

## MATEMATYKA

### DYFERENCJALNE I INTEGRALNE ZRYWNANIE

- Аршава Е.А. Применение метода операторных тождеств при решении задачи обращения интегральных операторов .....
- Нурушева Н.М. Сызықтық емес оператордың туындысы .....

### STOSOWANA MATEMATYKA

- Кучерук О.Я., Бойко С.В. Кореляційно-регресійний аналіз рівня злочинності в регіоні.....
- Кучерук О.Я., Рибак В.Р. Прогнозування обсягів продажу одягу для новонароджених фірмою «Елізабет» .....
- Кучерук О.Я., Піддубко В.А. Статистичний аналіз стану емоційного вигорання у педагогів загальноосвітніх закладів .....
- Сапожникова Е.Ю. Метод Монте-Карло или имитационное моделирование для оценки рисков инвестиционных проектов .....
- Байманкулов А.Т., Махамбетова Г.И. Рекуррентное соотношение для определения коэффициента капиллярной диффузии .....
- Байманкулов А.Т., Махамбетова Г.И. Конечно-разностная аппроксимация прямой и сопряженной задачи.....
- Будылина Е.А., Гарькина И.А., Данилов А.М. Оценка эффективности функционирования сложных систем.....

## FIZYKA

### TEORETYCZNA FIZYKA

- Калакова Г.К., Кравцов В.М., Калаков Б.А. Решение задачи о в четырехугольника минимального периметра по методу Шварца....
- Калакова Г.К., Кравцов В.М., Калаков Б.А. Квадрат изометрии Траектория с двойным обходом сторон многоугольника.....
- Калакова Г.К., Кравцов В.М., Калаков Б.А. Замкнутые бильярд траектории в прямоугольнике и фигуры Лиссажу .....

### ZASTOSOWANIE FIZYCZNYCH METOD W MEDYCYNIE

- Микитюк О.Ю., Шаплавський М.В. Сучасні технології наукових досліджень у медичній психології.....

Калакова Г.К.

Костанайский государственный университет им.А.Байтурсынова, Казахстан,

к.ф.-м.н. Кравцов В.М.

Г.Санкт-Петербург, Россия

к.ф.-м.н. Калаков Б.А.

Костанайский государственный педагогический институт, Казахстан

## КВАДРАТ ИЗОМЕТРИИ. ТРАЕКТОРИЯ С ДВОЙНЫМ ОБХОДОМ СТОРОН МНОГОУГОЛЬНИКА

**Теорема.** В выпуклом многоугольнике с нечётным числом сторон  $n$ , имеющем вписанный многоугольник минимального периметра, существует бесконечно много замкнутых бильярдных траекторий с  $n$  парами звеньев; звенья каждой пары параллельны одной из соответствующих сторон вписанного многоугольника и равно от нее удалены, расстояние между параллельными звеньями постоянно для всех пар. Длина траектории равна удвоенному периметру вписанного многоугольника.

Траекторию, о которой идёт речь в теореме, будем называть траекторией с двумя обходами сторон многоугольника.

Существование бильярдной траектории с двумя обходами сторон многоугольника установим на примере треугольника.

Пусть в треугольник  $A_1A_2A_3$  вписан треугольник минимального периметра  $P_1P_2P_3$  (на рис. 39 изображен красным цветом). Стороны  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1$  треугольника  $P_1P_2P_3$  пусть лежат соответственно на прямых  $L_2, L_3, L_1$ . Обозначим, как и прежде, симметрии относительно прямых  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1$  соответственно через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

