УДК 519.2:368.91

КРАТКОСРОЧНЫЕ И ДОЛГОСРОЧНЫЕ МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

Рыщанова Сания Мухамедияровна – старший преподаватель Костанайского государственного университета им. А. Байтурсынов

Умиртаева Динара Карловна – студентка 1 курса специальности 5В06010-«Математика»

В статье раскрыты особенности модели краткосрочно и долгосрочного страхования жизни. Рассмотрены примеры. Актуарная математика призвана дать рекомендации, которые были бы привлекательными как для клиентов, так и для страховых компаний. Человек определенного возраста заключает договор со страховой компанией на определенных условиях. Он покупает страховой полис за некоторую сумму денег, чтобы со временем ему или его наследникам после его смерти была выплачена большая сумма денег. Страховая компания в свою очередь на этой сделке тоже хочет получить определенную прибыль. Для принятия решения необходимо знать сведения о продолжительности жизни людей, степени прибыльности страховой компании, учитывать формы страхования, правовые, юридические и др. аспекты. Модели страхования жизни делятся на краткосрочные и долгосрочные. К первой группе относятся модели, в которых не учитывается изменение ценности денег во времени, обусловленное инфляцией и другими факторами. Обычно в качестве временного интервала выбирают 1 год. С математической точки зрения долгосрочное страхование характеризуется тем, что при расчетах принимается во внимание изменение ценности денег с течением времени. Поэтому теория долгосрочного страхования существенно опирается на теорию сложных процентов. Данная статья будет полезна и интересна работникам страховых компаний и тем, кто изучает актуарную математику.

Ключевые слова: актуарная математика, модели страхования, страховая сумма, вероятность смерти, функция распределения случайной величины.

ҚЫСҚА ЖӘНЕ ҰЗАҚ УАҚЫТТЫҚ САҚТАНДЫРУ МОДЕЛДЕРІ

Рыщанова Сания Мухамедияровна – А. Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университетінің аға оқутышысы

Умиртаева Динара Карловна - 5В06010-«Математика» мамандығының 1 курс студенті

Бұл мақалада ұзақ уақытқа және қысқа уақытқа өмірді сақтандырудың моделі және оның үлгілері қарастырылған. Актуарлық математика клиенттер мен сақтандыру компаниясына да тиімді болатын ұсыныстарды беруге бағытталған. Белгілі бір жастағы адам белгілі бір мерзімге сақтандыру компаниясымен белгілі бір шарт жасасады. Ол, уақыт өткен соң оған немесе оның мұрагерлеріне қазасынан кейін қомақты түрде ақша берілуі үшін, сақтандыру полисін сатып алады. Сақтандыру компаниясы да осы шартқа байланысты өз пайдасын алғысы келеді. Шешім қабылдау үшін адам өмірінің ұзақтығы жайлы мәліметтер, сақтандыру компаниясының табыстылық дәрежесін білу керек, сонымен қоса сақтандыру формаларын, құқықтық, заңдық аспектілерді де қарастыру қажет. Өмірді сақтандыру моделі қысқа және ұзақ уақыттыққа бөлінеді. Біріншісіне ақша құндылығының инфляция және т.б. факторларға байланысты өзгеруі ескерілмейтін үлгілері жатады. Әдетте уақыт интервалы ретінде 1 жыл алынады. Математикалық тұрғыдан қарағанда, ұзақ уақыттық сақтандыруда ақша құнының уақыт өтуіне байланысты өзгеруі назарға алынады. Сондықтан ұзақ уақыттық сақтандыру теориясы қиын пайыздар теориясына сүйенеді. Бұл мақала сақтандыру компаниясының жұмыскерлері мен актуарлық математиканы зерттейтіндер үшін пайдалы болады.

Кілт сөздер: актуарлық математика, сақтандыру моделдері, сақтандыру сомасы, өлім ықтималдығы, кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы.

