УДК 372.851

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВЕ СИММЕТРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Романов Петр Юрьевич – доктор педагогических наук, профессор, Магнитогорский государственный технический университет им Г.И. Носова

Романова Татьяна Евгеньевна – кандидат педагогических наук, доцент, Магнитогорский государственный технический университет им Г.И. Носова

Великих Альфия Салиховна – кандидат физико-математических наук, доцент, Магнитогорский государственный технический университет им Г.И. Носова

Статья посвящена методике обучения решению наиболее трудных задач школьного курса - задач с параметрами, которые стали неотъемлемой частью материалов единого государственного экзамена по математике в России. Цель данной статьи – помочь учителям и учащимся овладеть умениями решения уравнений, неравенств и их систем с параметрами.

В статье раскрывается роль симметрии аналитических выражений в задачах, решение которых требует поиска необходимых и достаточных условий. Предлагается система задач, которая позволяеторганизовать процесс обучения учащихся решению задач на основе теории поэтапного формирования умственных действий.При составлении данной системы задачиспользовались требования достаточности количества задач для организации каждого из этапов теории, постепенное нарастание сложности задач и создание условий для активного участия обучающихся в моделировании ориентировочной основы формируемого действия.При этом симметрия аналитических выражений является основой для реализации метода поиска необходимых условий.

В процессе обучения моделируется ориентировочная основа действий, позволяющая решать определенный тип задач с параметрами. На конкретных примерах формируются умения по нахождению контрольных значений параметра и проверки достаточности найденных условий.

Ключевые слова: задачи с параметром, симметрия, необходимые и достаточные условия, аналитические выражения.

АНАЛИТИКАЛЫҚ ӨРНЕКТЕР НЕГІЗІНДЕ ПАРАМЕТРМЕН БЕРІЛГЕН ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУ СИММЕТРИЯСЫ

Романов Петр Юрьевич – педагогика ғылымдарының докторы, профессор, Г. И. Носов атындағы Магнитогорск мемлекеттік техникалық университеті

Романова Татьяна Евгеньевна – педагогика ғылымдарының кандидаты, доцент, Г. И. Носов атындағы Магнитогорск мемлекеттік техникалық университеті

Великих Альфия Салиховна – физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, Г. И. Носов атындағы Магнитогорск мемлекеттік техникалық университеті

Мақала Ресейдегі математикадан жалпы мемелекеттік емтиханның ажырамас бөлігі болып табылатын мектеп курсындағы ең қиын пераметрлерімен шешілетін оқыту әдістемесіне арналған. Осы мақаланың мақсаты- мұғалімдерге және оқушыларға параметрлік жүйеде теңдеулердің шешімін табу жолдарын үйренулерін қалыптастыру. Мақаласында симметрия аналитикалық өрнектерді тапсырмалардың рөлі, олардың шешімін іздеуді талап етеді қажетті және жеткілікті шарттары ашылады. Жүйесі ұсынылады міндеттерді шешуге мүмкіндік беретін оқу үдерісін ұйымдастыру, оқушылардың тапсырмаларды шешу теориясы негізінде кезең-кезеңмен қалыптастыру ақыл-ой іс-қимыл. Жасау кезінде осы жүйенің міндеттер қолданылды талаптар жеткілікті санын міндеттерді ұйымдастыру үшін әр кезеңнен теориясы, бірте-бірте арта түсуі міндеттердің күрделілігін және белсенді қатысуы үшін жағдай жасауға, білім алушылардың бағдарлы модельдеу негіздері қалыптастыратын әрекеттер. Бұл кезде симметрия аналитикалық өрнектерді үшін негізі болып табылады, іске асыру әдісін іздеу қажетті жағдайлар болып табылады.

Оқыту процесінде параметрлерімен қатар бағдарлы негізі іс-қимыл, шешуге мүмкіндік беретін белгілі бір түрі міндеттерді үлгіленеді. Нақты мысалдар негізінде қалыптасады іскерліктер іздеу бойынша бақылау параметр мәндерінің және жеткіліктілігін тексеру болып табылған.

Негізгі сөздер: параметлер мақсаты, симметрия, қажетті және жеткілікті шарттар, аналитикалық өрнектер.

