Калакова Г.К.,
Костанайский государственный университет им. А. Байтурсынова, Казахстан;
к.ф-м.н. Кравцов В.М.,
г.Санкт-Петербург, Россия;
к.ф-м.н Калаков Б.А.,
Костанайский государственный педагогический институт, Казахстан

Решение задачи о вписании четырёхугольника минимального периметра по методу Шварца

Ради иллюстрации применения метода Шварца в решении задач о бильярдных траекториях рассмотрим решение задачи о вписании четырёхугольника минимального периметра по этому методу. Мы изложим известное решение задачи по этому методу (см., например, [1], [2], [3]) , а также покажем, что метод позволяет коротко и просто установить формулу наименьшего периметра вписанного четырёхугольника.

Итак, пусть дан четырёхугольник , удовлетворяющий условию, что его вершины лежат на одной окружности. Пусть искомым вписанным в него многоугольником минимального периметра будет (рис. 1). Для четырёхугольника четырёхугольник должен быть бильярдной траекторией. Последовательно проведём четыре следующих построения. Построим четырехугольник , симметричный с относительно стороны , затем – четырёхугольник , симметричный с относительно , четырёхугольник , симметричный с относительно , и, наконец, четырёхугольник , симметричный с относительно .

Заметим, что четырёхугольник можно получить из четырёхугольника двумя поворотами: сначала поворотом вокруг точки на угол и последующим поворотом вокруг точки на угол . Так как , то соответственные стороны четырёхугольников и параллельны. Другими словами, четырёхугольник получен из четырёхугольника параллельным переносом.

В силу того, что четырёхугольник является бильярдной траекторией, он, по проведенным построениям, разворачивается в прямолинейный отрезок , состоящий из отрезков , , и . Как видим, итогом четырёх симметрий явился параллельный перенос четырёхугольника с вектором переноса, длина которого равна периметру четырёхугольника . Ясно и построение четырёхугольника . Выбрав, например, произвольно точку на стороне , строим соответственную ей точку на стороне четырёхугольника . Соединив точки и прямолинейным отрезком и получив точки , , , построим на сторонах четырёхугольника точки и , соответственные точкам и .

Из факта, что точка была выбрана на стороне произвольно, следует, что существует бесчисленное множество вписанных в четырёхугольников минимального периметра. Соответственные стороны этих четырёхугольников параллельны.

При проведённых преобразованиях всякий вписанный четырёхугольник, не являющийся бильярдной траекторией, развернется в ломаную, расстояние между концами которой равно длине вектора параллельного переноса . Ясно, что периметр такого вписанного четырёхугольника, не являющегося бильярдной траекторией, больше периметра четырёхугольника .

Так как минимальный периметр вписанного многоугольника равен длине вектора переноса итогового преобразования, то для его определения достаточно воспользоваться расстоянием, на которое переместилась какая-либо точка четырёхугольника при указанном преобразовании. Рассмотрим, например, перемещение точки . Величину отрезка определим из равнобедренного треугольника , боковая сторона которого равна диагонали четырёхугольника , а угол при вершине равен . Действительно, точка , являющаяся образом точки при проведенных преобразованиях, может быть получена из точки поворотом диагонали около точки на угол . Отсюда находим:

=.

Таким образом, периметр четырёхугольника определён.

Литература:

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Ч. I. Четвёртое русское издание, с приложением составленных проф. Пчёлкиным Д. И. решений всех помещённых в тексте задач. – М.: Учпедгиз, 1957.
2. Радемахер Г. и Теплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления. Пер. с нем. Контовта В. И. Под ред., с доп. и примечаниями Яглома И. М. – М.: Физматгиз, 1962.
3. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.