SHORT-TERM AND LONG-TERM LIFE INSURANCE MODELS

RyshanovaSaniyaMuhamediyarovna - senior teacher of Kostanay State University. named after A. Baitursynov, Kostanay

UmirtaevaDinaraKarlovna - 1st year student majoring 5B06010- "Mathematics" "ofKostanay State University named after A. Baitursynov

The given article deals with the models of short-term and long-term life-insurance. Some examples. Actuarial Mathematics is designed to provide recommendations that would be attractive to both customers and insurance companies. A man of a certain age enters into a contract with the insurance company on certain conditions. He buys an insurance policy for a sum of money, so that in time he or his heirs after his *death, a large amount of money has been paid. The insurance company, in turn, on this deal too, wants to get some profit. To make a decision you need to know information about life expectancy, degree of profitability of insurance companies take into account the forms of insurance, legal, legal, etc. Aspects.life insurance models are divided into short and long term. The first group includes models that do not take into account changes in the value of money over time due to inflation and other factors. Usually a selected one year time period. From a mathematical point of view of long-term insurance is characterized by the fact that the calculation takes into account the changing value of money over time. Therefore, long-term insurance theory is essentially based on the theory of compound interest. This article will be useful and interesting to employees of insurance companies and those who study actuarial mathematics.*

Keywords: Actuarial Mathematics, security model, the insurance amount, the probability of death, the distribution function of the random variable

С переходом Казахстана к новым экономическим отношениям создано множество страховых компаний, множество банков, пенсионных фондов, огромное число коммерческих структур,которые остро нуждаются в актуариях. В связи с этим чрезвычайноактуальной стала организация актуарного образования. До недавнего времени актуарное образование и актуарная наука в Казахстане практически отсутствовали. В передовых же странах Америки и Европы с развитой рыночной экономикой подготовка специалистов по актуарной математике осуществляется во многих университетах, издаются журналы, учебная и научная литература. Модели страхования жизни делятся на две большие группы: краткосрочные и долгосрочные. К первой группе относятся модели, в которых не учитывается изменение ценности денег во времени, обусловленное инфляцией и другими факторами. Обычно в качестве временного интервала выбирают 1 год. Если же расчеты осуществляютсяс учетом возможной инфляции, то модели страхования называют долгосрочными.
Человек покупает за *p* тенге страховой полис на следующих условиях. Если он умрет в течении года, то его наследникам будет выплачена сумма *b*. Естественно, что значение *b* должно быть существеннобольше *p* . Если же человек проживет год, то вся сумма денег*p* остается в страховой компании. Нахождение “правильного” соотношения между *p* и *b* является одной из задач актуарной математики.

Пример1. Рассмотрим портфель из четырех одинаковых договоров страхования жизни. Страховая сумма зависит от причины смерти; в случае смерти от «естественных» причин страховая сумма равна 250 000 тенге, а если смерть наступила от несчастного случая, то выплачивается удвоенная страховая сумма. Для каждого из застрахованных вероятность смерти от несчастного случая равна 0,1, вероятность смерти от естественных причин равна 0,1. Нужно найти распределение суммарных выплат.
Решение
Примем 250 000 тенге в качестве единицы измерения денежных сумм.
Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 - индивидуальные выплаты по договорам. Случайные величины X_1, X_2, X_3, X_4 независимы в совокупности и имеют одно и то же распределение, задаваемое таблицей

n	0	1	2
p(n)	0,8	0,1	0,1

Напомним, что $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.
Для подсчета распределения суммы $X_1 + X_2$ образуем матрицу из 3-х строк и 3-х столбцов с элементами $p_1(i)p_2(j)$:

$$\begin{matrix} 0{,}64 & 0{,}08 & 0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}08 & 0{,}01 & 0{,}01 \end{matrix}$$

Для формирования этой матрицы удобно написать слева столбец из вероятностей $p_1(i)$, а сверху – строку из вероятностей $p_2(j)$, а затем перемножить их поэлементно.

Суммируя по линии i + j = n, параллельной второй диагонали, мы получим

$$p_1(n)\,p_2(0) + p_1(n-1)\,p_2(1) + \ldots + p_1(0)\,p_2(n)$$

т. е. в точности $P(X_1 + X_2 = n)$. Поэтому для *q(n)* = $P(X_1 + X_2 = n)$ имеем таблицу (поскольку $X_1, X_2 \le 2$, их сумма не превосходит 4):

n	0	1	2	3	4
q(n)	0,64	0,16	0,17	0,02	0,01

Для подсчета *r(n)* = $P(X_1 + X_2 = n) = P((X_1 + X_2) + X_3 = n)$ образуем матрицу из трех строк и пяти столбцов с элементами $p_3(i) \cdot q(j)$:

$$\begin{matrix} 0{,}512 & 0{,}128 & 0{,}1360{,}016 & 0{,}008 \\ 0{,}064 & 0{,}016 & 0{,}0170{,}002 & 0{,}001 \\ 0{,}064 & 0{,}016 & 0{,}0170{,}002 & 0{,}001 \end{matrix}$$

