УДК 519.62:624.131

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ПОЧВЫ

Байманкулов А.Т. – доктор физико-математических наук, заведующий кафедры информационных систем, Костанайский государственный университет имени А.Байтурсынова

Жуаспаев Т.А. – старший преподаватель кафедры информационных систем, Костанайский государственный университет имени А.Байтурсынова

Определение корректных входных данных для решения обратных коэффициентных задач в большинстве случаев носили теоретический характер или трудно реализовывались на практике. Поэтому разработка новых методов решения обратной задачи нелинейных дифференциальных уравнений всегда остается непростой проблемой.

В настоящей работе, изучается задача распространения влаги в системе «воздух - ненасыщенный грунт - грунтовые воды в предположении, что почвенная влага движется под действием объемных сил, поверхностные и граничные эффекты здесь не играют роли.

Предлагается метод, с помощью, которой определяется коэффициент диффузии грунта, когда задается влажность и температура грунта на поверхности земли (в течение определенного момента времени). Вначале строятся прямая и сопряженная задачи, затем с помощью априорных оценок доказывается ограниченность искомой величины. Предлагается минимизирующий функционал и вычисляется градиент этого функционала. На основе доказанных утверждений в виде лемм выводится монотонность минимизирующего функционала

Ключевые слова: коэффициентная задача, априорные оценки, минимизирующий функционал, монотонность, метод, ограниченность решения.

ТОПЫРАҚТЫҢ ДИФФУЗИЯ КОЭФФИЦИЕНТІН СӘЙКЕСТЕНДІРУ ЕСЕБІНДЕ ФУНКЦИОНАЛДЫ АЗАЙТУ

Байманкулов А.Т. – физика математика ғылымдарының докторы, ақпараттық жүйелер кафедрасының меңгерушісі, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті

Жуаспаев Т.А. – ақпараттық жүйелер кафедрасының аға оқытушысы, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті

Кері коэффициенттік есептерді шешу барысында әдепті бастапқы деректерді анықтау мәселеріне көбінесе теориялық сипаттама беріліп, тәжірибеде оларды іске асыру қиын болған. Сондықтан,сызықты емес дифференциалды теңдеулердің кері есептерін шешу үшін жаңа әдістерді анықтау – қарапайым мәселелерге жатпайды.Қарастырылып отырған жұмыста, топырақ ылғалы көлемді күштер әсерімен қозғалысы бар болжамда «ауа – қанықпаған топырақ – жер астындағы сулар» жүйесінде ылғалды тарату есебі зерттелінеді. Шектік және сыртқы әсерлер рөлі аз.

Жер үстіндегі топырақтың дымқылдығы мен температурасы берілген кезде (белгілі бір уақыт аралығында), топырақ диффузиясының коэффициентін анықтайтын әдіс ұсынылады. Алдымен тура және қосалқы есептер қойылып, кейін априорлық бағалар көмегімен ізделіп отырған шаманың шектеулілігі дәлелденеді. Минимумға жеткізетін функционал ұсынылып, сол функционалдың градиенті есептелінеді. Бекітілген пікір негізінде лемма түрінде минимумға жеткізетін функционалдың біркелкілігі анықталады.

Негізгі сөздер: коэффициенттік есеп, априорлық бағалар, минимумға жеткізетін функционал, біркелкілік, әдіс, шешімнің шектеулілігі.

MINIMIZING THE FUNCTIONAL IDENTIFICATION PROBLEM OF THE DIFFUSION COEFFICIENT SOIL

A.T. Baimankulov– doctor of physical and mathematical sciences, head of the department of information systems, Kostanay State University named after A.Baitursynov

T.A. Zhuaspayev – senior lecturer of the department of information systems, Kostanay State University named after A.Baitursynov

Defining correct input data for solving inverse coefficient problems in most cases were of a theoretical nature or difficult to implemented in practice. Therefore, the development of new methods for solving the inverse problem of nonlinear differential equations is always a difficult problem.

In this paper, we study the spread of moisture in the system of "air - unsaturated soil - groundwater under the assumption that soil moisture is moving under the influence of bulk, surface and boundary effects play no role here.