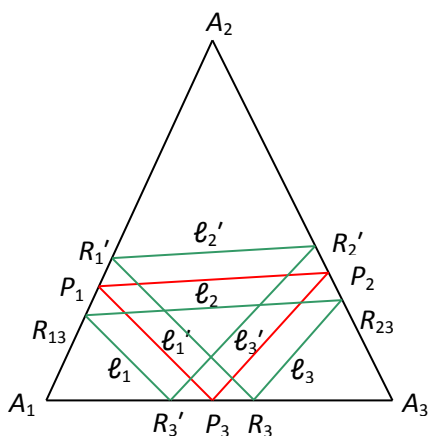


Рис. 39

Построим в треугольнике  $A_1A_2A_3$  замкнутую бильярдную траекторию следующим образом. Выберем на стороне  $A_1A_2$  треугольника  $A_1A_2A_3$  точку  $R_1$ , не совпадающую с точкой  $P_1$ , и проведём через неё прямую  $l_1$  параллельно  $L_1$ . Применим к прямой  $l_1$  преобразование симметрии  $\sigma_1$ . Получим прямую  $l_2$ , пересекающую стороны треугольника  $A_1A_2A_3$  в точках  $R_1$  и  $R_2$ . Так как прямые  $l_1$  и  $L_1$  параллельны, то вследствие свойств преобразования осевой симметрии параллельны и прямые  $l_2$  и  $L_2$ . При преобразовании осевой симметрии сохраняется и расстояние между параллельными прямыми. Далее найдём, что прямая  $l_3 = \sigma_2 l_2 = \sigma_2 \sigma_1 l_1$  параллельна прямой  $L_3$  и удалена от

неё на такое же расстояние как и  $l_2$  от  $L_2$ . Применив к прямой  $l_3$  преобразование  $\sigma_3$ , получим прямую  $l_1'$ :

$$l_1' = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 l_1 .$$

Так как  $L_1$  является осью скользящей симметрии  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$  и прямая  $l_1$  параллельна  $L_1$ , то и прямая  $l'_1$  параллельна  $L_1$  и удалена от неё на то же расстояние, что и прямая  $l_1$ . Ясно, что прямые  $l_1$  и  $l'_1$  расположены по разные стороны от прямой  $L_1$ .

Аналогичные заключения можно сделать и о прямых  $L_2, l_2, l'_2 = \sigma_1\sigma_3\sigma_2l_2$ , а также о прямых  $L_3, l_3, l'_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3l_3$ . Пересекаясь со сторонами треугольника  $A_1A_2A_3$ , прямые  $l_1, l'_1, l_2, l'_2, l_3, l'_3$  образуют шестизвенную замкнутую траекторию  $R_1R_2R_3R'_1R'_2R'_3$ .

Замечая, что, например, четырёхугольник  $R_1R'_1R'_2R_2$  является трапецией, а отрезок  $P_1P_2$  её средней линией, можно легко установить высказанное в теореме утверждение о длине траектории.

Отметим, что прямые  $l_1$  и  $l'_1$  инвариантны относительно преобразования  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1 = S_1^2$ :

$$\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1 l_1 = l_1,$$

$$\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1 l'_1 = l'_1.$$

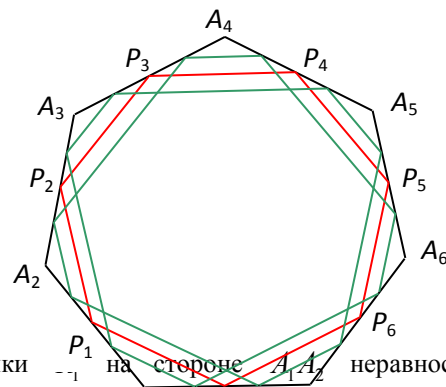
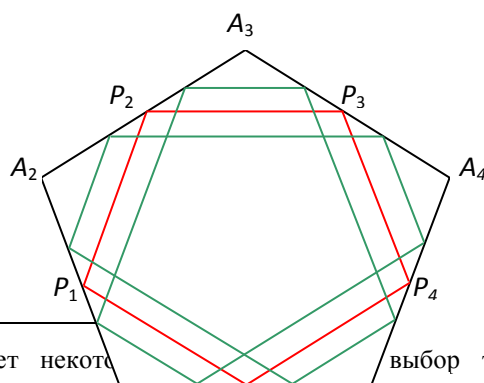
прямые  $l_2$  и  $l'_2$  инвариантны относительно преобразования  $\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2 = (\sigma_1\sigma_3\sigma_2)^2 = S_2^2$ , а прямые  $l_3$  и  $l'_3$  - относительно преобразования  $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3 = (\sigma_2\sigma_1\sigma_3)^2 = S_3^2$ .