Поэтому для распределения случайной величины $X_1 + X_2 + X_3$ имеем таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6
r(n)	0,512	0,192	0,216	0,049	0,027	0,003	0,001

Наконец, для подсчета распределения *p(n)* суммарных выплат *S* = X_1, X_2, X_3, X_4 образуем матрицу из 3 строк и 7 столбцов с элементами p_4*(i)r(j)*:

$$\begin{matrix} 0{,}4096 & 0{,}1536 & 0{,}17280{,}0392 & 0{,}0216 & 0{,}00240.0008 \\ 0{,}0512 & 00192 & 0{,}02160{,}0049 & 0{,}0027 & 0{,}00030{,}0001 \\ 0{,}0512 & 0{,}0192 & 0{,}02160{,}0049 & 0{,}0027 & 0{,}00030{,}0001 \end{matrix}$$

Отсюда мы немедленно можем подсчитать распределение *p(n)* (оно приведено во втором столбце табл.1)и, следовательно, функцию распределения случайной величины *S* = X_1+ X_2+ X_3+ X_4 (она приведена в третьем столбце табл.1).*Таблица 1.*

n	*p(n)*	P(S ≤ n)
0	0,4096	0,4096
1	0,2048	0,6144
2	0,2432	0,8576
3	0,0800	0,9376
4	00481	0,9857
5	0,0100	0,9957
6	0,0038	0,9995
7	0,0004	0,9999
8	0,0001	1,000

Подсчет распределения суммы независимых случайных величин с помощью сверток – крайне кропотливое и утомительное занятие, если делать это вручную. Однако при использовании компьютеров никаких проблем не возникает. Для аналитических же расчетов удобнее использовать производящие функции.

Напомним, что производящей функцией $\varphi(z)$ неотрицательной случайной величины η с распределением *p(n)* = P$(\eta = n)$ называется сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n)$ (нетрудно понять, что эквивалентным образом мы могли бы определить производящую функцию как$\mathrm{E}z^{\eta}$). Следующие свойства производящих функций используются чаще всего:

Если производящие функции $\varphi_1(z)$и $\varphi_2(z)$ двух случайных величин η_1 и η_2 совпадают, то совпадают и распределения этих величин. Иными словами, распределение однозначно восстанавливается по своей производящей функции.

$$\varphi'(1) = \mathrm{E}\eta, \quad \mathrm{Var}\eta = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2.$$

Если случайные величины η_1 и η_2 независимы, то производящая функция их суммы, $\varphi(z)$, равна произведению производящих функций слагаемых: $\varphi(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z)$.Используя производящие функции, можно предложить следующий 2-й способ решения.

Каждое слагаемое имеет одну и ту же производящую функцию

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z) = \varphi_3(z) = \varphi_4(z) = 0{,}8 \cdot z^0 + 0{,}1 \cdot z + 0{,}1 \cdot z^2 = 0{,}1(8 + z + z^2).$$

Соответственно их сумма имеет производящую функцию

$$\mathrm{E}z^s = \varphi_1(z)\varphi_2(z)\varphi_3(z)\varphi_4(z) = 0{,}1^4(8+z+z^2)^4 = 10^{-4}\cdot(64+z^2+z^4+16z+16z^2+2z^3)^2 =$$

$$10^{-4}(64+16z+17z^2 2z^3+z^4)^2 = 10^{-4}\cdot(4096+256z^2+289z^4+4z^6+z^8+2048z$$

$$+2176z^2+256z^3+128z^4+544z^3+64z^4+32z^5+68z^5+34z^6+4z^7) =$$

$$= 10^{-4}\cdot(4096+2048z+2432z^2+800z^3+481z^4+100z^5+38z^6+4z^7+z^8).$$

Отбирая коэффициенты при степенях *z*, мы немедленно получим такую же таблицу для вероятностей*p(n)* = P*(S = n)*, какую мы получили выше с помощью сверток.