A method by which the soil is determined by the diffusion coefficient when the set humidity and temperature of the ground on the ground surface (for a certain time). Initially built right and the associated problem, then use a priori estimates proved the limitations of the unknown quantity. It is proposed to minimizing the functional and the calculated gradient of this functional. On the basis of these assertions as lemmas output minimizes the functional monotony.

Keywords: coefficient problem, a priori estimates of minimizing the functional, the monotony, the method, the limitations of solutions.

1 Постановка задачи

Движение воды в капиллярно-пористых средах, к каковым относятся почвы, может происходить под воздействием самых разнообразных движущих сил, представляющих градиент давления, потенциала гравитационного поля, потенциала электрического поля, температуры, концентрации растворенных веществ [1-4]. Нерпин С.В. [5], исследуя механизмы движения воды в дисперсных средах, предполагает, что почвенная влага движется под действием объемных сил, поверхностные и граничные эффекты здесь не играют роли. Поэтому, принимая это обстоятельство во внимание и решая относительно простую задачу, предполагающую:

1) отсутствие электрического поля;

2) постоянство концентрации рассмотренных веществ.

Движение влаги и температуры в области $Q=(0,H)\times(0,T)$ можно описать уравнением [6]:

$$\gamma_0 c\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\left.\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=H}+\bar{\alpha}\left(\theta-T_b(t)\right)\Big|_{z=H}=0,\quad \theta\big|_{z=0}=T_1,\quad \theta\big|_{t=0}=\theta_0(z), \tag{2}$$

где $\bar{\alpha}=\alpha+\alpha_0 D_n(H)$.

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K(z)+D\frac{\partial W}{\partial z}+D\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \tag{3}$$

$$\sigma\big|_{z=H}=A(t),\quad \sigma\big|_{z=0}=0,\quad W\big|_{t=0}=W_0(z), \tag{4}$$

здесь $\sigma(z,t)=K(z)+D(z)\frac{\partial W}{\partial z}+D(z)\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}$.

Используя изменение температуры грунта и влаги на поверхности земли $T_g(t)$, $W_g(t)$, требуется определить коэффициент диффузии $D(z)$. Методы решения обратных задач изучены в работах [6-9], а в работах [10-14] изучены различные обратные задачи переноса тепла и влаги.

Задается начальное значение коэффициента диффузии $D_n(z)$, соответствующее решение системы (1)-(4) обозначим через $\left(\overset{n}{\theta}(z,t),\ \overset{n}{W}(z,t)\right)$. Следующее приближение коэффициента диффузии обозначим через $D_{n+1}(z)$, а соответствующее решение системы (1)-(4) будет $\left(\overset{n+1}{\theta}(z,t),\ \overset{n+1}{W}(z,t)\right)$. Тогда для разности

$$\delta\theta(z,t)=\overset{n+1}{\theta}(z,t)-\overset{n}{\theta}(z,t),\ \ \delta W=\overset{n+1}{W}-W,\ \ \delta D=D_{n+1}(z)-D_n(z)$$

получается задача:

$$\gamma_0 C\frac{\partial\delta\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right), \quad (5)$$

$$\lambda\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\bar{\alpha}\delta\theta\bigg|_{z=H}+\alpha_0\delta\theta\left(\overset{n+1}{\theta}-T_{в}\right)=0,\ \delta\theta\bigg|_{z=0}=0,\ \delta\theta\bigg|_{t=0}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial\delta W}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D_n\frac{\partial\delta W}{\partial z}+D_n\mu\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+\delta D\frac{\partial\overset{n+1}{W}}{\partial z}+\mu\delta D\frac{\partial\overset{n+1}{\theta}}{\partial z}\right), \quad (7)$$

$$\delta\sigma\bigg|_{z=H}=0,\ \delta\sigma\bigg|_{z=0}=0,\ \delta W\bigg|_{t=0}, \quad (8)$$

где $\delta\sigma=D_n\frac{\partial\delta W}{\partial z}+D_n\mu\frac{\partial\delta W}{\partial z}+\delta D\frac{\partial\overset{n+1}{W}}{\partial z}+\mu\delta D\frac{\partial\overset{n+1}{\theta}}{\partial z}.$

