности в радиотехнике. Однако, если он возникает стихийно, то может привести к аварийным режимам вследствие появления больших перенапряжений и сверхтоков.

Физическая сущность резонанса заключается в периодическом обмене энергией между магнитным полем катушки индуктивности и электрическим полем конденсатора, причем сумма энергий полей остается постоянной.

Суть дела не меняется, если в цепи имеется несколько индуктивных и

$$L_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n L_k;$$

емкостных элементов. Действительно, в этом случае

$1/C_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n 1/C_k$ , и соотношение (84) выполняется для эквивалентных значений  $L_{\Sigma}$  и  $C_{\Sigma}$ .

Как показывает анализ уравнения (84), режима резонанса можно добиться путем изменения параметров  $L$  и  $C$ , а также частоты. На основании (84) для резонансной частоты можно записать

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (85)$$

**Резонансными кривыми** называются зависимости тока и напряжения от частоты. В качестве их примера на рисунке 71 приведены типовые кривые  $I(f)$ ;  $U_L(f)$  и  $U_C(f)$  для цепи на рисунке 69 при  $U=\text{const}$ .

Важной характеристикой резонансного контура является **добротность**  $Q$ , определяемая отношением напряжения на индуктивном (емкостном) элементе к входному напряжению:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{\omega_p C R}, \quad (86)$$

- и характеризующая “избирательные” свойства резонансного контура, в частности его **полосу пропускания**  $\Delta\omega = \omega_p / Q$ .

Другим параметром резонансного контура является **характеристическое сопротивление**, связанное с добротностью соотношением

$$\rho = QR, \quad (87)$$

или с учетом (85) и (86) для  $\rho$  можно записать:

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (88)$$

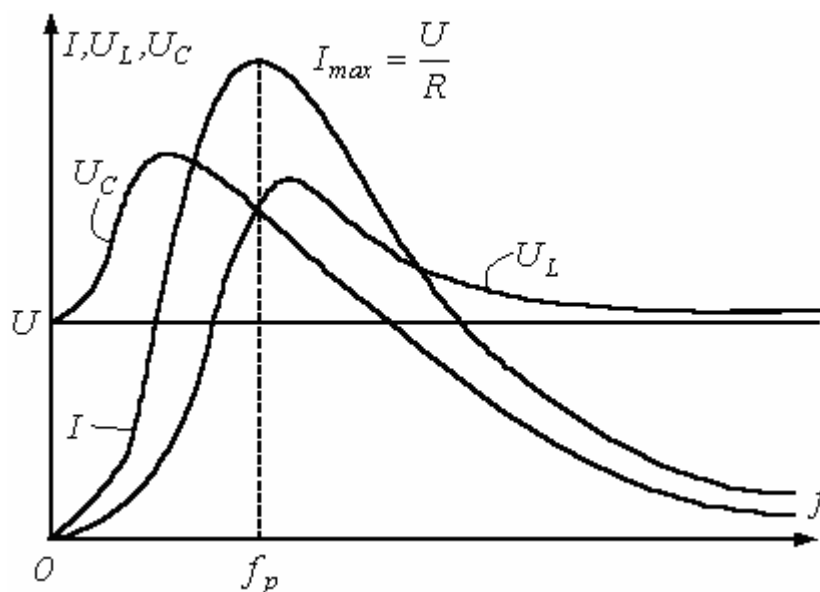


Рисунок 71– Резонансные кривые

## Резонанс в цепи с параллельно соединенными элементами (резонанс токов)

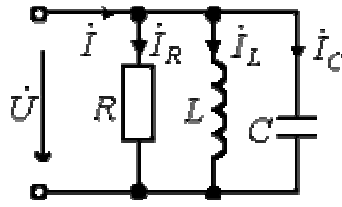


Рисунок 72- Цепь с параллельно соединенными элементами

Для цепи рисунка 72 имеем

$$\dot{i} = \dot{i}_R + \dot{i}_L + \dot{i}_C = \dot{U} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) = \dot{U} [g + j(b_C - b_L)] = \dot{U} \underline{Y},$$

где

$$\underline{Y} = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2} e^{-j\varphi}; \quad (88)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b_L - b_C}{g}. \quad (89)$$

В зависимости от соотношения величин  $b_L$  и  $b_C$ , как и в рассмотренном выше случае последовательного соединения элементов, возможны три различных случая, представленные на рисунке 73.

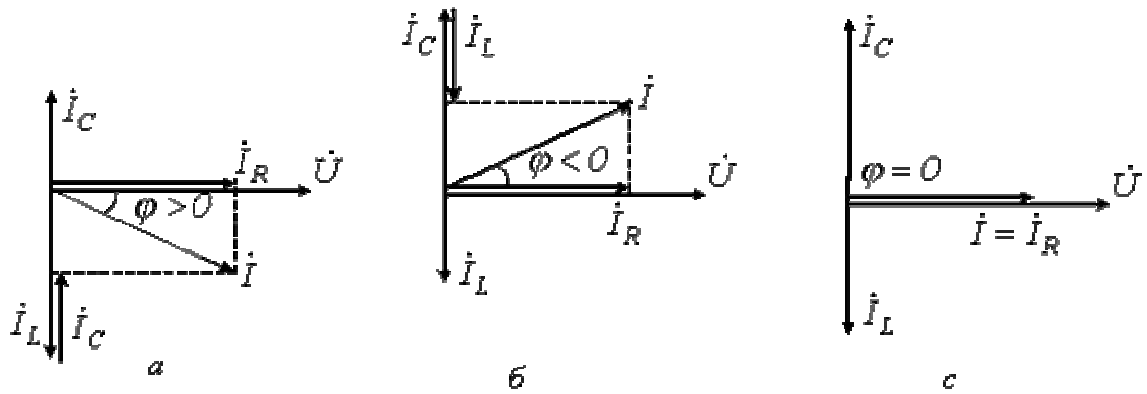


Рисунок 73- Векторные диаграммы для цепи с параллельно соединенными элементами

В цепи преобладает индуктивность, т.е.  $b_L > b_C$ , а следовательно,  $I_L > I_C$ . Этому режиму соответствует векторная диаграмма на рисунке 73,а.

В цепи преобладает емкость, т.е.  $b_L < b_C$ , а значит,  $I_L < I_C$ . Этот случай иллюстрирует векторная диаграмма на рисунке 73,б.

$I_L = I_C$  - случай резонанса токов (рисунок 73,в).

Условие резонанса токов  $b_L = b_C$  или

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C \quad (90)$$

При этом, как следует из (88) и (89),  $\underline{Y} = g = 1/R; \varphi = 0$ . Таким образом, при резонансе токов входная проводимость цепи минимальна, а входное сопротивление, наоборот, максимально. В частности при отсутствии в цепи на рисунок 72 резистора R ее входное сопротивление в режиме резонанса стремится к бесконечности, т.е. при резонансе токов ток на входе цепи минимален.

Идентичность соотношений (84) и (86) указывает, что в обоих случаях резонансная частота определяется соотношением (85). Однако не следует использовать выражение (85) для любой резонансной цепи. Оно справедливо только для простейших схем с последовательным или параллельным соединением индуктивного и емкостного элементов.

При определении резонансной частоты в цепи произвольной конфигурации или, в общем случае, соотношения параметров схемы в режиме резонанса следует исходить из условия вещественности входного сопротивления (входной проводимости) цепи.

### Пример 2.4

Дана цепь произвольной конфигурации (рисунок 74). Определить условие резонанса.

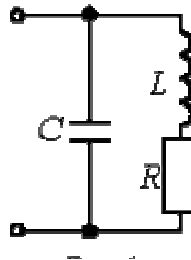


Рисунок 74– Цепь произвольной конфигурации

### Решение.

Например, для цепи на рисунке 74 имеем

$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

Поскольку в режиме резонанса мнимая часть  $\underline{Y}$  должна быть равна нулю, то условие резонанса имеет вид:

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega_p^2 L^2},$$

откуда, в частности, находится резонансная частота.

