

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ**

**7М05401– МАТЕМАТИКА БІЛІМ БЕРУ БАҒДАРЛАМАСЫ БОЙЫНША  
ПРЕРЕКВИЗИТТЕР ЕМТИХАНЫНЫҢ  
БАҒДАРЛАМАСЫ**

**Қостанай, 2019**

# НЕГІЗГІ БӨЛІМ

## (Пәндер мазмұны)

### 1 Функционалдық талдау

**1 Модуль Метрикалық, топологиялық және сызықтық, нормаланған кеңістіктер.**

#### 1.1 Кіріспе

Функционалдық анализ пәні. Негізгі даму кезеңдері. Математиканың басқа салаларымен байланысы.

#### 1.2 Метрикалық кеңістіктер

Жиын. Бейнелеу. Метрикалық кеңістіктер. Метрикалық кеңістіктердің мысалдары. Топологиялық кеңістіктер туралы түсініктер. Метрикалық кеңістіктің топологиялық түсініктері: ашық және тұйық шарлар, маңай, ішкі және сыртқы нүктелер. Жиынның шектік нүктесі. Ашық және тұйық жиындар. Жиынның тұйықталуы. Барлық жерде тығыз жиын. Сепарабель кеңістіктер. Тізбектердің жинақтылығы. Үзіліссіз бейнелеу. Гомеоморфизм.

#### 1.3 Сызықтық нормаланған кеңістіктер

Сызықтық нормаланған кеңістіктер. Норма мысалдары. Банах кеңістігі. Фундаментальды тізбектер. Толық кеңістіктер. Толық кеңістіктердің мысалдары. Толық емес кеңістіктердің мысалдары. Кеңістікті толтыру.

#### 1.4 Толық метрикалық кеңістіктердегі негізгі теоремалар

Енгізілген шарлар принципі, Бэра-Хаусдорфтың категориялар туралы теориясы, қысып бейнелеу принципі және оның қолданылуы.

#### 1.5 Гильберттік кеңістіктер

Евклид (унитарлық) кеңістігі. Гильберт кеңістігі. Скаляр көбейтіндінің Гильберт кеңістігіндегі қасиеттері. Ішкенеңістіктердің ортогонал қосынды бойынша Гильберт кеңістігінде жіктеу.

#### 1.6 Гильберт кеңістігінің базисы

Гильберт кеңістігінің базисы. Ортонормаланған жүйе. Толық жүйе. Бессель теңсіздігі бір минимизацияланған есептің салдары ретінде. Парсеваль теңдігі. Рисс-Фишер теоремасы. Берілген өлшемдер санының ақырлы өлшемді кеңістіктер арасындағы изоморфизмы. Сепарабельді гильберттік кеңістіктердің изоморфтығы.

#### 1.7 Компактылық

Компактылық, саналымды компакттылық, секвенциялдық компакттылық, шалакомпактылық,  $\varepsilon$  – тор. Компактылық критерийі. Шенелген және толық шенелген жиындар. Шенелген, бірақ толық шенелген емес жиынның мысалы. Метрикалық кеңістігінде жиынның шалакомпактылық критерийі. Арцель теоремасы. Шенелген жиындардың шалакомпактылығы ақырлы өлшемді кеңістіктердің сипаттауыш қасиеті ретінде.

## **2 Модуль Сызықтық функционалдар мен операторлар.**

### **2.1 Сызықтық операторлар мен функционалдар**

Сызықтық операторлардың қасиеттері. Сызықтық нормаланған кеңістіктерде сызықтық операторлардың үзіліссіздік және шенелгендік эквиваленттігі. Оператордың нормасы. Сызықтық үзіліссіз операторлардың сызықтық нормаланған кеңістігі. Операторлар тізбектерінің бірқалыпты және нүктелік жинақтылығы

### **2.2 Функционалық талдаудың негізгі принциптері**

Бірқалыпты шенелгендік принципі - Банах-Штейнгауз теоремасы. Нүктелік жинақтылық критерийі. Кері операторлар. Үзіліссіз керіленетін операторлар. Кері операторлар туралы теоремалар.

### **2.3 Тұйық операторлар**

Ашықтық бейнелеу принципі- Банахтың кері оператор және тұйық график туралы теоремасы. Үзіліссіз болмайтын тұйық оператордың мысалы.