Эти изометрии, относительно которых инвариантны прямые  $l_1, l'_1, l_2, l'_2, l_3, l'_3$ , как квадраты скользящих симметрий  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1, \sigma_2\sigma_1\sigma_3, \sigma_1\sigma_3\sigma_2$ , являются параллельными переносами.

При построении траектории  $R_1R_2\dots R'_3$  точка  $R_1$  на стороне  $A_1A_2$  треугольника  $A_1A_2A_3$  была выбрана произвольно.<sup>1)</sup> Отсюда, очевидно, следует, что в треугольнике существует бесконечно много траекторий подобного типа.

Множество таких траекторий имеет мощность континуума.

Рассуждения, проведённые для остроугольного треугольника, могут быть повторены для



1) Существует некоторая траектория, проходящая через заданные точки. Выбор точки  $P_1$  на стороне  $A_1A_2$  неравностороннего треугольника. Одна из траекторий, проходящих через заданные точки, утверждается о существовании траектории, проходящей через заданные точки. Сделанное замечание вызвано тем, что в неравностороннем треугольнике не существует траектории, проходящей через заданные точки с двойным обходом его сторон. В равностороннем треугольнике такая траектория существует.

Рис. 40

Рис. 41

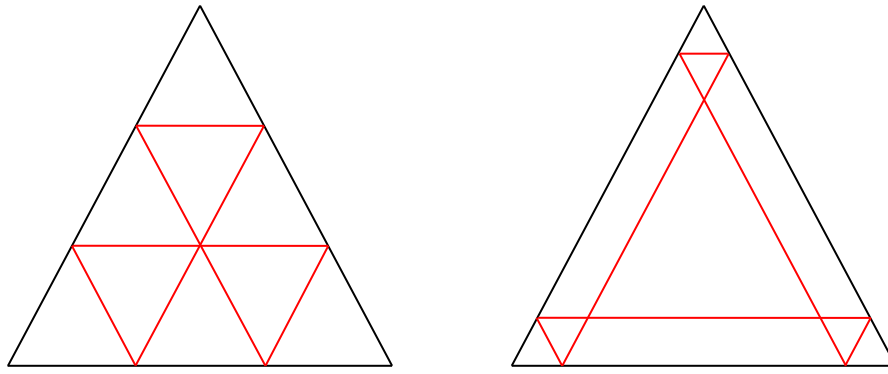


Рис. 42

многоугольника с любым нечётным  $n$ , допускающего вписание в него многоугольника минимального периметра.

Об обсуждаемой в данном разделе замкнутой траектории с двумя обходами сторон многоугольника будем говорить, что она сопутствует траектории, являющейся вписанным многоугольником минимального периметра. Во всяком многоугольнике с нечётным  $n$ , допускающем вписание многоугольника минимального периметра, таких замкнутых самопересекающихся траекторий бесконечно много. Изложенная теорема иллюстрируется рис. 40, 41 и 42. На рис. 40 и 41 показаны соответственно для пятиугольника и правильного семиугольника вписанные многоугольники минимального периметра, а также замкнутые бильярдные траектории с двумя обходами сторон многоугольника. На рис. 42 показаны образцы замкнутых траекторий с двумя обходами сторон в равностороннем треугольнике.

Выше мы показали, что длина замкнутой бильярдной траектории с двумя обходами сторон многоугольника в два раза больше длины траектории, которой она сопутствует. Покажем теперь, что этот факт является очевидным в рамках теоретико-групповых представлений.