### Резонанс в сложной цепи

Условие резонанса для сложной цепи со смешанным соединением нескольких индуктивных и емкостных элементов, заключающееся в равенстве нулю мнимой части входного сопротивления ( $X(\omega) = 0$ ) или входной проводимости ( $b(\omega) = 0$ ), определяет наличие у соответствующих этому условию уравнений относительно  $\omega$  нескольких вещественных корней, т.е. таким цепям соответствует несколько резонансных частот.

При определении резонансных частот для реактивного двухполюсника аналитическое выражение его входного реактивного

сопротивления  $X(\omega)$  или входной реактивной проводимости  $b(\omega)$  следует представить в виде отношения двух полиномов по степеням  $\omega$ , т.е.  $X(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$  или  $b(\omega) = Q(\omega)/P(\omega)$ .

Тогда корни уравнения  $P(\omega) = 0$  дадут значения частот, которые соответствуют резонансам напряжений, а корни уравнения  $Q(\omega) = 0$  - значения частот, при которых возникают резонансы токов. Общее число резонансных частот в цепи на единицу меньше количества индуктивных и емкостных элементов в схеме, получаемой из исходной путем ее сведения к цепи (с помощью эквивалентных преобразований) с минимальным числом этих элементов. Характерным при этом является тот факт, что режимы резонансов напряжений и токов чередуются.

В качестве примера определим резонансные частоты для цепи рисунок 75.

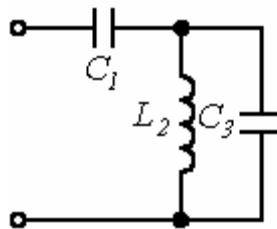


Рисунок 75– Разветвленная цепь

Выражение входного сопротивления данной цепи имеет вид

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{j\omega L_2 \frac{1}{j\omega C_3}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_3}} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C_3} = \frac{1 - \omega^2 (L_2 C_3 + L_2 C_1)}{j\omega C_1 (1 - \omega^2 L_2 C_3)} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

Из решения уравнения  $P(\omega) = 0$  получаем частоту  $\omega_1 = 1/\sqrt{L_2(C_1 + C_3)}$ , соответствующую резонансу напряжений, а из решения уравнения  $Q(\omega) = 0$  - частоту  $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_3}$ , соответствующую резонансу токов.



## Контрольные вопросы

1. Что такое резонанс напряжений, чем он характеризуется?
2. Что такое резонанс токов, чем он характеризуется?
3. В чем физическая сущность резонансных режимов?
4. На основании каких условий в общем случае определяются резонансные частоты?
5. На чем основан принцип компенсации реактивной мощности?

## 2.5 Векторные и топографические диаграммы

Совокупность радиус-векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся ЭДС, напряжения, токи и т. д., называется **векторной диаграммой**. Векторные диаграммы наглядно иллюстрируют ход решения задачи. При точном построении векторов можно непосредственно из диаграммы определить амплитуды и фазы искомым величин. Приближенное (качественное) построение диаграмм при аналитическом решении служит надежным контролем корректности хода решения и позволяет легко определить квадрант, в котором находятся определяемые векторы.

При построении векторных диаграмм для цепей с последовательным соединением элементов за базовый (отправной) вектор следует принимать вектор тока, а к нему под соответствующими углами подстраивать векторы напряжений на отдельных элементах. Для цепей с параллельным соединением элементов за базовый (отправной) вектор следует принять вектор напряжения, ориентируя относительно него векторы токов в параллельных ветвях.

Для наглядного определения величины и фазы напряжения между различными точками электрической цепи удобно использовать топографические диаграммы. Они представляют собой соединенные соответственно схеме электрической цепи точки на комплексной плоскости, отображающие их потенциалы. На топографической диаграмме, представляющей собой в принципе векторную диаграмму, порядок расположения векторов напряжений строго соответствует порядку расположения элементов в схеме, а вектор падения напряжения на каждом последующем элементе примыкает к концу вектора напряжения на каждом предыдущем элементе.

### Пример 2.5

В качестве примера построим векторную диаграмму токов, а также топографическую диаграмму потенциалов для схемы по рисунку 76.

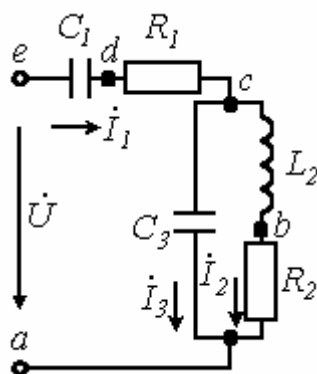


Рисунок 76 – Расчетная схема

Параметры схемы:  $X_{C1} = 100 \text{ Ом}; X_{L2} = X_{C3} = 50 \text{ Ом}; R_1 = 25 \text{ Ом}; R_2 = 20 \text{ Ом}.$

При данных параметрах и заданном напряжении на входе схемы  $\dot{U} = 120e^{j0} \text{ В}$  найденные значения токов равны:  $\dot{I}_1 = 0,4 + j0,4 \text{ (A)};$   
 $\dot{I}_2 = 1 - j \text{ (A)};$   $\dot{I}_3 = -0,6 + j1 \text{ (A)}.$

### Решение.

При построении векторной диаграммы зададимся масштабами токов и напряжений. Векторную диаграмму можно строить, имея запись комплекса в показательной форме, т.е. по значениям модуля и фазы. Однако на практике удобнее проводить построения, используя алгебраическую форму записи, поскольку при этом вещественная и мнимая составляющие комплексной величины непосредственно откладываются на соответствующих осях комплексной плоскости, определяя положение точки на ней.

Построение векторной диаграммы токов осуществляется непосредственно на основании известных значений их комплексов. Для построения топографической диаграммы предварительно осуществим расчет комплексных потенциалов (другой вариант построения топографической диаграммы предполагает расчет комплексов напряжений на элементах цепи с последующим суммированием векторов напряжений вдоль контура непосредственно на комплексной плоскости).

При построении топографической диаграммы обход контуров можно производить по направлению тока или против. Чаще используют второй вариант.

В этом случае с учетом того, что в электротехнике принято, что ток течет от большего потенциала к меньшему, потенциал искомой точки

равен потенциалу предыдущей плюс падение напряжения на элементе между этими точками. Если на пути обхода встречается источник ЭДС, то потенциал искомой точки будет равен потенциалу предыдущей плюс величина этой ЭДС, если направление обхода совпадает с направлением ЭДС, и минус величина ЭДС, если не совпадает. Это вытекает из того, что напряжение на источнике ЭДС имеет направление, противоположное ЭДС. Обозначив на схеме по рисунку 85 точки между элементами цепи  $e$  и  $a$  и приняв потенциал точки  $a$  за нуль ( $\phi_a = 0$ ), определим потенциалы этих точек:

$$\phi_b = \phi_a + \dot{I}_2 R_2 = 0 + (1 - j) \cdot 20 = 20 - j20 \text{ (В)};$$

$$\phi_c = \phi_b + jX_{L2} \dot{I}_2 = 20 - j20 + (1 - j) \cdot j50 = 70 + j30 \text{ (В)}$$

или  $\phi_c = \phi_a - jX_{C3} \dot{I}_3 = 0 - j50(-0,6 + j1,4) = 70 + j30 \text{ (В)};$

$$\phi_d = \phi_c + \dot{I}_1 R_1 = 70 + j30 + (0,4 + j0,4) \cdot 25 = 80 + j40 \text{ (В)};$$

$$\phi_e = \phi_d - jX_{C1} \dot{I}_1 = 80 + j40 - j40(0,4 + j0,4) = 120 \text{ (В)}.$$

Таким образом, в результате проведенных вычислений получено, что  $\phi_e - \phi_a = 120 \text{ В}$ . Но разность потенциалов точек  $e$  и  $a$  равно напряжению  $U$ , приложенному к цепи, а оно равно 120 В. Таким образом, второй закон Кирхгофа выполняется, а следовательно, вычисления выполнены верно. В соответствии с полученными результатами строится топографическая диаграмма на рисунке 77. Следует обратить внимание на ориентацию векторов, составляющих топографическую диаграмму, относительно векторов тока: для резистивных элементов соответствующие векторы параллельны, для индуктивного и емкостных – ортогональны.

