Б. РЫСБАЙУЛЫ, А. Т. БАЙМАНКУЛОВ, Г. И. МАХАМБЕТОВА

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КОНДУКТИВНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Экспериментальное изучение и определение коэффициентов теплопроводности, влагопроводности и т.д. в промерзающих почвах и тонкодисперсных горных породах – чрезвычайно сложная задача. Ее решение зависит не только от технических трудностей экспериментального изучения, сколько от методических, непосредственно обусловленных сложной физической природой рассматриваемого явления. Недостаток сведений о физических и физико-химических причинах, вызывающих миграцию влаги при промерзании, а также процессах, которые ее сопровождают, не позволяет пока получить надежные методы количественных оценок этого явления. В серии работ [1-5] были изучены численными методами эти явления. Там же были разработаны методика решения распространения тепла и влаги в многослойной области. Известно, что, не зная решение прямой задачи, нельзя взяться за решение обратной задачи. После выхода в свет выше указанных работ открылся путь, теперь смело можно взяться за решение обратной задачи. Следует отметить, что самым сложным вопросом является определение коэффициента теплопроводности, в фазовой зоне. Учитывая непосредственную связь между фазовым составом воды в грунте и теплопроводностью, Г. А. Мартынов [6] предлагает, что на коэффициент теплопроводности влияет много параметров и записывает его следующей форме:

$$\lambda = F\left(\frac{\lambda_м}{\lambda_T}, \omega, \omega_{псв}, \omega_н(\vartheta)\right).$$

Здесь $\lambda_т$ и $\lambda_м$ – соответственно коэффициенты теплопроводности талого и полностью мерзлого грунта; $\omega_н(\vartheta)$ - количество незамерзшей воды; $\omega_{псв}$ – количество прочно связанной воды. В этой работе приводится приближенный метод, с помощью которой определяется коэффициента теплопроводности грунта.

1. Постановка задачи

$$\gamma_0 C\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \qquad (1)$$

$$\theta\big|_{z=0} = T_1,\ \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z=H} + \alpha(\theta - T_{взд})\big|_{z=H} = 0, \qquad (2)$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0(z), \quad 0 \le z \le H,$$

$$\theta\big|_{z=H} = \theta_1(t), \quad 0 \le t \le T. \qquad (3)$$

Требуется определить коэффициент теплопроводности λ.

Численное решение задачи (1)-(3) будем искать из минимума функционала:

$$J(\lambda) = \int_0^T [\theta(H,t,\lambda) - \theta_1(t)]^2 dt.$$

Зададим начальное приближение $\lambda_0(z)$. Следующие приближенное решение $\lambda_{n+1}(z)$ будем вычислять методом простых итераций:

$$\lambda_{n+1}(z) = \lambda_n(z) - \beta J'(\lambda_n(z)),$$

здесь β – достаточно малое число, $J'(\lambda_n)$ – градиент функционала $J(\lambda)$. Коэффициенты $\lambda_n(z)$ и $\lambda_{n+1}(z)$ удовлетворяют системе (1) – (3). Обозначим

$$\theta(\lambda_{n+1}) - \theta(\lambda_n) = \delta\theta,\ \lambda_{n+1} - \lambda_n = \delta\lambda.$$

Тогда для перемещения получаем задачу:

$$\gamma_0 c\frac{\partial\delta\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\delta\lambda\frac{\partial\theta(\lambda_{n+1})}{\partial z} + \lambda_n\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right],$$

$$\delta\theta\big|_{z=0} = 0,$$

$$\left(\delta\lambda\frac{\partial\theta(\lambda_{n+1})}{\partial z} + \lambda_n\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right)\Big|_{z=H} + \alpha\delta\theta\big|_{z=H} = 0,$$

$$\delta\theta\big|_{t=0} = 0,\ \delta\theta\big|_{z=H} = 0.$$

2. Градиент функционала

Умножим (1) на $\psi dzdt$ и проинтегрируем по z и t в области $Q = (0,H)\times(0,T)$. После несложных преобразований получим сопряженную задачу:

$$\gamma_0 C\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0,$$

$$\psi(T,z)=0,\ \psi(t,0)=0,$$

$$\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_{z=H}=-2\big(\theta(H,t,\lambda_n)-\theta_1(t)\big).$$

Вычислим приращение функционала

$$J(\lambda+\delta\lambda)-J(\lambda)=$$

$$2\int_0^T\delta\theta\big(\theta(H,t,\lambda_n)-\theta_1(t)\big)dt+\int_0^T(\delta\theta)^2dt.$$

Используя уравнение, начально-краевые условия сопряженной задачи выводим, что

$$J(\lambda+\delta\lambda)-J(\lambda)=$$

$$=\int_0^T\int_0^H\left[\delta\lambda\frac{\partial\theta(\lambda_n)}{\partial z}\right]\frac{\partial\psi(\lambda_n)}{\partial z}dzdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^H\left[\delta\lambda\frac{\partial\delta\theta(\lambda_n)}{\partial z}\right]\frac{\partial\psi(\lambda_n)}{\partial z}dzdt+\int_0^T(\delta\theta)^2dt.$$