SOLVINGPROBLEMSWITHPARAMETERSBASEDONTHESYMMETRY ANALYTICALEXPRESSIONS

Romanov PyotrYurievich - Doctor of pedagogical Sciences, Professor, Magnitogorsk State Technical University named after G.I. Nosov
Romanova TatianaEvgenievna - Candidate of pedagogical Sciences , senior lecturer, Magnitogorsk State Technical University named after G.I. Nosov
VelikikhAlfiyaSalikhovna - Candidate of physical and mathematical Sciences, senior lecturer, Magnitogorsk State Technical University named after G.I. Nosov

The article is devoted to teaching the most challenging tasks of the school course - problems with parameters that have become an integral part of materials of the unified state examination in mathematics in Russia. The purpose of this article is to help teachers and students acquire the skills of solving equations, inequalities and their systems with parameters.

The article reveals the role of symmetry of the analytical expressions in problems whose solution requires finding of necessary and sufficient conditions. The system of tasks allows to organize the process of teaching students problem solving based on the theory of stage formation of mental actions. In developing the system tasks were used adequacy requirements number of tasks for the organization of each of the stages theory, the gradual increase of complexity of tasks and creation of conditions for active participation of students in modelling an indicative basis for forming action. In this case, the symmetry of analytical expressions is the basis for the implementation of the method of finding the necessary conditions.

In the process of learning is modeled orientation basis of action, allowing to solve certain type of tasks with parameters. Specific examples of formed skills of finding control parameter values and check the adequacy of the found terms.

Keywords: problems with parameter symmetry, the necessary and sufficient conditions, analytical expressions.

Задачи с параметрами составляют неотъемлемую часть материалов единого государственного экзамена по математике. Их решение вызывает немалые трудности у учащихся, которые могут быть объяснены отсутствиемв ныне действующих учебниках четких методических указаний по решению задач данного класса.

Не решают данную проблему работы В.С. Высоцкого, П.И. Горнштейн, В.Б. Полонского, М.С. Якир, А.И. Козко, В.С. Панферова, И.Н. Сергеева, В.Г.Чирского, С.А. Шестакова[1,2,3,11]. Во всех данных пособиях предлагаются решения задач с параметрами, тогда как педагогов интересует сам процесс организации учащихся по усвоению способов их решения. Как сделать так, чтобы материал обязательно усвоили все обучаемые? Ответить на эти вопросы позволяет теория поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина.

Классно-урочная форма обучения, на наш, взгляд, позволяет организовать следующие этапы данной теории: ориентировка школьников в материале и способах работы с ним; осуществление пошагового контроля за усвоением каждого действия школьниками в ходе решения задачи; переход от пошагового контроля учащихся к их самоконтролю.

Приведем примеры системы заданий по теме «Симметрия аналитических выражений при решении задач с параметрами»[8,9]. При их составлении мы руководствовались тем, что:

— число задач, входящих в систему, должно быть достаточным для организации каждого из этапов теории;

— сложность задач должна нарастать постепенно;

— последовательность задач должна способствовать активному участию школьников в моделировании ориентировочной основы формируемого действия.

Отметим, что симметрия аналитических выражений является основой для реализации метода поиска необходимых условий.

Для того чтобы научить учащихся данному приему, необходимо выделить его ключевые моменты и систематизировать их, то есть построить ориентировочную основу действий. Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 1. При каких значениях параметра *a* уравнение $2x^2 - a \cdot tg\cos x + a^2 = 0$ имеет единственное решение?

Решение. Уравнение симметрично относительно переменной x, поэтому, если xявляется решением уравнения, то и $-x$тоже является ее решением. Значит, уравнение имеет единственное решение, если $x = 0$.

Теперь найдем, при каких значениях параметра a уравнение имеет решение $x=0$. Для этого подставим число 0 вместо неизвестной x. Получим уравнение $a^2-a\cdot tg1=0$, из которого найдем $a=0$, либо $a=tg1.$ Итак, уравнение $2x^2-a\cdot tg\cos x+a^2=0$ **может** иметь единственное решение только в двух случаях: $a=0$ или $a=tg1.$ Отметим, что найденные значения параметра - это всего лишь «претенденты» на ответы. Они **не исключаютналичие и других решенийуравнения**. Важно лишь то, что для других значений параметра a, отличных от $a=0$ и $a=tg1$, данное уравнение не может иметь единственного решения.