Покажем это на примере остроугольного треугольника. В самом деле, бильярдной траектории в виде вписанного треугольника соответствуют скользящие симметрии

$$S_1 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = s_1 t_{\vec{a}_1}, \quad S_2 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 = s_2 t_{\vec{a}_2}, \quad S_3 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 = s_3 t_{\vec{a}_3}$$

с симметриями  $s_1, s_2, s_3$  относительно прямых  $L_1, L_2, L_3$  и равными по длине векторами параллельного переноса  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ . Длина траектории равна  $|\vec{a}_1|$ . Траекторию с двумя обходами сторон треугольника описывают изометрии  $S_1^2, S_2^2, S_3^2$ , являющиеся соответственно параллельными переносами  $t_{2\vec{a}_1}, t_{2\vec{a}_2}, t_{2\vec{a}_3}$ . В соответствии с теоремой о равенстве длины замкнутой траектории и длины соответствующего ей вектора параллельного переноса длина сопутствующей траектории равна  $2|\vec{a}_1|$ .

## § 7 О высотном треугольнике

Как известно (см., например, [2], [20]), вершинами вписанного треугольника минимального периметра являются основания высот заданного треугольника. Но стороны вписанного треугольника минимального периметра, как показано выше, лежат на осях  $L_1, L_2, L_3$  изометрий  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_3\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\sigma_3$ . Нами также было показано, что прямые  $L_1, L_2, L_3$  проходят через основания высот заданного треугольника  $A_1A_2A_3$ . Используя непосредственно выражения скользящих симметрий  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_3\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\sigma_3$ , покажем ещё раз, что дело обстоит именно так. Покажем, что, например, прямая  $L_1$  действительно проходит через основание высоты, опущенной на сторону  $A_1A_3$ .

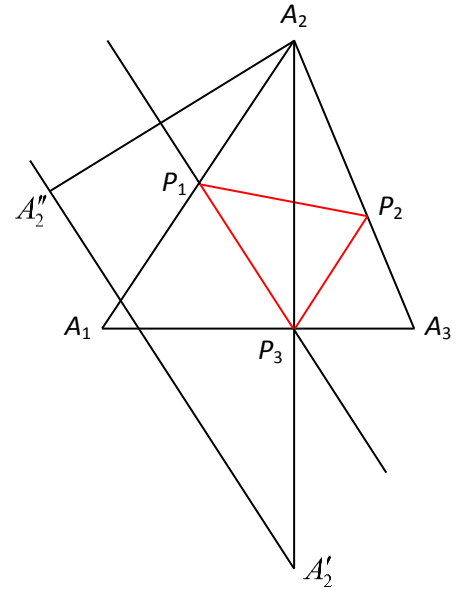


Рис. 43

Для этого рассмотрим два возможных способа построения образа точки  $A_2$  при изометрии  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ .

Пусть образом точки  $A_2$  при изометрии  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$  будет точка  $A_2'$  (рис.43). Применяя последовательно симметрии  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и учитывая, что точка  $A_2$  лежит на прямых  $A_1A_2$  и  $A_2A_3$ , получим