Две последние слагаемые в правой части последнего равенства имеют второй порядок малости. Тогда получаем следующий градиент функционала:

$$\nabla J\big(\lambda(z)\big)=\int_0^H dz\int_0^T\frac{\partial\theta(z,t)}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}dt.$$

3. Алгоритм решения задачи

1) Пусть приближение $\lambda_n(z)$ известно

2) Решается прямая задача

$$\gamma_0 c\frac{\partial\theta^n}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\right),\tag{4}$$

$$\lambda_n\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\Big|_{z=H}+\alpha(\theta^n-T_{взд})\Big|_{z=H}=0,\tag{5}$$

$$\theta^n(0,t)=T_1,\ \theta^n(z,0)=\theta_0(z)\tag{6}$$

и определяется $\dfrac{\partial\theta(z,t)}{\partial z}$ и $\theta(H,t,\lambda_n)$.

3) Решается сопряженная задача

$$\gamma_0 c\frac{\partial\psi^n}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n\frac{\partial\psi^n}{\partial z}\right),\tag{7}$$

$$\psi^n(T,z)=0,\ \psi^n(t,0)=0,\tag{8}$$

$$\lambda_n\frac{\partial\psi^n}{\partial z}\Big|_{z=H}=-2\big(\theta(H,t,\lambda_n)-\theta_1(t)\big).\tag{9}$$

4) Вычисляется градиент функционала

$$\nabla J\big(\lambda(z)\big)=\int_0^H dz\int_0^T\frac{\partial\theta^n(z,t)}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi^n(z,t)}{\partial z}dt.$$

5) Следующее приближение коэффициента теплопроводности определяется по формуле:

$$\lambda_{n+1}(z)=\lambda_n(z)-\beta\nabla J(\lambda_n(z)),\ \beta>0.$$

4. Априорные оценки прямой задачи

Теорема 1. Для решение задачи (4)-(6) справедливо оценка

$$\frac{1}{2}\gamma_0 C\left\|\theta^n\right\|^2+\int_0^T\left\|\sqrt{\lambda_n}\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\right\|^2dt+\frac{\alpha}{2}\int_0^T\big(\theta^n(H,t)\big)^2dt\le$$

$$\max_t\max_z|\theta(z,t)|=M<\infty$$

$$\le\frac{\alpha}{2}\int_0^T T^2_{взд}(t)\,dt+\frac{1}{2}\gamma_0 c\left\|\theta_0^n\right\|^2=c_1.\tag{10}$$

Теорема 2. Для решение задачи (7)-(9) справедливо оценка

$$\gamma_0 c\int_0^H(\psi^n)^2dz+\frac{1}{2}\int_t^T\int_0^H\lambda_n\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial z}\right)^2dzdt\le C_2<\infty,\tag{11}$$

На основе (10) и (11) получаем, что

$$\left|\nabla J\big(\lambda(z)\big)\right|=\int_0^T\int_0^H\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\frac{\partial\psi^n}{\partial z}dzdt\le$$

$$\le\left(\int_0^T\int_0^H\left(\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\right)^2\cdot\lambda_n dzdt\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int_0^T\int_0^H\lambda_n\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial z}\right)^2dzdt\right)^{1/2}\frac{1}{\lambda_n}\le c_3.$$

Теорема 3. Последовательность $\{\lambda_n\}$ сходится к одному пределу и ограничено сверху и снизу положительной константой.

Теорема 4. Последовательность $\{J(\lambda_n)\}$ является монотонно убывающей и ограничено сверху положительной константой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамов А.А.* Процессы протаивания грунта // Доклады НАН РК. 2007. №1. С. 16-19.

2. *Жумагулов Б.Т., Рысбайұлы Б., Адамов А.А.* Сходимость разностной схемы для обобщенной задачи Стефана конвективного распространения влаги // Вестник НАН РК. 2007. №5. С. 30-41.

3. *Рысбайұлы Б., Адамов А.А.* Исследование изменений теплоемкости фазовой зоны в многослойном грунте // Доклады НАН РК. 2007. №4. С. 14-17.

4. *Рысбайұлы Б., Адамов А.А.* Исследование теплопроводности фазовой зоны в многослойном грунте // Вестник НАН РК. 2007. №4. С. 30-33.

5. *Рысбайұлы Б., Адамов А.А.* Зависимость влаги от толщины слоя при промерзаний многослойного грунта // Известия НАН РК. Серия физика, математика. 2007. №5. С. 15-18.

6. *Мартынов Г.А.* Тепло- и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогии (мерзлотоведения). М., 1959. Под. ред. Н. А. Цытович. Гл. VI. С. 153-192.

7. *Чудновский А.Ф.* Теплобмен в дисперсных средах. М.: Гостехиздат, 1954. 444 с.

Резюме

Жұмыста жылудың топырақта таралу есебі қарастырылады. Топырақтың жылу өткізгіштік коэффициентін анықтайтын итерациалық тәсіл ұсынылады және оның жинақтылығы дәлелденеді.

Поступила 2.12.07г.