### **2.4 Хан-Баннах теоремасы**

Сызықтық оператордың үзіліссіз жалғастыру туралы теоремасы. Сызықтық функционалдарды жалғастыру туралы Хан-Баннах теоремасы және оның салдары.

### **2.5 Түйіндес және екінші түйіндес кеңістік**

Сызықтық функционалдардың жалпы түрі. Гильберт кеңістігіндегі сызықтық үзіліссіз функционалдың ұсынылуы туралы Рисс теоремасы. Түйіндес кеңістік және оның толықтылығы. Рефлексивті кеңістіктер. Элементтердің әлді және әлсіз жинақтылығы. Әлсіз шектің элементке жалғыздығы. Элементтер тізбегінің элементке әлсіз жинақталу критерийі. Ақырлы өлшемді кеңістікте элементтердің әлді және әлсіз жинақтарының тура келуі. Түйіндес кеңістіктегі функционалдардың әлді және әлсіз жинақтылығы. Функционалдар тізбегінің әлсіз жинақталу критерийі. Түйіндес кеңістіктегі бірлік шардың әлсіз компакттылығы.

### **2.6 Спектрлік теориясының элементтері**

Оператордың меншікті векторы мен меншікті мәні. Мысалдар. Сызықтық оператордың резольвенттік жиыны және спектрі. Түйіндес, өзіне түйіндес (симметриялық) операторлар.

### **2.7 Толық үзіліссіз (компакты) операторлар**

Толық үзіліссіз (компакты) операторлар. Толықтай үзіліссіз оператордың меншікті мәні. Ядросының квадраты интегралданатын Фредгольм операторының толық үзіліссіздігі. Толықтай үзіліссіз түйіндес оператор туралы Гильберт-Шмидт теоремасы.

### **2.8 Жалпыланатын функциялар теориясы элементтері**

Негізгі және жалпыланған функциялар кеңістіктері. Жалпыланған функциялардың туындысы. Жалпыланған функциялардың қарапайым қолданылымдары.

## Емтихандық сұрақтар

1. Функционалдық анализ пәні. Негізгі даму кезеңдері.
2. Математиканың басқа салаларымен байланысы.
3. Жиын.
4. Бейнелеу.
5. Метрикалық кеңістіктер. Метрикалық кеңістіктердің мысалдары.
6. Топологиялық кеңістіктер туралы түсініктер.
7. Метрикалық кеңістіктің топологиялық түсініктері: ашық және тұйық шарлар, маңай, ішкі және сыртқы нүктелер.
8. Ашық және тұйық жиындар.
9. Жиынның тұйықталуы.
10. Барлық жерде тығыз жиын.
11. Сепарабель кеңістіктер.
12. Тізбектердің жинақтылығы.
13. Гомеоморфизм.
14. Сызықтық нормаланған кеңістіктер. Норма мысалдары.
15. Банах кеңістігі.
16. Фундаментальды тізбектер.
17. Толық кеңістіктер. Толық кеңістіктердің мысалдары. Толық емес кеңістіктердің мысалдары. Кеңістікті толтыру.
18. Енгізілген шарлар принципі, Бэра-Хаусдорфтың категориялар туралы теориясы, қысып бейнелеу принципі және оның қолданылуы.
19. Евклид (унитарлық) кеңістігі.
20. Гильберт кеңістігі.
21. Скаляр көбейтіндінің Гильберт кеңістігіндегі қасиеттері.
22. Ішкеңістіктердің ортогонал қосынды бойынша Гильберт кеңістігінде жіктеу.
23. Гильберт кеңістігінің базисы.
24. Ортонормаланған жүйе.
25. Бессель теңсіздігі бір минимизацияланған есептің салдары ретінде.
26. Рисс-Фишер теоремасы.
27. Компактылық, саналымды компакттылық, секвенциялдық компакттылық, шалакомпактылық.  $\varepsilon$  – тор.
28. Шенелген және толық шенелген жиындар.
29. Сызықтық операторлардың қасиеттері.
30. Сызықтық нормаланған кеңістіктерде сызықтық операторлардың үзіліссіздік және шенелгендік эквиваленттігі.
31. Оператордың нормасы.
32. Сызықтық үзіліссіз операторлардың сызықтық нормаланған кеңістігі.
33. Операторлар тізбектерінің бірқалыпты және нүктелік жинақтылығы
34. Бірқалыпты шенелгендік принципі - Банах-Штейнгауз теоремасы.
35. Нүктелік жинақтылық критерийі.
36. Кері операторлар. Үзіліссіз керіленетін операторалар.
37. Кері операторлар туралы теоремалар.