Осуществим теперь проверку «претендентов» на ответы: $a=0$ и $a=tg1.$

Вопрос о количестве решений уравнения $2x^2-a\cdot tg\cos x+a^2=0$ для найденных значений параметра исследуем при помощи непосредственной их подстановки в уравнение.

При $a=0$ исходное уравнение принимает вид $-a\cdot tg\cos 0+a^2=0$. Его решением является единственное значение $x=0$.

При $a=tg1$ получим уравнение вида $2x^2-tg1\cdot tg\cos x+tg^2 1=0$. Это уравнение не решается обычными способами, поэтому применим к нему специальный прием.

Преобразуем уравнение $tg^2 1+2x^2=tg1\cdot tg\cos x$ и заменим его равносильной системой

$$\begin{cases} y=tg^2 1+2x^2, \\ y=tg1\cdot tg\cos x. \end{cases}$$

Замечаем, что $y=tg^2 1+2x^2\geq tg^2 1.$ Отметим также, что тангенс определен на промежутке $-1;1$ и возрастает на нем, поэтому $tg1\geq tg\cos x.$ Умножив обе части данного неравенства на положительное число $tg1$, получим, что $tg^2 1\geq tg1\cdot tg\cos x=y.$ Таким образом, $y\geq tg^2 1$, с другой стороны, $y\leq tg^2 1.$

Следовательно, $y=tg^2 1$, поэтому $\begin{cases} tg^2 1=tg^2 1+2x^2, \\ tg^2 1=tg1\cdot tg\cos x; \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$

Таким образом, для того, чтобы исходная система имела единственное решение, достаточно, чтобы $a=0$ или $a=tg1.$

Ответ: $a=0$ или $a=tg1.$

Таким образом, **последовательность действий на поиск необходимых условий такова:**

1. Установить четность выражений относительно переменных.
2. Определить вид решения в зависимости от требуемого количества решений (найти необходимое условие существования решений).
3. Решить исходную задачу по найденным значениям переменных.
4. Исследовать количество решений системы по найденным значениям параметра.

Задача 2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y, \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x \end{cases}$$ **имеет единственное решение?**

Решение. Система симметрична относительно перестановки переменных x и y, а потому, для того, чтобы система имела единственное решение, необходимо, чтобы $x=y$. Это значит, что пара $x_0;x_0$ является решением системы.

Подставим решение $x_0;x_0$ в исходную систему, получим квадратное уравнение ${x_0}^2-2(a+1)x_0+a^2-3=0$. Учитывая условие единственности его корней $D=0$, получим возможные значения параметра a из уравнения $a+1\;^2-a^2+3=0$, $a=-2.$ Проверкой убеждаемся, что при найденном значении параметра исходная система имеет единственное решение $-1;-1$.

Ответ: $a=-2.$

Задача 3.При каких значениях параметра a **системы** $\begin{cases} x+4y=4a^2+a, \\ x+ay=a+4 \end{cases}$ **и** $\begin{cases} x^2-3y^4-8x+15=0, \\ x^2+y^2+\ a^2-a-10\ \ x+5a+20=0 \end{cases}$ **равносильны?**

Решение. Системы считаются равносильными, если множества их решений совпадают. Следовательно, необходимо решить данные системы при каждом значении параметра a.

Решаем первую систему: $\begin{cases} x=4a^2+a-4y, \\ x=a+4-ay; \end{cases} \Leftrightarrow 4a^2+a-4y=a+4-ay \Leftrightarrow$

$4-a\ \ y=4a^2-4,$ и приходим к выводу, что при $a=4$ она не имеет решений. При $a\neq 4$ ее решением является единственная пара $\left(\dfrac{-4a^3-a^2+4a+16}{4-a};\dfrac{4a^2-4}{4-a}\right)$.

Найдем количество решений второй системы при $a=4$. Подставляя это значение параметра, получим систему вида $\begin{cases} x^2-3y^4-8x+15=0, \\ x^2+y^2+2x+40=0. \end{cases}$

Очевидно, что ее решение требует логических рассуждений. Поэтому рассмотрим второе уравнение системы как сумму y^2 и квадратного трехчлена $x^2+2x+40$. Его дискриминант отрицателен, значит, $x^2+2x+40>0$ при всех значениях переменной x. Следовательно, левая часть уравнения ни при каких значениях переменных x и y не равняется нулю. Поэтому второе уравнение, а, значит, и вся система не имеют решений.