Этот пример позволяет сделать вывод о величине премии. Допустим, что мы подсчитали нетто-премию в соответствии с принципом эквивалентности обязательств страховщика и страхователя как $p^{(n)}$ = EX = 0•0,8 + 1•0,1 + 2•0,1 = 0,3 и приняли ее в качестве платы за страховую защиту. Тогда суммарная премия по рассматриваемому портфелю будет 1,2 и, значит, вероятность того, что для выплат не хватит этих средств («вероятность разорения») будет равна P(S> 1,2) = 0,3856, т.е. недопустимо велика. Из табл. 3.3 видно, что для того, чтобы вероятность разорения не превосходила 10%, мы должны иметь активы в 3 единицы, т.е. стоимость одного полиса должна быть 0,75. Конечно, это слишком большая плата (напомним, что мы взяли в качестве единицы измерения денежных сумм 250 000 тенге.) — это связано со слишком малым объемом портфеля. Тем не менее, этот пример показывает, что реальная плата за страховку должна превосходить нетто-премию.

Пример 2. Страховая компания заключила N= 10 000 договоров пожизненного страхования со страховкой суммой b =$10 000 каждый. Предположим, что остаточное время жизни каждого из страхованных характеризуется интенсивностью смертности μ ≡ 0,04, которая не меняется с течением времени, а интенсивность процентов б = 6%.

Подсчитайте величины премии, которая гарантировала бы 95% вероятность выполнения компанией своих обязательств без привлечения дополнительных средств.

Решение

Примем страховую сумму в качестве единицы измерения денежных сумм.

Подсчитаем вначале нетто-премию:

$$p_0 = \overline{A_x} = \int_0^\infty v^t f_x(t)dt,$$

где $f_x(t)$-плотность остаточного времени жизни. Поскольку интенсивность смертности известна, мы можем найти функцию выживания:

$s_x(t)=e^{-\mu t}$,

что, в свою очередь, дает следует формулу для $f_x(t)$:

$f_x(t)=\mu e^{-\mu t}$.

Теперь мы можем подсчитать нетто-премию:

$$\overline{A_x} = \int_0^\infty \mu e^{-(\mu+\delta)t}dt = \frac{\mu}{\mu+\delta} = \frac{0{,}04}{0{,}04+0{,}06} = 0{,}4.$$

Второй момент современной величины выплат по индивидуальному договору может быть получен из этой формулы заменой δ на 2δ:

$$\mathrm{E}\,\overline{Z_x}^2 = {}^2\overline{A_x} = \frac{\mu}{\mu+2\delta} = \frac{0{,}04}{0{,}04+0{,}12} = \frac{0{,}04}{0{,}16} = 0{,}25.$$

Следовательно, $\mathrm{Var}\,\overline{Z_x} = \mathrm{E}\,\overline{Z_x}^2 - (E\overline{Z}x)^2$ = 0,25 – 0,16 = 0,09.

Теперь можно подсчитать относительную страховую надбавку:

$$\theta = \chi_\alpha \frac{\sqrt{Var\overline{Z_x}}}{\overline{A_x}\sqrt{N}} = 1{,}645 \cdot \frac{\sqrt{0{,}09}}{0{,}4\sqrt{10000}} = 1{,}23375\%.$$

Соответственно,премия есть $p = \overline{A_x} \cdot (1+\theta)$ = 40,4935%.

Напомним, что величина страховой суммы b используется нами в качестве единицы измерения денежных сумм, так что в абсолютных цифрах p = $ 4049,35.

Пример 3. Время жизни описывается моделью де Муавра с предельным возрастном w = 120 лет, а эффективная годовая процентная ставка i= 15%. Подсчитайте нетто-премии для человека в возрасте 40 лет, если закючается договор:

(а) пожизненного страхования;

(б) 5 летнего страхования жизни

(в) 5 –летнего смешанного страхования жизни;

(г) пожизненного страхования, отсроченного на 2 года;

(д) пожизненного страхования со страховой суммой,которая непрерывно увеличивается.

Решение

Остаточное время жизни застрахованного имеет равномерное распределение на промежутке (0,w-x)≡ (0,80):

$f_{40}(t) = \frac{1}{80}$, 0 <t< 80.