Векторы напряжений ориентированы относительно точек топографической диаграммы противоположно положительным направлениям напряжений относительно соответствующих точек электрической цепи. В этой связи допускается не указывать на топографической диаграмме направления векторов напряжений.

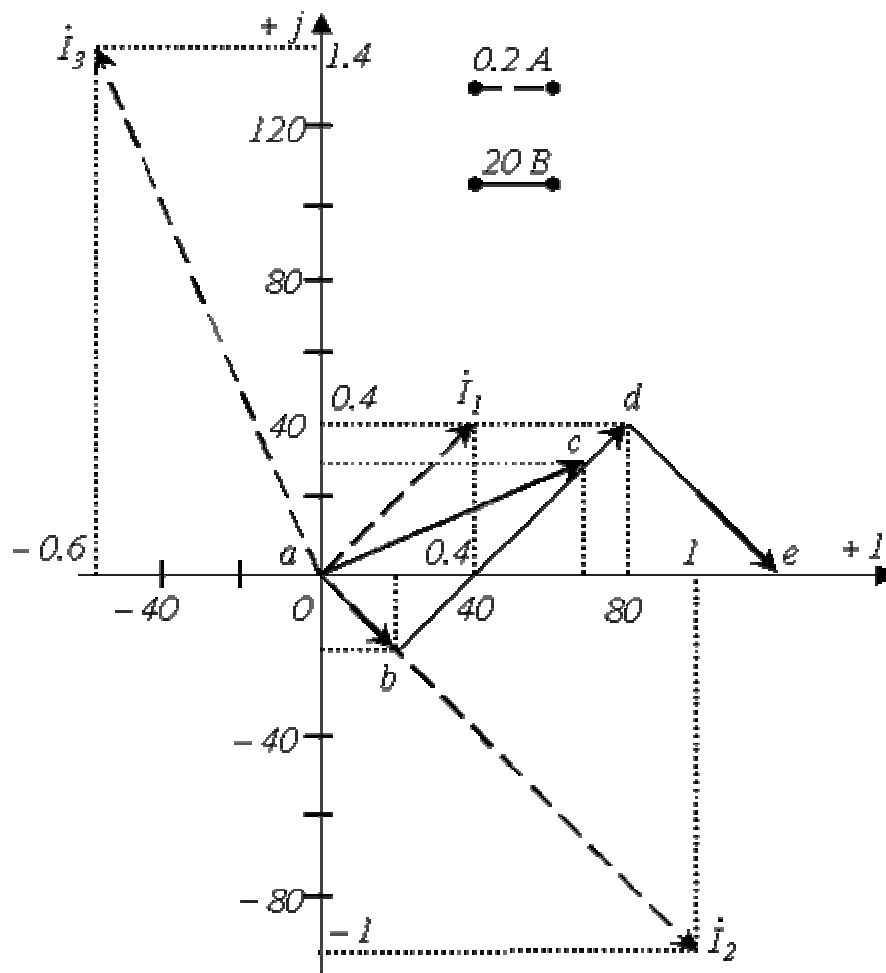


Рисунок 77 – Топографическая диаграмма

### Преобразование линейных электрических схем

Для упрощения расчета и повышения наглядности анализа сложных электрических цепей во многих случаях рационально подвергнуть их предварительному преобразованию. Очевидно, что преобразование должно приводить к упрощению исходной схемы за счет уменьшения числа ее ветвей и (или) узлов. Такое преобразование называется **целесообразным**. При этом при любых способах преобразований должно выполняться условие неизменности токов в ветвях участков схемы, не затронутых этими преобразованиями. Из последнего вытекает, что, если преобразованию подвергаются участки цепи, не содержащие источников энергии, то мощности в исходной и эквивалентной схемах одинаковы. Если в преобразуемые участки входят источники энергии, то в общем случае мощности в исходной и преобразованной цепях будут различны.

Рассмотрим наиболее важные случаи преобразования электрических цепей.

## Преобразование последовательно соединенных элементов

Рассмотрим участок цепи на рисунке 78,а. При расчете внешней по отношению к этому участку цепи данную ветвь можно свести к виду на рисунке 78,б, где

$$\underline{Z}_\Sigma = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \quad (91)$$

или

$$\dot{E} = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k \quad (92)$$

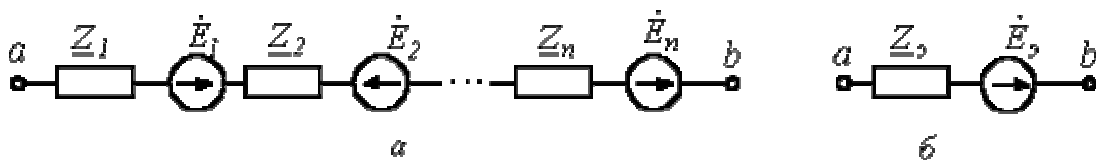


Рисунок 78 – Преобразование последовательного соединения

При этом при вычислении эквивалентной ЭДС  $\dot{E}_k$  k-я ЭДС берется со знаком “+”, если ее направление совпадает с направлением эквивалентной ЭДС, и “-”, если не совпадает.

## Преобразование параллельно соединенных ветвей

Пусть имеем схему на рисунке 79,а.

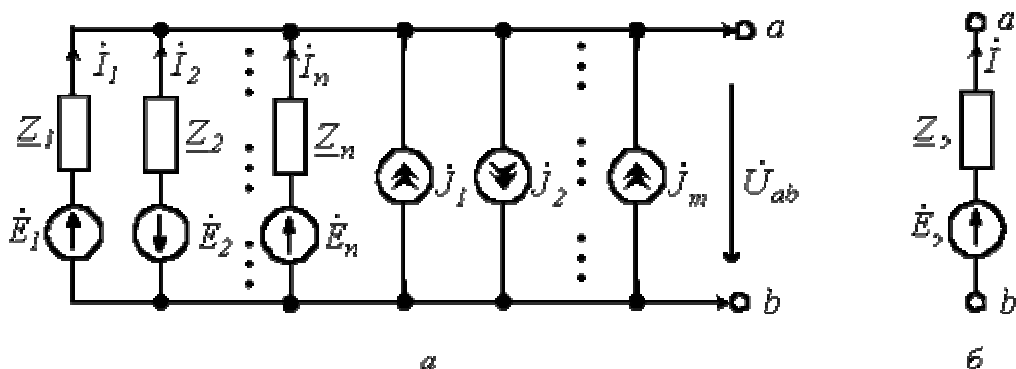


Рисунок 79 - Преобразование параллельного соединения ветвей

Согласно закону Ома для участка цепи с источником ЭДС

$$\dot{I}_k = \dot{E}_k \underline{Y}_k - \dot{U}_{ab} \underline{Y}_k,$$

где  $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$ .

Тогда

$$\dot{I} = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k \underline{Y}_k - \dot{U}_{ab} \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k + \sum_{i=1}^m \dot{J}_i = \dot{E}_\Sigma \underline{Y}_\Sigma - \dot{U}_{ab} \underline{Y}_\Sigma,$$

где  $\underline{Y}_\Sigma = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_\Sigma$ ; (93)

$$\dot{E}_\Sigma = \frac{\sum_{k=1}^n \dot{E}_k \underline{Y}_k + \sum_{i=1}^m \dot{J}_i}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k},$$
 (94)

причем со знаком “+” в (4) записываются ЭДС  $\dot{E}_k$  и ток  $\dot{J}_i$ , если они направлены к тому же узлу, что и ЭДС  $\dot{E}_\Sigma$ ; в противном случае они записываются со знаком “-”.

### Взаимные преобразования “треугольник-звезда”

В ряде случаев могут встретиться схемы, соединения в которых нельзя отнести ни к последовательному, ни к параллельному типу (см. рисунок 80). В таких случаях преобразования носят более сложный характер: преобразование треугольника в звезду и наоборот.