Получили, что при $a=4$ исходные системы равносильны.

Пусть теперь $a\neq 4$. Для равносильности систем вторая система тоже должна иметь единственное решение. Попробуем найти его.

Заметим, что вторая система симметрична относительно переменной y. Следовательно, если пара $x_0;y_0$ - решение системы, то пара $x_0;-y_0$ - тоже ее решение.

Подставляя $y=0$ во вторую систему, получим $\begin{cases} x^2-8x+15=0, \\ x^2+\ a^2-a-10\ \ x+5a+20+y^2=0. \end{cases}$

Откуда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ x^2+\ a^2-a-10\ \ x+5a+20=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=5, \\ x^2+\ a^2-a-10\ \ x+5a+20=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ 3a^2+2a-1=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=5, \\ 5a^2-5=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ \left[\begin{array}{l} a=-1, \\ a=\dfrac{1}{3}; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x=5, \\ \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=-1. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

Получили, что, возможно, при $a=\pm 1$, либо при $a=\dfrac{1}{3}$ вторая система имеет единственное решение.

Установим, так ли это.

При $a=1$ исходная система принимает вид $\begin{cases} x^2-3y^4-8x+15=0, \\ x^2+y^2-10x+25=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3y^4-8x+15=0, \\ y^2+\ x-5\ ^2=0. \end{cases}$

Очевидно, что пара $5;0$ - единственное решение второго уравнения системы. При этих значениях справедливо и первое уравнение системы. Следовательно, пара $5;0$ - единственное решение второй системы.

Подставляя $a=1$ в решение $\left(\dfrac{-4a^3-a^2+4a+16}{4-a};\dfrac{4a^2-4}{4-a}\right)$ первой системы, убеждаемся, что оно также является парой $(5;0)$. Поэтому при $a=1$ системы равносильны.

При $a=\dfrac{1}{3}$ решением первой системы является пара $\left(\dfrac{461}{99};-\dfrac{320}{297}\right)$, которая не является решением второй системы. В чем убеждаемся непосредственной подстановкой.

При $a=-1$ вторая система принимает вид $\begin{cases} x^2-3y^4-8x+15=0, \\ x^2+y^2-8x+15=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15=3y^4, \\ x^2-8x+15=-y^2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2-8x+15=-y^2, \\ 3y^4=-y^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15=-y^2, \\ y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15=0, \\ y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=6, \\ y=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, при $a=-1$ первая система имеет единственное решение, а вторая – два решения.

Ответ: $a=1$ или $a=4$.

Задача 4.Найти все значения параметра *a*, при которых система

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x-5=a-2y+y^2, \\ x^2+(2-a-a^2)y^2=0, \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Эта система содержит, так называемую, скрытую симметрию, которая становится очевидной после проведенных преобразований. Выполним их: $2+\sqrt{3}=\dfrac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x+\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x-5=a-2y+y^2, \\ x^2+(2-a-a^2)y^2=0, \\ 0\le y\le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^{-x}-5=a-2y+y^2, \\ x^2+(2-a-a^2)y^2=0, \\ 0\le y\le 2. \end{cases}$$

Замечаем, что обе пары $(x_0;y_0)$ и $(-x_0;y_0)$ являются решением системы. Значит, для того, чтобы решение было единственным, необходимо $x_0=-x_0$, откуда $x_0=0$. При $x_0=0$ преобразованная система принимает вид:

$$\begin{cases} y^2-2y+a=-3, \\ (2-a-a^2)y^2=0, \\ 0\le y\le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2y+a+3=0, \\ \left[\begin{array}{l} a^2+a-2=0, \\ y=0, \end{array}\right. \\ 0\le y\le 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y^2-2y+a+3=0, \\ \left[\begin{array}{l} a=-2, \\ a=1, \\ y=0, \end{array}\right. \\ 0\le y\le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2-2y+a+3=0, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y^2-2y+a+3=0, \\ a^2+a-2=0, \end{cases} \end{array}\right. \\ 0\le y\le 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \\ a=-3, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=-2, \end{array}\right. \\ y^2-2y+a+3=0, \end{cases} \end{array}\right. \\ 0\le y\le 2. \end{array}\right.$$

Значит, допустимыми значениями параметра являются $a=-3$, $a=-2$, $a=1$. Проверим, какие из этих значений удовлетворяют условию задачи.