Интенсивность процентов δ= ln (1 + i) ≈ 13,9762 % , коэффициент дисконтирования v= 1/(1+i) ≈ 86.9565%. После этих предварительных замечаний приступим к расчетам:

а) $\overline{A}_{40} = \; = -\frac{1}{80\delta}v^t \Big|_0^{80} = \frac{1-v^{80}}{80\delta}$ = 8,944%;

б) $\overline{A}^{1}_{40\bar{5}} = \int_0^5 v^t \frac{1}{80}dt = -\frac{1}{80\delta}v^t \Big|_0^5 = \frac{1-v^5}{80\delta}$ = 4,497%;

в) $\overline{A}^{1}_{40\bar{5}} = \int_0^5 v^t \frac{1}{80}dt + v^5\cdot\int_5^{80}\frac{1}{80}dt = \overline{A}^{1}_{40\bar{5}} + \frac{75}{80}v^5$ = 51,107%;

г) ${}_{2|}\overline{A}_{40} = \int_2^{80} v^t \frac{1}{80}dt = -\frac{1}{80\delta}v^t \Big|_2^{80} = \frac{v^2-v^{80}}{80\delta}$ = 6,763%;

д) $\overline{(IA)}_{40} = \int_0^{80} tv^t \tfrac{1}{80}dt = -\int_0^{80}\frac{t}{80\delta}dv^t = -\frac{t}{80\delta}vt\Big|_0^{80} + \int_0^{80} v^t\frac{1}{80\delta}dt = -\frac{e^{-80\delta}}{\delta} - \frac{1}{80\delta^2}v^t\Big|_0^{80} = -\frac{v^{80}}{\delta} + \frac{1-v^{80}}{80\delta^2} = \frac{1-(1+80\delta)v^{80}}{80\delta^2}$ = 63,982%.

Литература:

1.Фалин Г.И., Фалин А.И. Введение в актуарную математику. - М.: Изд-во МГУ, 1994.- 256 с.
2.Фалин Г.И., Фалин А.И.Актуарная математика в задачах.- М.:Физматлит, 2003-192 3.Кошкин. Основы актуарной математики.-Томский государственный университет, 2002.-112
4. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизнии пенсионных схем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1996. 221 с.
5. Баскаков В.Н., Карташов Г.Д. Методические указания к решению задач по актуарной математике. (Модели дожития). М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 42 с.53

References:

1.Falin G.I.,Falin A.I., Vvedenie v aktuarnuyumatematiku. - M .: Izd-vo MGU, 1994.- 256 s.
2.Falin G.I.,Falin A.I., Aktuarnayamatematikavzadachah.- M.: FIZMATLIT, 2003-192
3.Koshkin. Osnovyaktuarnoymatematiki.,Tomskiigosudarstvennyiuniversitet, 2002.-112
4.FalinG.I.Matematicheskiyeosnovyteoriistrahovaniyazhizni I pensionnyhsistem. M .: Izd-voMosk. un-ta, 1996. 221 s.
5. Baskakov V.N.,Kartashov G.D.,Metodicheskiyeukazaniya k resheniyuzadachpoaktuarnoymathematike. (Modelidozhitiya). M .: Izd-voMGTUim. N. E.Baumana, 1997, 42 s 53

Сведения об авторах

Рыщанова Сания Мухамедияровна – старший преподаватель Костанайского государственного университета им.А. Байтурсынова, г. Костанай, ул. Карбышева 9, кв.66. тел. 87772583140; эл/почта Ryshanova57@mail.ru

Умиртаева Динара Карловна – студентка 1 курса специальности 5В06010-«Математика», г.Костанай, 9 мкр, 12 дом, кв.33. тел.87759646190; эл/почта dinara.karlovna@mail.ru

Рыщанова Сания Мухамедияровна – А. Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университетінің аға оқутышысы, Қостанай қаласы, Карбышев көшесі, 9 үй, 66 пәтер, тел. 87772583140, Ryshanova57@mail.ru

Умиртаева Динара Карловна - 5В06010 - «Математика» мамандығының 1 курс студенті, Қостанай қаласы, 9 шағын аудан, 12 үй, 33 пәтер, тел.87759646190,dinara.karlovna@mail.ru

Ryshanova Saniya Muhamediyarovna - senior teacher of Kostanay State University. named after A. Baitursynov, Kostanay, Karbysheva Street,9/66. Mobile 87772583140; e / mail Ryshanova57@mail.ru

Umirtaeva Dinara Karlovna - 1st year student majoring 5B06010 - "Mathematics" "ofKostanay State University named after A. Baitursynov. Kostanay, 9 microdistrict 12/33. Mobile 87759646190dinara.karlovna@mail.ru