Из системы (5)-(8) выводится система сопряженных задач [15]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0, \quad (9)$$

$$D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=H}=2A_0\left(W(H,t)-W_g(t)\right),\ \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0,\ u(z,T)=0, \quad (10)$$

$$\gamma_0 C\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0, \quad (11)$$

$$\left(\alpha\psi+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}+\mu D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\bigg|_{z=H}=2\left(\theta(H,t)-T_g(t)\right),\quad \psi(0,t)=0,\ \psi(z,T)=0. \quad (12)$$

Следующее значение коэффициента влагопроводности определяется по формуле

$$\delta D=\beta_n(z)\int_0^T\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)dt+\beta_n(z)\alpha_0\int_0^T\left(\theta-T_{в}\right)\psi\bigg|_{z=H}d\tau, \quad (13)$$

А также, имеет место равенство

$$J(D_{n+1})-J(D_n)=-\int_0^H\beta_n(z)\left(\int_0^T\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)dt\right)^2dz-\int_0^T\int_0^H\delta D\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial\delta W}{\partial z}+\mu\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right)dzdt+$$

$$+\int_0^T\left(\delta\theta\right)^2\bigg|_{z=H}dt+A_0\int_0^T\left(\delta W\right)^2\bigg|_{z=H}dt-\int_0^T\alpha_0\delta D\delta\theta\psi\bigg|_{z=H}dt. \quad (14)$$

где $J\left(D\right)=\int_0^T\left(\theta(H,t)-T_g(t)\right)^2dt+A_0\int_0^T\left(W(H,t)-W_g(t)\right)^2dt.$

2. Минимизация функционала

В работе [15] доказаны следующее утверждения:

Лемма 1. Если $\theta_0(z) \in W_2^2(0,H)$, $T_b(t) \in W_2^1(0,T)$, то для решения задачи (1)-(2) имеет место оценка:

$$\max_t \int_0^H \gamma_0 c \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right)^2 dz + \int_0^t d\tau \int_0^H \lambda \left(\frac{\partial t^2 \theta}{\partial z \partial t}\right)^2 dz + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2_{z=H} d\tau \le C_1 (1 + D_n(z)).$$

Лемма 2. Если $W_0(z)$, $\theta_0(z) \in W_2^2(0,H)$, $T_t(t) \in W_2^1(0,T)$, то для решения задачи (3)-(4) имеют место оценки:

$$\max_t \int_0^H \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 dz + \int_0^t \int_0^H D_n(z) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial t}\right)^2 dz dt \le C_2 \left(1 + D_{\max} + \frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}\right),$$

$$\int_0^t \left(\frac{\partial W(H,\tau)}{\partial t}\right) d\tau \le C_3 \left(1 + D_{\max} + \frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}\right) \frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}.$$

Лемма 3. Если $W_0(z)$, $\theta_0(z) \in W_2^2(0,H)$, $T_b(t)$, $W_g(t) \in W_2^1(0,T)$, то для решения задачи (9)-(10) имеет место оценка:

$$\max_t \left(\int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dz + \int_0^H u^2 dz\right) + \int_0^T \int_0^H D_n(z) \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz d\tau +$$

$$+ \int_t^T \int_0^H D_n(z) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}\right)^2 dz d\tau \le C_4 \left(1 + D_{\max} + \frac{1}{D_{\min}}\right) \frac{1}{D_{\min}}.$$

Лемма 4. Если $W_0(z)$, $\theta_0(z) \in L_2(0,H)$, $T_b(t)$, $W_g(t)$, $T_g(t) \in L_2(0,T)$, то для решения задачи (11)-(12) имеет место оценка:

$$\max_t \int_0^H \psi^2 dz + \int_t^H \int_0^H \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 dz + \int_t^T \alpha \psi^2(H,\tau) d\tau \le C_5 f(D_n(z)).$$

Теорема 1. Если $\theta_0(z)$, $W_0(z) \in W_2^2(0,H)$, z, $W_g(t) \in W_2^1(0,T)$, $T_g(t) \in L_2(0,T)$, то подбирая достаточно малую функцию $\beta_n(z)$ из равенства (9) всегда можно получить ограниченность коэффициента влагопроводности, т.е.

$0 < C_6 \le D_{n+1}(z) \le C_7 < \infty$, $n = 1, 2, \dots$

Теорема 2. Пусть $\beta_n(z) \ne 0$, то подбирая достаточно малую функцию $\beta_n(z)$ можно получить монотонность функционала $J(D)$, т.е. $J(D_{n+1}) - J(D_n) < 0$.