38. Ашықтық бейнелеу принципі- Банахтың кері оператор және тұйық график туралы теоремасы.
39. Үзіліссіз болмайтын тұйық оператордың мысалы.
40. Сызықтық оператордың үзіліссіз жалғастыру туралы теоремасы.
41. Сызықтық функционалдарды жалғастыру туралы Хан-Баннах теоремасы және оның салдары.
42. Сызықтық функционалдардың жалпы түрі.
43. Гильберт кеңістігіндегі сызықтық үзіліссіз функционалдың ұсынылуы туралы Рисс теоремасы.
44. Түйіндес кеңістік және оның толықтылығы.
45. Рефлексивті кеңістіктер.
46. Элементтердің әлді және әлсіз жинақтылығы.
47. Әлсіз шектің элементке жалғыздығы.
48. Элементтер тізбегінің элементке әлсіз жинақталу критерийі.
49. Ақырлы өлшемді кеңістікте элементтердің әлді және әлсіз жинақтарының тура келуі.
50. Түйіндес кеңістіктегі функционалдардың әлді және әлсіз жинақтылығы.
51. Функционалдар тізбегінің әлсіз жинақталу критерийі.
52. Түйіндес кеңістіктегі бірлік шардың әлсіз компакттылығы.
53. Оператордың меншікті векторы мен меншікті мәні. Мысалдар.
54. Сызықтық оператордың резольвенттік жиыны және спектрі.
55. Түйіндес, өзіне түйіндес (симметриялық) операторлар.
56. Толықтай үзіліссіз түйіндес оператор туралы Гильберт-Шмидт теоремасы.
57. Ядросының квадраты интегралданатын Фредгольм операторының толық үзіліссіздігі.
58. Шаудер теоремасы.
59. Негізгі және жалпыланған функциялар кеңістіктері.
60. Жалпыланған функциялардың қарапайым қолданылымдары.

### **Ұсынылатын әдебиеттер тізімі**

1. Блиев Н.К. Функционалдық анализ (қысқаша курс): Оқулық.-Алматы: Қазақ университеті, 2014, -166 б
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.-М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.- 572 с
3. Садовничий В.А. Теория операторов М. Дрофа, 2004.- 384 с
4. Треногин В.А. Функциональный анализ .– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007
5. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Учеб.пособие.- 2-е изд.,испр. и доп.- М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005-240 с
6. Наурызбаев Қ.Ж. Функционалдық анализ. - Алматы, Fortress, 2007
7. Антоневиц А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу/Под.ред. С.Г.Крейна. Изд.2-е, стереотипное - М.: Едиториал УРСС, 2004.-208 с

8. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. - М.: Издательство: Либроком, 2010

9. Иосида К. Функциональный анализ.- М.: ЛКИ, 2010

10. Канторович Л.В., Акилов Г.Пю Функциональный анализ.-М., Невский Диалект, БХВ - Петербург, 2004

## **1 Дифференциалдық теңдеулер**

### **1 Модуль Жай дифференциалды теңдеулер**

#### **1.1 Дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін есептер**

Дифференциалдық теңдеулерге алып келетін математикалық моделдеу әдісімен зерттейтін физика, механика және басқа облыстардың әртүрлі типтес есептері. Радиоактивтік ыдырау. Материалдық бөлшектердің системасының қозғалысы. Құмға судың сіңуі туралы есеп. Геометриялық есептер.

#### **1.2 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер**

Дифференциалдық теңдеулердің негізгі ұғымдары. Геометриялық түсініктемесі. Коши есебі (бастапқы есеп). Айнымалылары ажыратылатын теңдеулер. Біртекті теңдеулер. Сызықты және оған келтірілетін теңдеулер. Толық дифференциалды теңдеулер мен интегралдаушы көбейткіштер. Бастапқы есеп шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теорема.