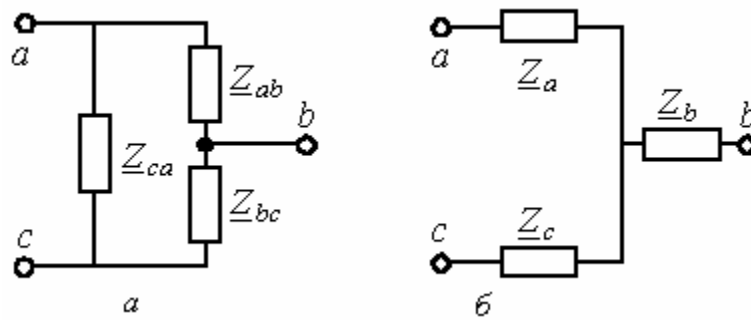


Рисунок 80 – Схемы соединения сопротивлений:  
а) треугольник; б) звезда.

Преобразовать треугольник в звезду – значит заменить три сопротивления, соединенных в треугольник между какими-то тремя узлами, другими тремя сопротивлениями, соединенными в звезду между теми же точками. При этом на участках схемы, не затронутых этими преобразованиями, токи должны остаться неизменными.

Без вывода запишем формулы эквивалентных преобразований

Треугольник → звезда	Звезда → треугольник	
$\underline{Z}_a = \frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$	$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_b + \frac{\underline{Z}_a\underline{Z}_b}{\underline{Z}_c};$	(95)
$\underline{Z}_b = \frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$	$\underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_b + \underline{Z}_c + \frac{\underline{Z}_b\underline{Z}_c}{\underline{Z}_a};$	
$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_{bc}\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$	$\underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_c + \underline{Z}_a + \frac{\underline{Z}_c\underline{Z}_a}{\underline{Z}_b}.$	

### Контрольные вопросы

1. Что представляют собой векторные диаграммы?
2. Что такое топографические диаграммы, для чего они служат?
3. В чем сходство и различие топографической и потенциальной диаграмм?
4. Какой практический смысл преобразований электрических цепей?
5. В чем заключается принцип эквивалентности преобразований?

### 2.6 Решение задач символическим методом

#### Пример 2.6

Для более успешного изучения символического метода рассмотрим, как определяются все токи в цепи, показанной на рисунке 81, для следующих данных:

$$e_1 = 170 \sin(\alpha - 20^\circ) \text{ В}; e_2 = 141 \cos \alpha \text{ В};$$

$$e_3 = 212 \sin(\alpha - 150^\circ) \text{ В}; R = 15 \text{ Ом}; L = 63.6 \text{ мГн};$$

$$C = 318 \text{ мкФ}; f = 50 \text{ Гц}.$$

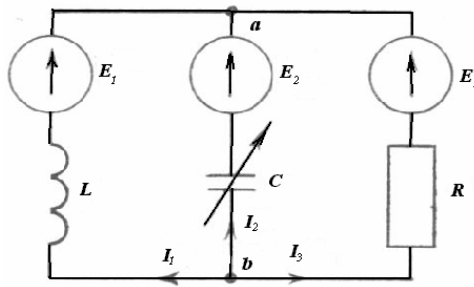


Рисунок 81 – Расчетная схема

**Решение.**

1. Определяем комплексы действующих значений всех э.д.с.:

$$E_1 = \frac{170e^{-j20^\circ}}{\sqrt{2}} = 120e^{-j20^\circ} = 113 - j41 \text{ В};$$

$$E_2 = \frac{141e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}} = 100e^{j90^\circ} = j100 \text{ В};$$

$$E_3 = \frac{212e^{-j150^\circ}}{\sqrt{2}} = 150e^{-j150^\circ} = -130 - j75 \text{ В};$$

1. Подсчитаем комплексные сопротивления и проводимости ветвей:

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 314 \cdot 63.6 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 318 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_1 = j20 = 20e^{j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = -j10 = 10e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = 15 \text{ Ом};$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = 0.05e^{-j90^\circ} = -j0.05 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = 0.1e^{j90^\circ} = j0.1 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = 0.0667 \text{ См}.$$

2. Определяем токи в ветвях методом двух узлов:



$$\begin{aligned}
\dot{U}_{AB} &= \frac{\sum \dot{E}Y}{\sum Y} = \frac{120e^{-j20^\circ} \cdot 0.05e^{-j90^\circ} + 100e^{j90^\circ} \cdot 0.1e^{j90^\circ} + 150e^{-j15^\circ} \cdot 0.667}{-j0.05 + j0.1 + 0.667} = \\
&= \frac{6e^{-j110^\circ} + 10e^{j180^\circ} + 10e^{-j15^\circ}}{0.667 + j0.05} = \frac{-2.05 + j5.65 - 10 - 8.66 - j5}{0.667 + j0.05} = \frac{-20.71 - j10.65}{0.667 + j0.05} = \\
&= \frac{23.7e^{-j150^\circ 30'}}{0.0835e^{j36^\circ 45'}} = 284e^{-j187^\circ 15'} = -280 + j38.3B \\
\dot{i}_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_1} = \frac{113 - j41 + 280 - j38.3}{20e^{j90^\circ}} = \frac{393 - j79.3}{20e^{j90^\circ}} = \\
&= \frac{400e^{-j11^\circ 25'}}{20e^{j90^\circ}} = 20e^{-j101^\circ 25'} = -3.86 - j19.6A. \\
\dot{i}_2 &= \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_2} = \frac{j100 + 280 - j38.3}{10e^{-j90^\circ}} = \frac{280 + j61.7}{10e^{-j90^\circ}} = \\
&= \frac{286e^{j12^\circ 25'}}{10e^{-j90^\circ}} = 28.6e^{j102^\circ 25'} = -6.15 + j27.2A. \\
\dot{i}_3 &= \frac{\dot{E}_3 - \dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_3} = \frac{-130 - j75 + 280 - j38.3}{15} = \frac{150 - j113.3}{15} = \\
&= \frac{188e^{-j37^\circ}}{15} = 12.52e^{-j37^\circ} = 10 - j7.56A.
\end{aligned}$$

Проверка по 1-му закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned}
\sum i &= 0 \\
\dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3 &= -3.86 - j19.6 - 6.15 + j27.2 + 10 - j7.56 = -0.01 + j0.04 \approx 0.
\end{aligned}$$

### Пример 2.7

Для электрической цепи (рисунок 81) рассчитать и построить круговую диаграмму.

**Решение.**

Рассмотрим порядок построения диаграммы для цепи, представленной на рисунке 81.

Расчет для построения круговой диаграммы ведем по методу активного двухполюсника или эквивалентного генератора:

1) Разрываем ветвь с изменяющимся сопротивлением  $X_c$  и определяем ток в полученной схеме и напряжение в месте разрыва — напряжение холостого хода  $U_{xx}$  (рисунок 82):

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{113 - j41 + 130 + j75}{j20 + 15} = \frac{243 + j34}{15 + j20} = \frac{245e^{j8^\circ}}{25e^{j53^\circ}} = 9.8e^{-j45^\circ} \text{ A.}$$

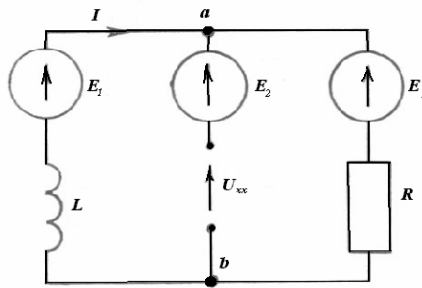


Рисунок 82- Расчетная схема

По второму закону Кирхгофа имеем:

$$\dot{I}R + \dot{U}_{xx} = \dot{E}_2 - \dot{E}_3,$$

Откуда

$$\begin{aligned} \dot{U}_{xx} &= \dot{E}_2 - \dot{E}_3 - \dot{I}R = j100 + 130 + j75 - 9.8e^{-j45^\circ} \cdot 15 = \\ &= 130 + j175 - 147e^{-j45^\circ} = 130 + j175 - 104 + j104 = \\ &= 26 + j279 = 279e^{j84^\circ 40'} \text{ В.} \end{aligned}$$

2) Исключаем из схемы (рисунок 81) все э. д. с. и вводим э. д. с.  $\dot{E} = U_{xx}$  в ветвь с изменяющимся сопротивлением. Получившаяся схема приведена на рисунке 83.