Пусть $a=-3$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} \left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}=y^2-2y+2, \\ x^2-4y^2=0, \\ 0\le y\le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}=y^2-2y+2, \\ \left[\begin{array}{l} x-2y=0, \\ x+2y=0, \end{array}\right. \\ 0\le y\le 2. \end{cases}$$

Легко заметить, что левая часть системы есть сумма взаимно обратных положительных величин, поэтому $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}\ge 2,$ значит, $y^2-2y+2\ge 2 \Leftrightarrow y\left(y-2\right)\ge 0 \Leftrightarrow y\in\left(-\infty;0\right]\cup\left[2;\infty\right)$. Учитывая последнее неравенство системы, приходим к выводу, что $y=0$ либо $y=2$. Тогда последняя система будет равносильна следующей совокупности систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \\ \left[\begin{array}{l} x-2y=0, \\ x+2y=0, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y=2, \\ \left[\begin{array}{l} x-2y=0, \\ x+2y=0. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

Решая ее, приходим к выводу, что она имеет единственное решение $\left(0;0\right)$. Следовательно, $a=-3$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a=-2$, тогда исходная система принимает вид $\begin{cases} \left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}=y^2-2y+3, \\ x^2=0, \\ 0\le y\le 2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2=y^2-2y+3, \\ x=0, \\ 0\le y\le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2y+1=0, \\ x=0, \\ 0\le y\le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=0, \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$ и имеет единственное решение $\left(0;1\right)$.

Таким образом, $a=-2$ также удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a=1$, тогда система принимает вид $\begin{cases} \left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}=y^2-2y+6, \\ x^2=0, \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$ и решений не имеет.

Ответ: $a=-3$ либо $a=-2$.

Задача 5.Определить, при каких значениях параметра a **система уравнений** $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$ **имеет только два решения?**

Решение. Легко заметить, что оба уравнения системы не меняются при заменах x на y, x на $-x$ и y на $-y$ Поэтому, решениями системы будут пары $(x_0;y_0)$, $(x_0;-y_0)$, $(-x_0;y_0)$, $(-x_0;-y_0)$, $(y_0;x_0)$, $(-y_0;x_0)$, $(-y_0;-x_0)$, $(y_0;-x_0)$. Решений системы должно быть только два, поэтому необходимым условием нахождения допустимых значений параметра будет являться совпадение некоторых из этих пар, что возможно при $x=0$, $y=0$, $x=y$ или $x=-y$.

Если $x=0$ или $y=0$, то $a=6$.

Если $x=y$, то система принимает вид $\begin{cases} 2x^2=2(1+a), \\ 4x^2=14; \end{cases} \Leftrightarrow 4a-10=0 \Leftrightarrow a=2,5.$

Если $x=-y$, то в этом случае исходная система несовместна.

Таким образом, на ответ претендуют два значения параметра $a=6$ и $a=2,5.$

При $a=6$ система имеет четыре решения. При $a=2,5$-два решения $\left(\sqrt{\frac{7}{2}};\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}};-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

Ответ: $a=2,5.$

Задача 6.Определить, при каких значениях параметра a **система** $\begin{cases} x^4-(a-1)\sqrt{a+3}y+a^4+2a^3-9a^2-2a+8=0, \\ y=\sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$ **имеет ровно три различных решения?**

Решение. Несложно заметить, чторешениями системы являются пары $(x_0;y_0)$ и $(-x_0;y_0)$ симметричные относительно оси Oy. По условию решений должно быть три, значит необходимо потребовать, чтобы одно из решений принадлежало оси Oy, то есть имело вид $(0;y_0)$. Полагая $x=0$, находим допустимые значения параметра a. В этом случае система принимает вид

$$\begin{cases} a^4+2a^3-9a^2-2a+8=0, \\ y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a+1)(a-2)(a+4)=0, \\ y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=-1, \\ a=2, \\ a=-4; \end{array}\right. \\ y=0. \end{cases}$$

По условию $a\ge-3$, поэтому $a=-4$ - посторонее решение. Значит, проверке подлежат значения параметра $a=1$, $a=-1$ и $a=2$.