Доказательство. Введем обозначения

$$B_n(z) = \int_0^T \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) dt + \alpha_0 \int_0^T (\theta - T_g(\tau)) \psi \Big|_{z=H} d\tau.$$

1) Умножим (5) на $\delta\theta$ и интегрируем по области $Q_t = (0,H) \times (0,t)$. Применяя неравенство Коши, имеем

$$\max_t \int_0^H (\delta\theta)^2 dz + \int_0^t \int_0^H \left(\frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right)^2 dz d\tau + \frac{\alpha}{2} \int_0^t (\delta\theta)^2_{z=H} d\tau \le C_8 \left|\delta D(H)\right|^2.$$

2) Умножим (7) на δW и интегрируем по области $Q_t = (0,H) \times (0,t)$. Из леммы 1-4 и на основе теоремы 1 следуют ограниченность величин $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ и $\frac{\partial W}{\partial z}$. Тогда

$$\frac{1}{2} \int_0^H (\delta W)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^H D_n(z) \left(\frac{\partial \delta W}{\partial z}\right)^2 dz d\tau \le C_9 \int_0^H (\delta D)^2 dz.$$

Доказано.

Лемма 5. Если имеет место теоремы 1, то для решения задачи (5)-(6), (7)-(8) имеют место оценки:

$$\max_t \int_0^H (\delta\theta)^2 dz + \int_0^t\int_0^H \left(\frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right)^2 dz d\tau + \frac{\alpha}{2}\int_0^t (\delta\theta)^2_{z=H} d\tau \le C_{25}\left|\delta D(H)\right|^2,$$

$$\max_t \int_0^H (\delta W)^2 dz + \int_0^t\int_0^H \left(\frac{\partial \delta W}{\partial z}\right)^2 dz d\tau + \int_0^t (\delta W)^2_{z=H} d\tau \le C_{11}\int_0^H \left|\delta D(z)\right|^2 dz.$$

Обращаемся к равенству (13). Оценим величину $\delta D(z)$ по модулю и получим неравенство $\left|\delta D(z)\right| \le C_{29}\beta_n(z)$. Оценивая (14), перепишем ее в следующем виде:

$$J(D_{n+1}) - J(D_n) + \int_0^H \beta_n(z)\left(\mathrm{B}_n^2(z) - C_{31}\beta_n(z)\right)dz \le 0$$

Функция $\beta_n(z)$ подбирается так, чтобы имело место неравенство $\mathrm{B}_n^2(z) - C_{31}\beta_n(z) > 0$. Поэтому $J(D_{n+1}) - J(D_n) < 0$.

Литература:

1. Buckingham E. Studies on movement of soil moisture. U. S. Dep. Agric. Bur. of Soils. (Washington), 1907, Bull. 38.
2. Richards L.A. Capillary conduction of liquids through medians. – Physics, 1931, vol. 1, p.318-333.
3. Childs E.D. The transport of water through heavy clay soils. I, III. – j.Ag. Sci., 1936, vol. 26.
4. П.Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
5. Нерпин С.В., Юзефович Г.И. О расчете нестационарного движения влаги в почве// Докл. ВАСХНИЛ, №6, 1966.
6. Мартынов Г.А. Тепло - и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогии (мерзлотоведения). – М.: 1959, С. 153-192.
7. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
8. Кабанихин С.И., Бектемисов М.А., Нурсеитова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. – Алматы-Новосибирск, 2006. – 426 с.
9. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
10. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений - Алматы: Каз. пед. ин-т им. Абая, 2007. – 330 с.
11. Рысбайулы Б. Идентификация коэффициента теплопроводности распространения тепла в неоднородной среде // Вестник КБТУ, 2008, №1, С. 62-65.
12. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Махамбетова Г.И. Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК, 2008, №1, С. 11-13.
13. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмаилов А.О. Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний // Вестник НАН РК, 2008, №2, С. 7-9.
14. Байманкулов А.Т. Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде // Вестник НАН РК, 2008, №3, С. 45-47.
15. Rysbaiuly B., Baymankulov A.T. Variational-difference method for determining the diffusion coefficient of soil water // International Journal of Academic Research, № 5, 2010.