Определим из нее входное сопротивление (эквивалентное сопротивление разветвления), для чего представим ее в более наглядном виде (рисунок 84):

$$\underline{Z}_{ax} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{300e^{j90^\circ}}{25e^{j53^\circ}} = 12e^{j37^\circ} \text{ Ом.}$$

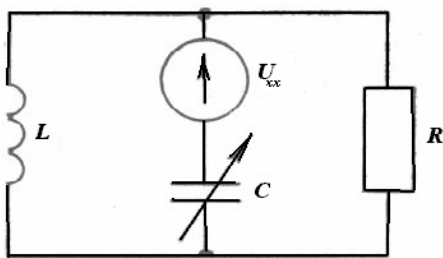


Рисунок 83– Приведенная схема

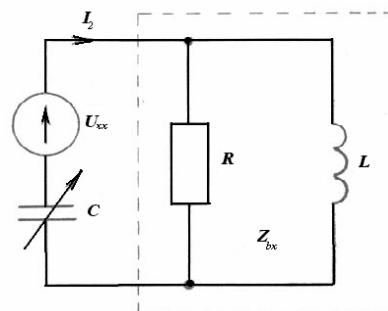


Рисунок 84 – Схема для определения входного сопротивления

В результате получаем схему с последовательным соединением постоянного сопротивления  $Z_{BX}$  и изменяющегося от 0 до  $\infty$  сопротивления  $Z = -jX_c = X_c e^{-j90^\circ}$  (рисунок 85). Ток в этой же схеме определяем по методу активного двухполюсника:

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{\dot{U}_{xx}}{Z_{ex} + Z_2} = \frac{\dot{U}_{xx} / Z_{ex}}{1 + \frac{Z_2}{Z_{ex}}} = \frac{\dot{I}_k}{1 + \frac{Z_2 e^{j\varphi_2}}{Z_{ex} e^{j\varphi_{ex}}}} = \\ &= \frac{\dot{I}_k}{1 + \frac{Z_2}{Z_{ex}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{ex})}} = \frac{\dot{I}_k}{1 + \frac{Z_2}{Z_{ex}} e^{j\psi}} \end{aligned}$$

где  $\dot{I}_k$  — значение тока  $\dot{I}_c$  при  $Z = -jX_c = 0$ .

Это выражение представляет собой уравнение дуги окружности в комплексной форме,  $\dot{I}_k$  является хордой этой окружности, а  $\psi = \varphi_2 - \varphi_{BX}$  — угол между продолжением хорды и касательной. Знания этих величин достаточно для построения круговой диаграммы. Определяем ток короткого замыкания и угол  $\psi$

$$\begin{aligned} \dot{I}_k &= \frac{\dot{U}_{xx}}{Z_{ex}} = \frac{297 e^{j84^\circ 40'}}{12 e^{j37^\circ}} = 23.25 e^{j47^\circ 40'} \text{ A}; \\ \psi &= \varphi_2 - \varphi_{ex} = -90^\circ - 37^\circ = -127^\circ. \end{aligned}$$

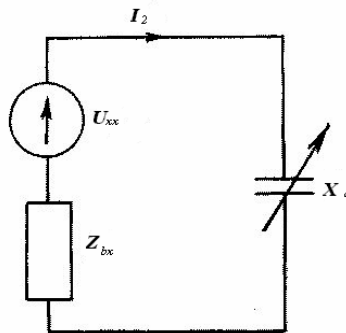


Рисунок 85 – Схема активного двухполюсника

По полученным данным строим круговую диаграмму (рисунок 86). Построение ведем в следующем порядке:

1. Откладываем горизонтально действительную ось.

$$m_{U_{xx}} = 2 \frac{2B}{\text{см}}; m_I = 2 \frac{A}{\text{см}}; m_Z = 1 \frac{OM}{\text{см}}$$

2. Под углом  $47^\circ 40'$  проводим вектор  $\dot{I}_k$ . Масштаб тока выбираем произвольно (в нашем случае  $m_I = 2 \text{ A/см}$ ).

3. Под углом  $\psi$  к продолжению вектора  $\dot{I}_k$  проводим прямую, касательную к будущей окружности. Поскольку  $\psi < 0$ , откладываем его в сторону отставания от вектора  $\dot{I}_k$ , т. е. по часовой стрелке.

4. Из геометрии известно, что центр окружности лежит, во-первых, на перпендикуляре к хорде, восстановленном из ее середины, и, во-вторых, на перпендикуляре к касательной. На этом основании определяется центр круговой диаграммы — точка  $O$ .

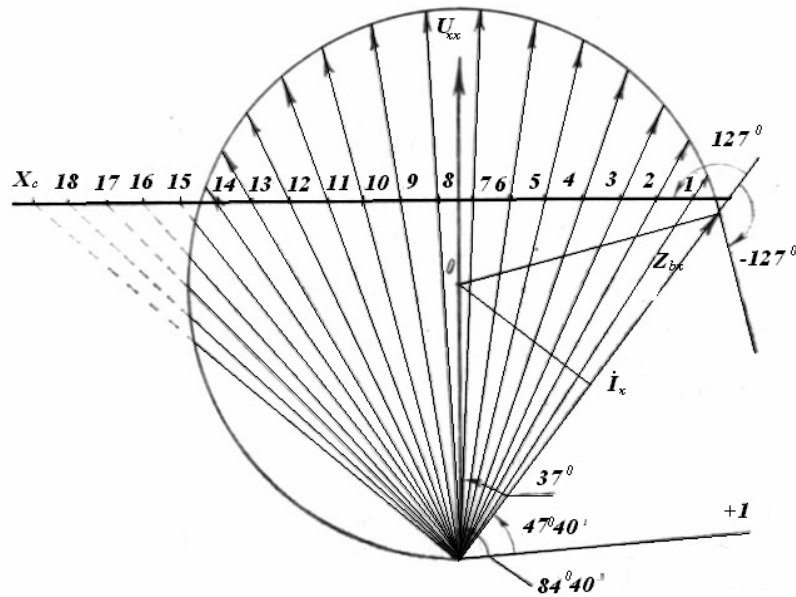


Рисунок 86— Круговая диаграмма

5. С центром в точке  $O$  чертим рабочую дугу окружности. Обратите внимание на то, что эта дуга всегда находится по обратную сторону от касательной (относительно хорды  $\dot{I}_k$ ).

6. На хорде  $\dot{I}_k$  в удобном масштабе откладываем величину (модуль) сопротивления  $Z_{BX}$  (нами принят  $m_z=1 \text{ Ом/см}$ ), под углом  $-\psi$  из конца отрезка  $Z_{BX}$  проводим линию изменяющегося по модулю сопротивления  $Z = X_C$  и наносим на нее в масштабе  $m_z$  различные значения сопротивления  $X_C$  — от 0 до  $\infty$ . Соединив полученные точки с началом вектора  $\dot{I}_k$  и продолжив каждый из этих отрезков до пересечения с окружностью, получим векторы токов (в масштабе  $m_1$ ), соответствующие разным значениям  $X_C$ .  
Так, при  $X_C=10 \text{ Ом}$   $I_2 = 28 \text{ А}$ , что соответствует расчету.

7. В произвольном масштабе  $m_U$  откладываем вектор  $U_{xx}$ . В соответствии с данными нашей задачи он построен под углом  $84^\circ 40'$  к действительной оси. Угол между векторами  $U_{xx}$  и  $\dot{I}_k$  равен  $\varphi_{BX}$ .

## 2.7 Применение пакета Mathcad к расчету электрических цепей переменного тока

### Пример 2.8

Рассчитать индуктивное и емкостное сопротивления при различных частотах в неразветвленной электрической цепи переменного тока (рисунок 87). Определить полное сопротивление цепи и ток в цепи с напряжением  $U=10$  В. Построить графики изменения тока, индуктивного, емкостного и полного сопротивлений от частоты. Параметры схемы:  $R=5$  Ом;  $L=0,02$  Гн;  $C=126,7$  мкФ;  $f=0\div 200$  Гц.