При $a=1$ исходная система принимает вид $\begin{cases} x^4=0, \\ y=2x^2 \end{cases}$ и имеет единственное решение $(0;0)$.

При $a=-1$ получим систему $\begin{cases} x^4+4x^2=0, \\ y=\sqrt{2}x^2, \end{cases}$ которая также имеет единственное решение $(0;0)$

При $a=2$ имеем $\begin{cases} x^4-\sqrt{5}x^2=0, \\ y=\sqrt{5}x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(x^2-\sqrt{5}\right)=0, \\ y=\sqrt{5}x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\pm\sqrt[4]{5}, \end{array}\right. \\ y=\sqrt{5}x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt[4]{5}, \\ y=\sqrt[4]{125}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt[4]{5}, \\ y=\sqrt[4]{125}. \end{cases} \end{array}\right.$

Таким образом, только при $a=2$ система имеет три решения.

Ответ: $a=2$.

Задача 7. Определить, при каких значениях параметра a **система уравнений** $\begin{cases} 3\sqrt{x|x|}+|y|-3\left(|x|+3|y|-9\right)=0, \\ \left(x-a\right)^2+y^2=25 \end{cases}$ **имеет три различных решения?**

Решение. Очевидна симметрия обоих уравнений относительно переменной y. Поэтому $(x_0;y_0)$ и $(x_0;-y_0)$ ее решения. Кроме того, еще одно решение системы должно иметь вид $(x_0;0)$ - необходимое условие существования нечетного количества решений.

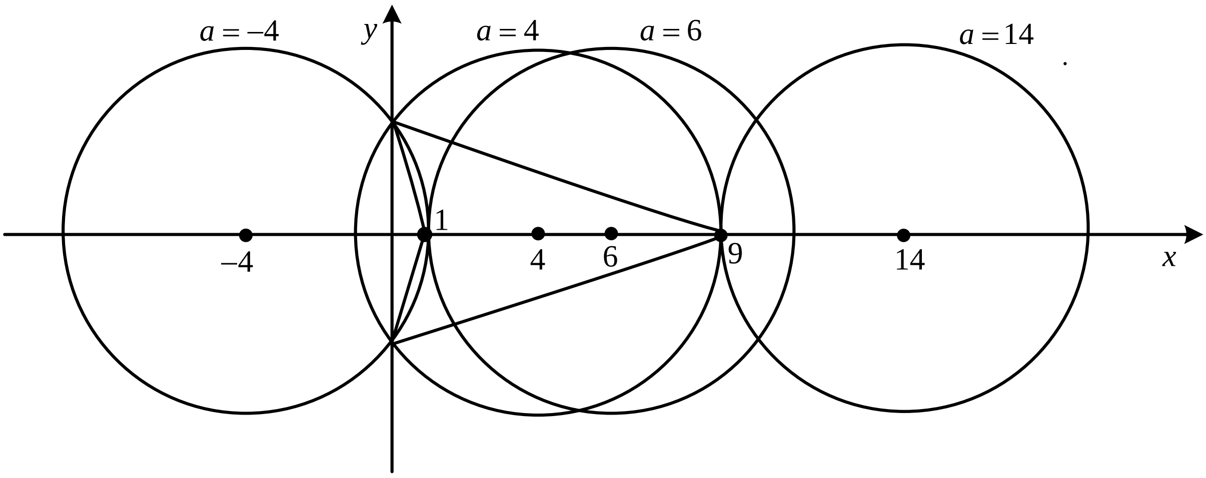
Составим систему для $y=0$ и решим ее, учитывая, что $x\geq 0$: $\begin{cases} 3\sqrt{x|x|}-3\left(|x|-9\right)=0, \\ \left(x-a\right)^2=25; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3\sqrt{x|x|}-3\left(|x|-9\right)=0, \\ \left(x-a\right)^2=25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x|x|}=1, \\ |x|=9; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-a=5, \\ x-a=-5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=9; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a=\pm4, \\ a=6, \\ a=14. \end{array}\right. \end{cases}$$

Проверим каждое из найденных значений параметра a. Для этого воспользуемся графическим методом решения исходной системы на множестве $x\geq 0$:

$$\begin{cases} 3x+|y|-3\left(x+3|y|-9\right)=0, \\ \left(x-a\right)^2+y^2=25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |y|=3-3x, \\ |y|=3-\frac{1}{3}x; \end{array}\right. \\ \left(x-a\right)^2+y^2=25. \end{cases}$$

Два первых уравнения системы задают прямые, последнее – окружность с центром $(a;0)$, где $a=-4$, $a=4$, $a=6$, $a=14$ (рис. 1).