References:

1. Buckingham E. Studies on movement of soil moisture. U. S. Dep. Agric. Bur. of Soils. (Washington), 1907, Bull. 38.
2. Richards L.A. Capillary conduction of liquids through medians. – Physics, 1931, vol. 1, p.318-333.
3. Childs E.D. The transport of water through heavy clay soils. I, III. – j.Ag. Sci., 1936, vol. 26.
4. P.JA. Polubarinova-Kochina. Teorija dvizhenija gruntovyh vod. – M.: Nauka, 1977. – 664 s.
5. Nerpin S.V., JUzefovich G.I. O raschete nestacionarnogo dvizhenija vlagi v pochve// Dokl. VASHNIL, №6, 1966.
6. Martynov G.A. Teplo - i vlagoperenos v promerzajushhih i ottaivajushhih gruntah. Osnovy geokrilogii (merzlotovedenija). – M.: 1959, S. 153-192.

7. Alifanov O.M. Obratnye zadachi teploobmena. – M.: Mashinostroenie, 1988. – 280 s.
8. Kabanihin S.I., Bektemisov M.A., Nurseitova A.T. Iteracionnye metody reshenija obratnyh i nekorrektnyh zadach s dannymi na chasti granicy. – Almaty-Novosibirsk, 2006. – 426 s.
9. Kabanihin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi. – Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009. – 457 с.
10. Kabanihin S.I., Iskakov K.T. Obratnye i nekorrektnye zadachi dlja giperbolicheskih uravnenij - Almaty: Kaz. ped. in-t im. Abaja, 2007. – 330 s.
11. Rysbajuly B. Identifikacija kojefficienta teploprovodnosti rasprostranenija tepla v neodnorodnoj srede // Vestnik KBTU, 2008, №1, S. 62-65.
12. Rysbajuly B., Bajmankulov A.T., Mahambetova G.I. Obratnaja zadacha konduktivnogo rasprostranenija tepla v odnorodnoj srede // Vestnik NAN RK, 2008, №1, S. 11-13.
13. Rysbajuly B., Bajmankulov A.T., Ismailov A.O. Raznostnyj metod opredelenie kojefficienta teploprovodnosti grunta v processe promerzanij // Vestnik NAN RK, 2008, №2, S. 7-9.
14. Bajmankulov A.T. Opredelenie kojefficienta diffuzii pochvennoj vody v odnorodnoj srede // Vestnik NAN RK, 2008, №3, S. 45-47.
15. Rysbaiuly B., Baymankulov A.T. Variational-difference method for determining the diffusion coefficient of soil water // International Journal of Academic Research, № 5, 2010.

Сведения об авторах:

Байманкулов А.Т. – доктор физико-математических наук, заведующий кафедры информационных систем, Костанайский государственный университет имени А.Байтурсынова, г. Костанай, ул.Байтурсынова 47, тел.: 8-775-968-10-38, e-mail: bat_56@mail.ru.

Жуаспаев Т.А. – старший преподаватель кафедры информационных систем, Костанайский государственный университет имени А.Байтурсынова, г. Костанай, ул.Байтурсынова 47, тел.: 8-705-464-00-04, e-mail: g_talgat_a@mail.ru.

Байманкулов А.Т. – физика математика ғылымдарының докторы, ақпараттық жүйелер кафедрасының меңгерушісі, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті, Қостанай қ-сы, Байтұрсынов к-сі, 47, тел. 8-775-968-10-38, e-mail: bat_56@mail.ru.

Жуаспаев Т.А. – ақпараттық жүйелер кафедрасының аға оқытушысы, А.Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті, Қостанай қ-сы, Байтұрсынов к-сі, 47, тел. 8-705-464-00-04, e-mail: g_talgat_a@mail.ru.

A.T. Baimankulov – doctor of physical and mathematical sciences, head of the department of information systems, Kostanay State University named after A.Baitursynov, Kostanay, Baitursynov st. 47, ph.: 8-775-968-10-38, e-mail: bat_56@mail.ru.

T.A. Zhuaspayev – senior lecturer of the department of information systems, Kostanay State University named after A.Baitursynov, Baitursynov st. 47, ph.: 8-705-464-00-04, e-mail: g_talgat_a@mail.ru.