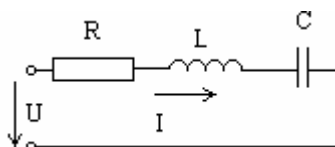


Рисунок 87- Схема к задаче 2.8

### Решение.

Решение задачи осуществляется в порядке определения неизвестных величин. Задаем исходные данные:

$$U := 10 \cdot V \quad R := 5 \cdot \Omega \quad L := 0.02 \cdot H \quad C := 126.7 \cdot \mu F$$

Начальное значение частоты задаем не равным нулю до 250 Гц с шагом 50 Гц:

$$f := 0.0001 \cdot Hz, 50 \cdot Hz.. 250 \cdot Hz$$

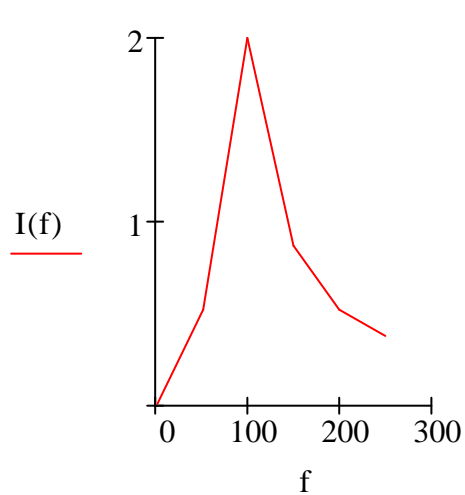
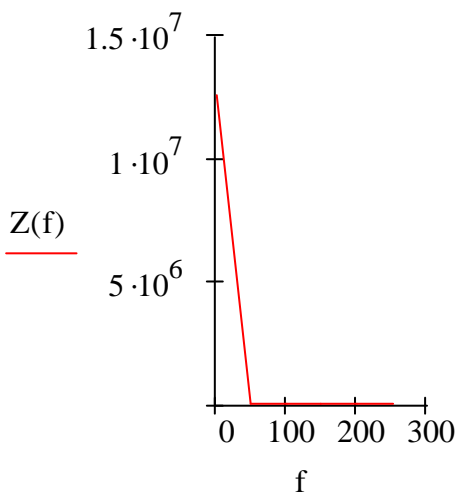
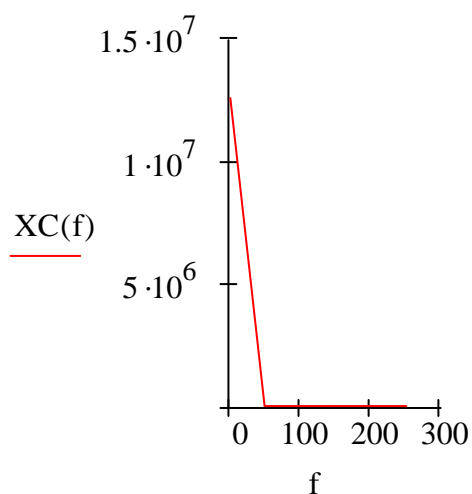
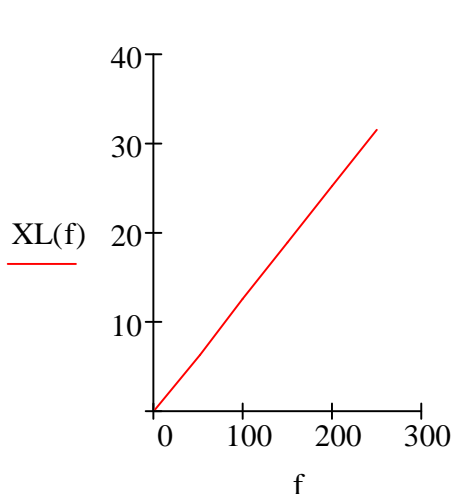
Вводим расчетные формулы для определения:

$$\begin{aligned} X_L(f) &:= 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L & X_C(f) &:= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \\ Z(f) &:= \sqrt{R^2 + (X_L(f) - X_C(f))^2} & I(f) &:= \frac{U}{Z(f)} \end{aligned}$$

Результаты отображаются в виде таблицы для различных частот:

$f =$	$XL(f) =$	$XC(f) =$	$Z(f) =$	$I(f) =$
$1 \cdot 10^{-4}$ Hz	$1.257 \cdot 10^{-5}$ $\Omega$	$1.256 \cdot 10^7$ $\Omega$	$1.256 \cdot 10^7$ $\Omega$	$7.961 \cdot 10^{-7}$ A
50	6.283	25.123	19.492	0.513
100	12.566	12.562	5	2
150	18.85	8.374	11.607	0.862
200	25.133	6.281	19.504	0.513
250	31.416	5.025	26.861	0.372

Строим графики зависимости сопротивлений и тока от частоты:



Данную задачу можно решить с помощью помощью панели программирования.

Вводим исходные данные:

$$U := 10 \quad f := 50 \quad R := 5 \quad L := 0.02 \quad C := 126.7 \cdot 10^{-6} \quad n := 5$$

Для создания строк программы используем команду **Add Line** на панели программирования. Ключевое слово **for** задает цикл программы,

где  $n := 5$  - число циклических вычислений. Расчетные формулы вводим в ячейки матрицы размер которой составляет один столбец, четыре строки.

$$F(n) := \left| \begin{array}{l} F \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad F^{(i)} \leftarrow \left[ \begin{array}{c} \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \cdot i}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot i} \\ \sqrt{R^2 + \left( 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \cdot i - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot i} \right)^2} \\ U \\ \sqrt{R^2 + \left( 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \cdot i - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot i} \right)^2} \end{array} \right] \end{array} \right.$$

$$\text{res} := F(n)$$

Результаты вычислений представлены матрицей:

$$F(n) = \begin{pmatrix} 0 & 6.283 & 12.566 & 18.85 & 25.133 & 31.416 \\ 0 & 25.123 & 12.562 & 8.374 & 6.281 & 5.025 \\ 0 & 19.492 & 5 & 11.607 & 19.504 & 26.861 \\ 0 & 0.513 & 2 & 0.862 & 0.513 & 0.372 \end{pmatrix}$$

в которой, каждый столбец соответствует определенной частоте (первый соответствует частоте 0 Гц, второй – 50 Гц, третий -100 Гц и т.д.). Строки в столбце соответствуют расчетным формулам: индуктивное сопротивление; емкостное сопротивление; полное сопротивление и ток.

Результат можно выводить отдельными столбцами:

$$f50 := \text{res}^{(1)} \quad f100 := \text{res}^{(2)} \quad f150 := \text{res}^{(3)} \quad f200 := \text{res}^{(4)} \quad f250 := \text{res}^{(5)}$$

$$f50 = \begin{pmatrix} 6.283 \\ 25.123 \\ 19.492 \\ 0.513 \end{pmatrix} \quad f100 = \begin{pmatrix} 12.566 \\ 12.562 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f150 = \begin{pmatrix} 18.85 \\ 8.374 \\ 11.607 \\ 0.862 \end{pmatrix} \quad f200 = \begin{pmatrix} 25.133 \\ 6.281 \\ 19.504 \\ 0.513 \end{pmatrix}$$

$$f_{250} = \begin{pmatrix} 31.416 \\ 5.025 \\ 26.861 \\ 0.372 \end{pmatrix} \cdot$$

### Пример 2.9

По RC-цепи (рисунок 88) протекает синусоидальный ток с амплитудным значением  $I_m=1,41$  А и частотой  $f=50$  Гц. Найти мгновенные значения приложенного к цепи напряжения  $u$ , напряжения на конденсаторе  $U_c$  и резисторе  $U_r$ , если  $R=100$  Ом;  $C=31,8$  мкФ. Построить графики мгновенных значений тока, приложенного к цепи напряжения и мощности.