#### **1.3 Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер. Жоғары ретті сызықты дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясы**

Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер. Бастапқы есеп шешімінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема. Жоғары ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Негізгі қасиеттер. Іргелік шешімдер жүйесі және оның бар болуы. Вронскиан, Лиувилль формуласы. Біртекті теңдеудің жалпы шешімінің құрылымы. Біртекті емес теңдеудің жалпы шешімінің құрылымы. Лагранждың тұрақтыларды вариациялау әдісі. Бастапқы есеп шешімін Коши функциясы көмегімен интегралдық түрде өрнектеу. Екінші ретті шекаралық есеп. Шешімдердің тебілісі туралы. Грин функциясы. Коэффициенттері тұрақты сызықтық теңдеулердің іргелі шешімдер жүйесін құру (сипаттаушы теңдеудің түбірлері әр-түрлі және еселі болған жағдайлар). Коэффициенттері тұрақты сызықтық теңдеулердің оң жағы (бос мүшесі) квазикөпмүшелік болған жағдай.

## **2 Модуль Дифференциалдық теңдеулер жүйелері**

### **2.1 Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы теориясы**

Негізгі қасиеттер мен анықтамалар. Бастапқы есеп шешімінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема. Іргелік шешімдер жүйесі. Іргелік матрица және оның бар болуы. Біртекті жүйенің жалпы шешімінің құрылымы. Вронскиан және Лиувилль формуласы Біртекті емес жүйенің жалпы шешімінің құрылымы. Коши матрицасы және оның өрнектері. Коши матрицаның іргелік матрицаның таңдалуынан тәуелсіздігі. Лагранждың тұрақтыларды вариациялау әдісі. Бастапқы есеп шешімін Коши матрицасы көмегімен интегралдық түрде өрнектеу. Тұрақты

матрицалы теңдеу үшін түбірлердің әртүрлі жағдайында іргелі шешімдер жүйесін құру. Еселі түбірлер бар жағдайда іргелі шешімдер жүйесінің түрі.

## **2.2 Қалыпты түрдегі бейсызықты дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясы. Симметриялық дифференциалдық теңдеулер жүйесі**

Қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесі. Бастапқы есеп шешімінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема. Шешімінің параметрге және бастапқы мәндерге тәуелділігі туралы теорема. Шешімінің параметрлер және бастапқы мәндер бойынша дифференциалдануы туралы теорема. Қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесінің интегралдары. Бірінші интегралдар, олардың бар болуы. Қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы интегралы. Симметриялық түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесі. Қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесімен байланысы. Симметриялық жүйенің жалпы шешімі және жалпы интегралы.

## **3 Модуль Орнықтылық теориясы. Дербес туындылы теңдеулер**

### **3.1 Автономдық дифференциалдық теңдеулер жүйесі. Орнықтылық теориясы.**

Автономдық дифференциалдық теңдеулер жүйесі. Шешімдерінің қасиеттері. Ерекше нүктелер-түйін, қайқы, фокус, центр маңайындағы екінші ретті сызықтық автономдық жүйенің фазалық траекторияларының орналасу тәртібі. Ляпунов бойынша орнықтылық және асимптотикалық орнықтылық. Коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті жүйенің орнықтылығы және асимптотикалық орнықтылықтарының белгілері. Бірінші жуықтау бойынша орнықтылық. Ляпунов теоремасы.

### **3.2 Бірінші ретті дербес туындылы біртекті және біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеулер**

Бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер. Бірінші ретті дербес туындылы сызықтық біртекті және біртекті емес теңдеулер, олардың жалпы шешімдері. Сипаттауыштар әдісі. Коши есебін қию. Екі айнымалыдан тәуелді болған жағдайдағы геометриялық түсініктемесі.

### **Емтихандық сұрақтар**

1. Дифференциалдық теңдеулерге алып келетін математикалық моделдеу әдісімен зерттейтін физика, механика және басқа облыстардың әртүрлі типтегі есептері.

2. Радиоактивтік ыдырау.
3. Материалдық бөлшектердің системасының қозғалысы.
4. Құмға судың сіңуі туралы есеп.
5. Геометриялық есептер.
6. Дифференциалдық теңдеулердің негізгі ұғымдары.
7. Геометриялық түсініктемесі.
8. Коши есебі (бастапқы есеп).
9. Айнымалылары ажыратылатын теңдеулер.