$$A_2' = \sigma_3\sigma_2\sigma_1(A_2) = \sigma_3(A_2).$$

Таким образом, точка  $A_2'$  симметрична точке  $A_2$  относительно прямой  $A_1A_3$ . Точка  $P_3$ , являющаяся серединой отрезка  $A_2A_2'$ , и есть основание высоты треугольника  $A_1A_2A_3$ , опущенной на сторону  $A_1A_3$ . Покажем теперь, что прямая  $L_1$  действительно проходит через точку  $P_3$ . Для этого проведем построение точки  $A_2'' = \sigma_3\sigma_2\sigma_1(A_2)$  с учётом того, что преобразование  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$  есть скользящая симметрия. Пусть  $A_2''$  - точка, симметричная точке  $A_2$  относительно прямой  $L_1$ . Проведём через  $A_2''$  прямую, параллельную  $L_1$ . Так как  $L_1$  есть ось скользящей симметрии  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ , то указанная прямая пройдёт через точку  $A_2'$ , причём длина отрезка  $A_2'A_2''$  должна равняться длине вектора параллельного переноса изометрии  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ . Рассмотрим теперь треугольник  $A_2A_2'A_2''$ . Прямая  $L_1$  проходит через середину его стороны  $A_2A_2''$  параллельно  $A_2'A_2'$ , а потому пересекает сторону  $A_2A_2'$  в её середине, то есть в точке  $P_3$ . Аналогично доказывается, что прямая  $L_1$  пересекает сторону  $A_1A_2$  треугольника  $A_1A_2A_3$  в точке  $P_1$ , являющейся основанием высоты  $A_3P_1$ . Соответствующее доказательство проводится с помощью построения образа точки  $A_3$  относительно изометрии  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = (\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^{-1}$ . Как было показано выше, прямая  $L_1$  инвариантна относительно преобразования  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ , обратного преобразованию  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ .

В дальнейшем треугольник, образованный основаниями высот заданного треугольника,

будем называть его высотным треугольником.<sup>1)</sup> Это название используется, например, в литературе на немецком языке. Используется оно и в книге [9].

**Задача.** Определить минимальный периметр треугольника, вписанного в заданный остроугольный треугольник  $A_1A_2A_3$ .

**Решение.** Мы покажем, как решается эта задача, если исходить из утверждения о равенстве минимального периметра треугольника, вписанного в заданный треугольник  $A_1A_2A_3$ , и длины вектора параллельного переноса изометрии  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ , где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - симметрии относительно сторон  $A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3$  треугольника  $A_1A_2A_3$  (теорема гл.Ш, §5).