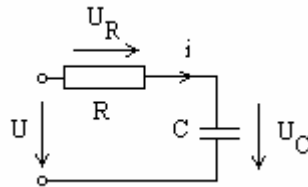


Рисунок 88 – Схема к задаче 2.9

### Решение.

Задаем исходные данные:

$$f := 50 \quad R := 100 \quad C := 31.8 \cdot 10^{-6} \quad I := 1.41$$

Расчет выполняем через мгновенные значения по выражениям:

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad i(t) := I \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad U_r(t) := R \cdot i(t)$$

$$\omega = 314.159 \quad i(t) \rightarrow 1.41 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) \\ U_r(t) \rightarrow 141.00 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t)$$

$$U_c(t) := \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$$

$$U_c(t) \text{ float,3} \rightarrow -141. \cdot \cos(314. \cdot t)$$

$$U(t) := U_r(t) + U_c(t)$$



$$\begin{aligned}
U(t) \text{ float},3 &\rightarrow 141 \cdot \sin(314 \cdot t) - 141 \cdot \cos(314 \cdot t) \\
S(t) &:= U(t) \cdot i(t) \\
S(t) \text{ float},3 &\rightarrow 1.41 \cdot (141 \cdot \sin(314 \cdot t) - 141 \cdot \cos(314 \cdot t)) \cdot \sin(314 \cdot t)
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad i(t) := I \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad U_r(t) := R \cdot i(t)$$

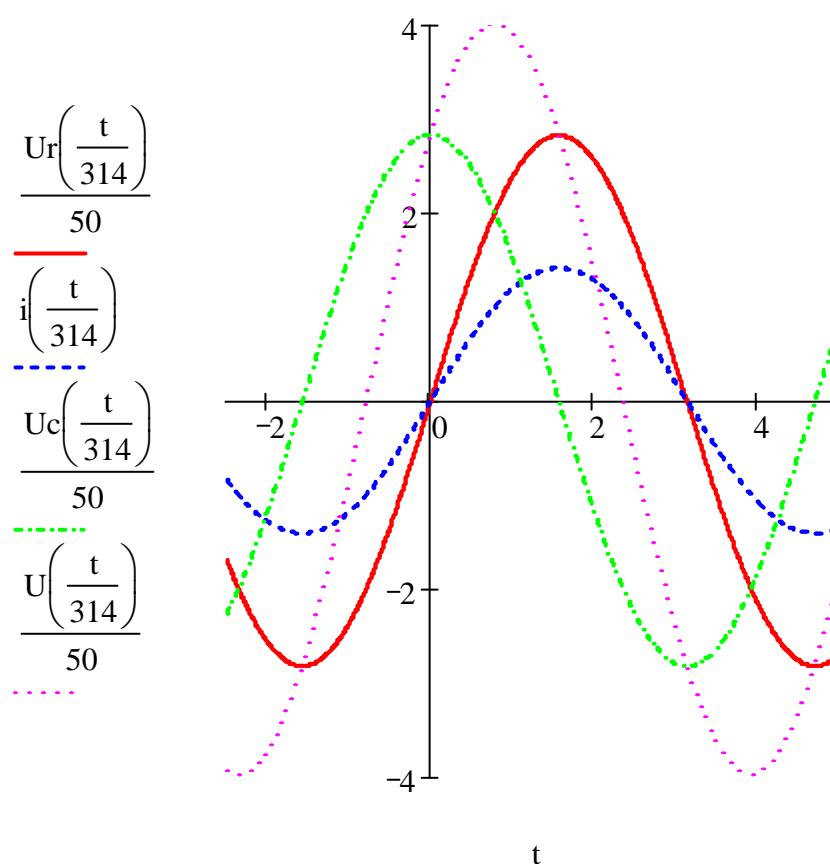
$$\begin{aligned}
\omega &= 314.159 \quad i(t) \rightarrow 1.41 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) \\
U_r(t) &\rightarrow 141.00 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t)
\end{aligned}$$

$$x_c := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

$$U_c(t) := x_c \cdot I \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad U(t) := U_r(t) + U_c(t)$$

$$S(t) := U(t) \cdot i(t)$$

Строим графики токов и напряжений:



На графиках видны углы сдвига фаз между током и напряжением.

Чтобы получить численные значения мгновенных величин в различные моменты времени, задаем расчетный интервал и шаг вычислений:

$$t := 0, \frac{\pi}{10} .. 2 \cdot \pi$$

$i(t) =$	$U_r(t) =$	$U_c(t) =$	$U(t) =$	$S(t) =$
0	0	141.137	141.137	0
-1.361	-136.11	-36.846	-172.956	235.411
0.711	71.067	-121.899	-50.832	-36.125
0.99	99.004	100.493	199.497	197.51
-1.228	-122.76	69.429	-53.331	65.469
-0.349	-34.908	-136.744	-171.651	59.919
1.41	140.986	1.969	142.955	201.547
-0.387	-38.705	135.716	97.01	-37.548
-1.208	-120.777	-72.83	-193.607	233.833
1.018	101.767	-97.689	4.077	4.149
0.676	67.642	123.836	191.478	129.52
-1.371	-137.084	33.031	-104.054	142.641
0.039	3.934	-141.082	-137.149	-5.395
1.35	135.03	40.633	175.663	237.198
-0.744	-74.437	119.867	45.43	-33.817
-0.962	-96.165	-103.219	-199.383	191.736

### Пример 2.10

В разветвленной цепи (рисунок 89), содержащей две ветви, определить ток, активную, реактивную и полную мощности при неизменной частоте источника  $f=50$  Гц и неизменном напряжении  $U = 200$  В. Параметры цепи:  $R_1=10$  Ом;  $L=55,2$  мГн;  $R_2=0$  Ом;  $C=31,8$  мкФ.

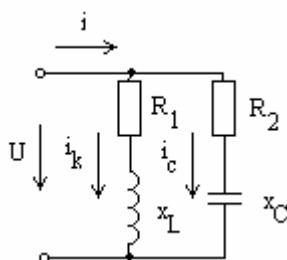


Рисунок 89 – Схема к задаче 2.10

**Решение.**

**Метод проводимостей**

Исходные данные:

$$f := 100 \cdot \text{Hz} \quad R1 := 10 \cdot \Omega \quad C := 138 \cdot \mu\text{F} \quad L := 55.2 \cdot \text{mH} \quad R2 := 0 \cdot \Omega$$

$$U := 200 \cdot \text{V}$$

Определяем угловую частоту и реактивные сопротивления ветвей:

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad XL := \omega \cdot L \quad XC := \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\omega = 628.319 \text{ Hz} \quad XL = 34.683 \Omega \quad XC = 11.533 \Omega$$

Определяем активную, реактивную и полную проводимости ветвей и всей цепи:

$$G1 := \frac{R1}{R1^2 + XL^2} \quad BL := \frac{XL}{(R1^2 + XL^2)} \quad YL := \sqrt{G1^2 + BL^2}$$

$$G1 = 7.675 \times 10^{-3} \text{ S} \quad BL = 0.027 \text{ S} \quad YL = 0.028 \text{ S}$$

$$G2 := \frac{R2}{R2^2 + XC^2} \quad BC := \frac{XC}{(R2^2 + XC^2)} \quad YC := \sqrt{G2^2 + BC^2}$$

$$G2 = 0 \text{ S} \quad BC = 0.087 \text{ S} \quad YC = 0.087 \text{ S}$$

$$Y := \sqrt{(G1 + G2)^2 + (BL - BC)^2}$$

$$Y = 0.061 \text{ S}$$

Определяем токи в ветвях и в неразветвленной части цепи:

$$I := U \cdot Y \quad I1 := U \cdot YL \quad I2 := U \cdot YC$$

$$I = 12.115 \text{ A} \quad I1 = 5.541 \text{ A} \quad I2 = 17.342 \text{ A}$$

Коэффициент мощности всей цепи:

$$\cos := \frac{G1 + G2}{Y}$$

$$\cos = 0.127$$

Реактивные мощности:

$$\begin{aligned}
 Q_L &:= U^2 \cdot B_L & Q_C &:= U^2 \cdot B_C & Q &:= U^2 \cdot (B_L - B_C) \\
 Q_L &= 1.065 \times 10^3 \text{ W} & Q_C &= 3.468 \times 10^3 \text{ W} & Q &= -2.404 \times 10^3 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Активная мощность:

$$\begin{aligned}
 P &:= U^2 \cdot G_1 \\
 P &= 307.002 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Полная мощность:

$$\begin{aligned}
 S_L &:= U^2 \cdot Y_L & S_C &:= U^2 \cdot Y_C & S &:= U^2 \cdot Y \\
 S_L &= 1.108 \times 10^3 \text{ W} & S_C &= 3.468 \times 10^3 \text{ W} & S &= 2.423 \times 10^3 \text{ W}
 \end{aligned}$$