ис. 1.

Очевидно, что три решения система имеет при $a=-4$, $a=4$ и $a=6$.

Ответ: $a=-4$, $a=4$, $a=6$.

Приведенная система задач свидетельствует,что в данных задачах нахождение контрольных значений параметра не самый сложный этап ее решения. Наиболее трудоемким является проверка достаточности, то есть доказательство или опровержение того, что найденное контрольное значение параметра удовлетворяет условию задачи.

Заметим, что использованное в решениях понятие симметрии выражений, тесно связано с таким понятием как инвариантность (неизменность). Во всех рассмотренных задачах имела место инвариантность преобразований.

Литература:

1. Высоцкий В.С. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ.- М.: Научный мир, 2011.- 316 с.
2. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами.- М.: Илекса, 2007.- 328 с.
3. Козко А.И., Панферов В.С., Сергеев И.Н., Чирский В.Г. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С5 / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко.- М.: МЦНМО, 2011.- 144 с.
4. Романов П.Ю. Моделирование процесса формирования исследовательских умений обучающихся в системе непрерывного педагогического образования // Вестник Оренбургского государственного университета. – Оренбург: ОГУ, 2003. - № 3. - С. 35-39.
5. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Решение задач с параметрами // Математика. Первое сентября.- М., 2001. - № 12. - С. 13-15.
6. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Роль графической интерпретации результатов решения задач с параметрами в организации исследовательской деятельности учащихся / Современные проблемы обучения математике в школе: сб. статей / Под редакцией Е.И. Жилиной - Магнитогорск, 2000. - С. 84-90.
7. Романова Т.Е. Исследование систем линейных уравнений с двумя неизвестными и параметром / Педагогические аспекты математического образования: сборник науч. тр. / Под ред. П.Ю. Романова.- Магнитогорск, 2011. - С. 112-117.
8. Романова Т.Е. Симметрия в задачах с параметрами / Педагогические аспекты математического образования: сборник науч. тр. / Под редакцией П. Ю. Романова. - Магнитогорск, 2011. - С. 104-112.
9. Романова Т.Е., Великих А.С. Использование симметрии аналитических выражений в задачах с параметрами / Физико-математические науки и образование; материалы Всероссийской научно-практической конференции.- Магнитогорск 2012. - С. 3-14.
10. Романова Т.Е. Решение уравнений и неравенств первой степени. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля: Учебно-методическое пособие.- Магнитогорск, 2004.- 63 с.
11. Шестаков С.А. ЕГЭ 2014. Задача С5. Задача с параметром. / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. М.: МЦНМО, 2014.- 249 с.

References:

1. Vysockij V.S. zadachi s parametrami pri podgotovke k egeh.- m.: nauchnyj mir, 2011.- 316 s.
2. Gornshtejn P.I., POLONSKIJ V.B., YAKIR M.S. zadachi s parametrami.- m.: ileksa, 2007.- 328 s.
3. Kozko A.I., Panferov V.S., Sergeev I.N., CHirskij V.G. Egeh 2011. matematika. zadacha s5 / pod red. a.l. semenova i i.v. yashchenko.- m.: mcnmo, 2011.- 144 s.
4. Romanov P.YU. modelirovanie processa formirovaniya issledovatel'skih umenij obuchayushchihsya v sisteme nepreryvnogo pedagogicheskogo obrazovaniya // vestnik orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta. – orenburg: ogu, 2003. - № 3. - s. 35-39.
5. Romanov P.YU., Romanova T.E. reshenie zadach s parametrami // matematika. pervoe sentyabrya.- m., 2001. - № 12. - s. 13-15.
6. Romanov P.YU., Romanova T.E. rol' graficheskoj interpretacii rezul'tatov resheniya zadach s parametrami v organizacii issledovatel'skoj deyatel'nosti uchashchihsya / sovremennye problemy obucheniya matematike v shkole: sb. statej / pod redakciej e.i. zhilinoj - magnitogorsk, 2000. - s. 84-90.
7. Romanova T.E. issledovanie sistem linejnyh uravnenij s dvumya neizvestnymi i parametrom / pedagogicheskie aspekty matematicheskogo obrazovaniya: sbornik nauch. tr. / pod red. p.yu. romanova.- magnitogorsk, 2011. - s. 112-117.
8. Romanova T.E. simmetriya v zadachah s parametrami / pedagogicheskie aspekty matematicheskogo obrazovaniya: sbornik nauch. tr. / pod redakciej p. yu. romanova. - magnitogorsk, 2011. - s. 104-112.
9. Romanova T.E., Velikih A.S. ispol'zovanie simmetrii analiticheskih vyrazhenij v zadachah s parametrami / fiziko-matematicheskie nauki i obrazovanie; materialy vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii.- magnitogorsk 2012. - s. 3-14.
10. Romanova T.E. reshenie uravnenij i neravenstv pervoj stepeni. uravneniya i neravenstva, soderzhashchie peremennuyu pod znakom modulya: uchebno-metodicheskoe posobie.- magnitogorsk, 2004.- 63 s.
11. SHestakov S.A. egeh 2014. zadacha s5. zadacha s parametrom. / pod red. a.l. semenova i i.v. yashchenko. m.: mcnmo, 2014.- 249 s.

Сведения об авторах

Романов Петр Юрьевич – доктор педагогических наук, профессор кафедры Высшей математики I, Магнитогорский государственный технический университет им Г.И. Носова, г. Магнитогорск, пр.Ленина, 114, тел.: 89127995242; e-mail:Romanov-magu@mail.ru

Романова Татьяна Евгеньевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры Высшей математики I, Магнитогорский государственный технический университет им Г.И. Носова. г. Магнитогорск, пр.Ленина, 114, тел.: 89128071690; e-mail:Romanova.te@mail.ru

Великих АльфияСалиховна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Высшей математики I, Магнитогорский государственный технический университет им Г.И. Носова, г. Магнитогорск, пр.Ленина, 114, тел.: 89120846443; e-mail:velikikhas@mail.ru

Романов Петр Юрьевич – педагогика ғылымдарының докторы, жоғарғы математика I кафедрасының профессоры, Г. И. Носов атындағы Магнитогорск мемлекеттік техникалық университеті, Магнитогорск қ., Ленин даңғ., 114, тел.: 89127995242; e-mail: Romanov-magu@mail.ru

Романова Татьяна Евгеньевна – педагогика ғылымдарының кандидаты, жоғарғы математика I кафедрасының доценті, Г. И. Носов атындағы Магнитогорск мемлекеттік техникалық университеті, Магнитогорск қ., Ленин даңғ., 114, тел.: 89128071690; e-mail: Romanova.te@mail.ru

Великих Альфия Салиховна – физика-математика ғылымдарының кандидаты, жоғарғы математика I кафедрасының доценті, Г. И. Носов атындағы Магнитогорск мемлекеттік техникалық университеті, Магнитогорск қ., Ленин даңғ., 114, тел.: 89120846443; e-mail: velikikhas@mail.ru

Romanov Pyotr Yurievich - Doctor of pedagogical Sciences, Professor, Department of Higher Mathematics I, Magnitogorsk State Technical University named after G.I. Nosov, Magnitogorsk, Lenina, 114, tel.: 89127995242; e-mail: Romanov-magu@mail.ru

Romanova Tatiana Evgenievna - Candidate of pedagogical Sciences, senior lecturer, Department of Higher Mathematics I, Magnitogorsk State Technical University named after G.I. Nosov, Magnitogorsk, Lenina, 114, tel.: 89128071690; e-mail: Romanova.te@mail.ru

Velikikh Alfiya Salikhovna - Candidate of physical and mathematical Sciences, senior lecturer, Department of Higher Mathematics I, Magnitogorsk State Technical University named after G.I. Nosov, Magnitogorsk, Lenina, 114, tel.: 89120846443; e-mail: velikikhas@mail.ru