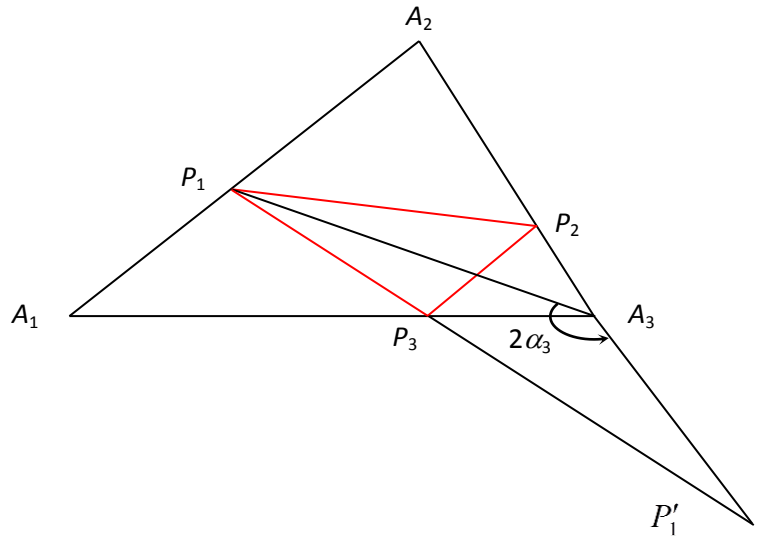


Рис. 44

Пусть  $P_1, P_2, P_3$  - основания высот треугольника  $A_1A_2A_3$  и тогда  $P_1P_2P_3$  - вписанный в него треугольник минимального периметра (рис. 44). Как установлено выше, осью скользящей симметрии  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$  является прямая  $P_3P_1$ . Каждая точка прямой  $P_3P_1$  при преобразовании  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$  испытывает перенос вдоль неё на расстояние, равное длине вектора параллельного скользящей симметрии  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ . Для определения указанной длины рассмотрим, на какое расстояние перемещается точка  $P_1$  при преобразовании  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ . Так как точка  $P_1$  лежит на прямой  $A_1A_2$ , то при симметрии  $\sigma_1$  она остается на месте. При последующем преобразовании  $\sigma_3\sigma_2$  точка  $P_1$  переходит в точку  $P_1'$ , лежащую на оси  $P_3P_1$ . Точка  $P_1'$  удалена от точки  $P_1$  на расстояние, равное длине вектора параллельного переноса изометрии  $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ . Но преобразование  $\sigma_3\sigma_2$  есть поворот вокруг точки  $A_3$  на угол, равный удвоенному углу треугольника  $A_1A_2A_3$  при вершине  $A_3$ . Обозначим величины углов треугольника при вершинах  $A_1, A_2, A_3$  соответственно через  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Имеем, таким образом,  $P_1'A_3 = P_1A_3$ ,  $\angle P_1A_3P_1' = 2\angle A_2A_3A_1 = 2\alpha_3$ . Далее находим:  $P_1A_3 = A_2A_3 \sin \alpha_2$ ,

$$\frac{1}{2} P_1P_1' = P_1A_3 \sin \alpha_3 = A_2A_3 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3. \text{ Используя теорему синусов, окончательно}$$

находим для длины вектора параллельного переноса  $P_1P_1'$ :

$$P_1P_1' = 4R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3,$$

<sup>1)</sup> Вписанный треугольник, вершинами которого являются основания высот заданного треугольника, иногда называют ортоцентрическим (или ортотреугольником).

где  $R$  – радиус описанной окружности треугольника  $A_1A_2A_3$ . Длине  $P_1P_1'$  и равен минимальный периметр  $p$  треугольника, вписанного в заданный треугольник  $A_1A_2A_3$ :

$$p = 4R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3. \quad (1)$$

Полученное выражение для периметра  $p$  определяет длину вектора параллельного переноса произведения трёх осевых симметрий относительно прямых  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_1A_3$ , образующих остроугольный треугольник с углами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и радиусом  $R$  описанной окружности.

Заметим, что по соотношению  $P_1P_1' = 2P_1A_3 \sin \alpha_3$  наименьший периметр треугольника, вписанного в остроугольный треугольник, меньше удвоенной длины наименьшей его высоты. В прямоугольном и тупоугольном треугольниках вписанный треугольник наименьшего периметра вырождается в двоякный отрезок, совпадающий с высотой, опущенной на большую сторону треугольника.

Интересно, что формула для площади  $S$  высотного треугольника также имеет симметрический вид:  $S = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 \sin 2\alpha_3$ .

Площадь  $S_0$  треугольника  $A_1A_2A_3$  определяется через радиус  $R$  описанной окружности и углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  по формуле  $S_0 = 2R^2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3$ . Отсюда имеем, что площадь  $S_0$  треугольника  $A_1A_2A_3$  и периметр  $p$  его высотного треугольника связаны соотношением

$$\frac{p}{S_0} = \frac{2}{R}.$$

Известно, что среди треугольников, вписанных в окружность заданного радиуса  $R$ , наибольшую площадь имеет равносторонний (см., например, [8], [26]). Следовательно, среди треугольников, вписанных в окружность заданного радиуса, равносторонний имеет высотный треугольник наибольшего периметра.

Выражение (1) как формула, определяющая минимальный периметр вписанного треугольника, может быть установлена и без ссылки на утверждение о равенстве указанного периметра и длины вектора параллельного переноса соответствующей изометрии. Известное решение задачи о высотном треугольнике, приводимое, например, в книгах [2], [20] также построено на использовании осевой симметрии относительно сторон треугольника. В указанных книгах обойден вопрос о величине минимального периметра вписанного треугольника. Отметим, однако, что выражение (1) легко может быть получено и в рамках решений, изложенных в книгах [2], [20].

Изложенное нами решение задачи о высотном треугольнике служит иллюстрацией общих свойств замкнутых бильярдных траекторий с нечётным числом вершин в многоугольниках.