### Символический метод

Определяем угловую частоту и реактивные сопротивления ветвей:

$$\begin{aligned}
 \omega &:= 2 \cdot \pi \cdot f & X_L &:= \omega \cdot L & X_C &:= \frac{1}{\omega \cdot C} \\
 \omega &= 628.319 \text{ Hz} & X_L &= 34.683 \Omega & X_C &= 11.533 \Omega
 \end{aligned}$$

Записываем полные сопротивления в комплексной форме:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &:= R_1 + i \cdot X_L & Z_2 &:= R_2 - i \cdot X_C \\
 Z_1 &= 10 + 34.683i \Omega & Z_2 &= -11.533i \Omega
 \end{aligned}$$

Определяем модули и аргументы комплексных сопротивлений ветвей:

$$\begin{aligned}
 |Z_1| &= 36.096 \Omega & |Z_2| &= 11.533 \Omega \\
 \arg(Z_1) &= 73.916 \text{ deg} & \arg(Z_2) &= -90 \text{ deg}
 \end{aligned}$$

Определяем токи в ветвях:

$$\begin{aligned}
 I_1 &:= \frac{U}{Z_1} & I_2 &:= \frac{U}{Z_2} \\
 I_1 &= 1.535 - 5.324i \text{ A} & I_2 &= 17.342i \text{ A} \\
 |I_1| &= 5.541 \text{ A} & |I_2| &= 17.342 \text{ A} \\
 \arg(I_1) &= -73.916 \text{ deg} & \arg(I_2) &= 90 \text{ deg}
 \end{aligned}$$

$$I := I_1 + I_2$$

$$I = 1.535 + 12.018i \text{ A}$$

$$|I| = 12.115 \text{ A}$$

$$\arg(I) = 82.721 \text{ deg}$$

Определяем мощность ветвей и всей цепи:

$S1 := U \cdot I1$ $S1 = 307.002 - 1.065i \times 10^3 \text{ W}$ $P1 := \text{Re}(S1)$ $P1 = 307.002 \text{ W}$ $Q1 := \text{Im}(S1)$ $Q1 = -1.065 \times 10^3 \text{ W}$	$S2 := U \cdot I2$ $S2 = 3.468i \times 10^3 \text{ W}$ $P2 := \text{Re}(S2)$ $P2 = 0 \text{ W}$ $Q2 := \text{Im}(S2)$ $Q2 = 3.468 \times 10^3 \text{ W}$
$S := U \cdot I$ $S = 307.002 + 2.404i \times 10^3 \text{ W}$ $P := \text{Re}(S)$ $P = 307.002 \text{ W}$ $Q := \text{Im}(S)$ $Q = 2.404 \times 10^3 \text{ W}$	

Результаты расчетов двумя методами сходятся.

## Указания к выполнению самостоятельной работы №2

Для электрической цепи, соответствующей номеру варианта, выполнить следующее:

**Заданы параметры цепи и напряжения на входе цепи**

$$u = Um \sin(\omega t + \psi_u)$$

Требуется:

1. Определить токи и напряжения на всех участках цепи символическим методом.
2. Записать выражение для мгновенных значений всех токов и напряжений.
3. Сделать проверку правильности решения по законам Кирхгофа для момента времени  $t=0$ .
4. Составить баланс активных и реактивных мощностей для цепи.
5. Построить временные диаграммы напряжений, тока и мощности на входе цепи в одних координатных осях.
6. Построить векторную диаграмму токов и напряжений для цепи.

Числовые данные приведены в таблице 4, схемы приведены в таблице 5.

Таблица 4- Исходные данные для самостоятельной работы №2

предпоследняя цифра варианта	$R_1$ , Ом	$L_1$ , мГн	$C_1$ , мкФ	$R_2$ , Ом	$L_2$ , мГн	$C_2$ , мкФ	$R_3$ , Ом	$L_3$ , мГн	$C_3$ , мкФ	$U_m$ , В	$\psi_U$ , рад	f, Гц
1	12	70	500	18	30	125	10	50	450	$250\sqrt{2}$	$\pi/6$	50
2	15	25	125	12	80	500	8	10	200	$50\sqrt{2}$	$\pi/4$	50
3	10	60	600	16	15	150	12	75	400	$300\sqrt{2}$	$\pi/3$	50
4	20	20	100	10	70	400	14	10	125	$140\sqrt{2}$	$\pi/2$	150
5	8	50	650	12	20	200	15	70	500	$160\sqrt{2}$	$\pi/6$	50
6	18	100	300	6	25	125	10	60	400	$150\sqrt{2}$	$\pi/4$	150
7	12	25	150	9	60	600	18	40	100	$100\sqrt{2}$	$\pi/3$	50
8	15	30	175	10	90	300	6	10	250	$170\sqrt{2}$	$\pi/2$	100
9	20	80	450	15	30	175	10	50	600	$280\sqrt{2}$	$\pi/6$	50
0	16	40	100	8	50	500	12	20	200	$360\sqrt{2}$	$\pi/2$	50

Таблица 5- Схемы для самостоятельной работы №2

последняя цифра варианта	схема электрической цепи	последняя цифра варианта	схема электрической цепи
1		6	
2		7	
3		8	

Продолжение Таблицы 5

4		9	
5		0	

## Заключение

Отрасль науки и техники, определяемая термином «электротехника», связана с применением электрических и магнитных явлений для практических целей. Эта отрасль охватывает очень широкий круг вопросов и задач, из числа которых можно выделить теоретические и прикладные, четкую границу между ними провести непросто.

Учебный курс «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) входит в учебные планы большой группы электроэнергетических и других технических специальностей. При подготовке бакалавров электроэнергетики изучением курса ТОЭ создается теоретическая база для изучения последующих прикладных учебных курсов, которые вместе составляют содержание специальности.

Закончив изучение курса ТОЭ, можно приступить к изучению прикладных курсов по специальности. Но, как показывает опыт, курс ТОЭ еще долго остается настольной книгой студентов, а затем и специалистов. Изучение электротехники, как и многих других технических наук, дается нелегко. Для упрощения расчетов в учебном пособии рассмотрены примеры использования программы MathCAD.



## Список использованных источников

- 1 Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Т. 1. - СПб.: Питер, 2003.-463с.
- 2 Сборник задач по теоретическим основам электротехники/ Л.Д.Бессонов, И.Г.Демидова, М.Е.Заруди и др.-М.: Высшая школа, 2003.-52с.
- 3 Прянишников В.А. ТОЭ: Курс лекций: Учебное пособие - 3-е изд., перераб. и доп. - СПб., 2000 - 368 с.
- 4 Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов СВ. Основы теории цепей.- М.: Энергоатомиздат, 1989. -528с.
- 5 Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей. - М.: Высшая школа, 1990.- 544с.
- 6 Попов В. С. Теоретическая электротехника.— М.: Энергоатомиздат, 1990. 544 с.
- 7 Нейман Р. Л., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники М.—Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд., 1981.—416 с.
- 8 Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 2001. —750 с.
- 9 Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники.-М.: Гардарики, 1999.-638с.
- 10 Теоретические основы электротехники. Т.1. Основы теории линейных цепей / Под ред. П.А.Ионкина - М: Высшая школа, 1976. -544с.
- 11 Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники / Под ред. П.А.Ионкина.-М: Энергоиздат, 1982.-768с.
- 12 Константинов В. И. и др. Сборник задач по теоретической электротехнике. — М.: Энергия, 1971. — 240 с.
- 13 Зайчик М. Ю. Сборник задач и упражнений по теоретической электротехнике. — М.: Энергия, 1978. —176 с.
- 14 Херхагер М., Партолль Х.. Mathcad 2000 ВHV, Киев, 2000.– 415 с.
- 15 Крьянов Д.В. Самоучитель МАТНСАД., Санкт-Петербург: «БХВ-Петербург» 2003. – 125 с.