10. Біртекті теңдеулер.
11. Сызықты және оған келтірілетін теңдеулер.
12. Толық дифференциалды теңдеулер.
13. Интегралдаушы көбейткіштер.
14. Туындыға қатысты шешілмеген дифференциалдық теңдеулер.
15. Бастапқы есеп шешімінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема.
16. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер.
17. Жоғары ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер.
18. Жоғары ретті сызықты дифференциалдық теңдеулердің негізгі қасиеттері.
19. Іргелік шешімдер жүйесі және оның бар болуы.
20. Вронскиан, Лиувилль формуласы.
21. Біртекті теңдеудің жалпы шешімінің құрылымы.
22. Біртекті емес теңдеудің жалпы шешімінің құрылымы.
23. Лагранждың тұрақтыларды вариациялау әдісі.
24. Бастапқы есеп шешімін Коши функциясы көмегімен интегралдық түрде өрнектеу.
25. Екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер.
26. Шешімдердің тебілісі туралы.
27. Екінші ретті қисық сызықты есептер
28. Грин функциясы.
29. Коэффициенттері тұрақты сызықтық теңдеулердің іргелі шешімдер жүйесін құру (сипаттаушы теңдеудің түбірлері әр-түрлі және еселі болған жағдайлар).
30. Коэффициенттері тұрақты сызықтық теңдеулердің оң жағы (бос мүшесі) квазикөпмүшелік болған жағдай.
31. Іргелік матрица және оның бар болуы.
32. Біртекті жүйенің жалпы шешімінің құрылымы.
33. Коши матрицасы.
34. Коши матрицаның іргелік матрицаның таңдалуынан тәуелсіздігі.
35. Біртекті емес жүйенің жалпы шешімінің құрылымы.
36. Тұрақты матрицалы теңдеу үшін түбірлердің әртүрлі жағдайында іргелі шешімдер жүйесін құру.
37. Қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесі.
38. Бастапқы есеп шешімінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема.
39. Шешімінің параметрге және бастапқы мәндерге тәуелділігі туралы теорема.
40. Шешімінің параметрлер және бастапқы мәндер бойынша дифференциалдануы туралы теорема.
41. Қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесінің интегралдары.
42. Бірінші интегралдар және олардың бар болуы.
43. Қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы интегралы.
44. Симметриялық түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесі.
45. Қалыпты түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесімен байланысы.
46. Симметриялы жүйенің жалпы шешімі және жалпы интегралы.



47. Автономдық дифференциалдық теңдеулер жүйесі.
48. Автономдық дифференциалдық теңдеулер жүйесі шешімдерінің қасиеттері.
49. Ерекше нүктелер-түйін, қайқы, фокус, центр маңайындағы екінші ретті сызықтық автономдық жүйенің фазалық траекторияларының орналасу тәртібі.
50. Ляпунов бойынша орнықтылық және асимптотикалық орнықтылық.
51. Коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті жүйенің орнықтылығы және асимптотикалық орнықтылықтарының белгілері.
52. Бірінші жуықтау бойынша орнықтылық.
53. Ляпунов теоремасы.
54. Бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер.
55. Бірінші ретті дербес туындылы сызықтық біртекті теңдеулер, олардың жалпы шешімдері.
56. Бірінші ретті дербес туындылы сызықтық біртекті емес теңдеулер, олардың жалпы шешімдері.
57. Коши есебін қию.
58. Сипаттауыштар әдісі.
59. Екі айнымалыдан тәуелді болған жағдайдағы геометриялық түсініктемесі.
60. Еселі түбірлер бар жағдайда іргелі шешімдер жүйесінің түрі.

### **Ұсынылатын әдебиеттер тізімі**

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1974.-766 с.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1970.-331 с.
3. Сүлейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер. - Алматы: Наука, 1991, 1996.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1959.-448с.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1979.-126 с.
6. Картан А. Дифференциальные исчисления. Дифференциальные формы.
7. Анчиков А.М., Валиуллин Р.Л., Дайшев Р.А. Введение в математический анализ в вопросах и задачах. – Казань, 2006.