Қазақстан Республикасының білім және ғылым министрлігі

А.Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті

Математика және физика кафедрасы

Д.К.Оразалинова, Ж.Ш.Бермагамбетова

ТЕОРЕТИКАЛЫҚ ФИЗИКА НЕГІЗДЕРІ 1

Оқу-әдістемелік құрал

Қостанай, 2020

УДК 53
ББК 22.31
О 65
Автор:

Оразалинова Дамеля Каирбековна, жаратылыстану ғылым магистрі, математика және физика кафедрасының аға оқытушысы ;

Бермагамбетова Жанат Шектебаевна, жаратылыстану ғылым магистрі, математика және физика кафедрасының оқытушысы.

Рецензенттер:

Джаманбалин Қадырғали Қоныспайұлы - физика-математика ғылыми докторы, З.Алдамжар атындағы ҚӘТУ профессоры;

Исинтаев Тақабай Исинтайұлы – техникалық ғылыми кандидаты, А.Байтұрсынов атындағы ҚМУ Машина жасау кафедрасының доценті;

Ысмағұл Роза Сапабекқызы - физика-математика ғылыми кандидаты, А.Байтұрсынов атындағы ҚМУ математика және физика кафедрасының доценті

Оразалинова Д.К.

О 65 Теоретикалық физика негіздері 1: Оқу-әдістемелік құрал.- Қостанай: А.Байтұрсынов атындағы ҚМУ, 2020. -103 б.

ISBN

Оқу-әдістемелік құралда жоғары математиканың негізгі анықтамалары, теоремалары және формулалары енгізілген. Жалпы физика бойынша есеп шығару мысалдары көрсетілген. Әр бөлімнен кейін есептердің шығарылу жолдары және әрбір тақырып бойынша өз бетімен шығаратын есептер берілген.

Физикалық мамандық студенттеріне арналған.

УДК 53
ББК 22.31
О 65

А.Байтұрсынов атындағы ҚМУ Оқу-әдістемелік отырысында қаралған және ұсынылған, 28.02.2020 ж. № 1 хаттама

ISBN 978-601-7597-85-6

Мазмұны

Кіріспе

Физика пәнін оқып- білудің негізі – физиканың нақтылы есептерін шығару. Есептерді, әсіресе қиын есептерді шығару процесін төмендегі сатыларға бөлуге болады.

Физика - табиғат құбылыстарының қарапайым, әрі сонымен қатар ең жалпылама заңдылықтарын, материяның қасиеттері мен құрылымын және оның қозғалысын зерттейтін ғылым.

Физика теориялық және экспериментальды екі бөлікке бөлінеді. Теориялық физика - бұл табиғатты танудың негізгі тәсілі, сонымен қатар құбылыстардың математикалық нысандарын жасап, оларды нақты құбылыстарымен сәйкестендіру.

Теориялық физиканың өнімі болып физикалық теориялар табылады. Теория мазмұны: математикалық нысан құрастырылатын құбылыстар аймағын жазып алу; математикалық нысанды анықтайтын аксиомалар; бақыланатын, физикалық объектілерінің математикалық объектілерімен сәйкестендірілген аксиомалар; математикалық аксиомалардың; жорамал сияқты түсіндірілген салдары.

Фундаменталды физикалық теориялар: классикалық механика (Ньютон, Ньютон-Галилей); тұтас орталар механикасы; термодинамика; статистикалық физика; электродинамика; жалпы салыстырмалы теория (тартылыс теориясы); кванттық механика; өрістің кванттық теориясы бар.

Теориялық және экспериментальды физика әдістері бір-бірімен байланысуы арқылы қосымша мәліметтерді береді.

1 тақырып Матрицалар және анықтауыштар

1.1 Матрицалар

Анықтама. Сандардың мына түрдегі тік бұрышты кестесін

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

$m\times n$ өлшемді **матрица** деп атайды.
мұндағы

a_{ij} - нақты сандар, берілген матрицаның элементтері.

Матрицаның элементтері жолдар мен бағандарды құрайды. Бірінші индекс (i) жолдың нөмірін көрсетеді, ал екіншісі - (j) бағанның нөмірін көрсетеді.

Матрицаны қысқаша былай белгілейді:

$$A=(a_{ij}),(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n).$$

Егер матрицадағы жолдың саны мен бағанның саны бірдей болса (m=n) , онда матрица n-ші ретті **квадратты матрица** деп аталады. Ал тең болмаса, онда **тік бұрышты матрица** деп аталады.

Егер m = 1, n>1 болса, біржолды матрица аламыз: $(a_1\, a_2 \dots a_n)$.

Егер m>1, n = 1 болса, бір бағанды матрица аламыз, яғни $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$.

$a_{ii}(i=1,2,...,n)$ элементтердің реттелген жиынтығын квадратты матрицаның **бас диагоналы** деп атайды.

$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ екі матрица өзара тең деп аталады, егер бірдей орындағы элементтері тең болса, яғни барлық i, j үшін $a_{ij}=b_{ij}$ (мұнда екі матрицадағы жолдың және бағанның сандары бірдей болуы керек).

Матрицаға мынадай сызықтық амалдар қолдануға болады:

1. $A=(a_{ij})$ және $B=(b_{ij})$ екі матрицаның қосындысы деп үшінші бір $C=(c_{ij})$ матрицасын айтады, оның да m жолы және n бағаны бар, оның элементтері мына теңдікпен анықталады: $a_{ij}+b_{ij}=c_{ij},(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$.

Белгіленуі: A+B=C.

Айталық, $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$ десек, онда $A+B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_3 & b_1+b_3 \\ a_2+a_4 & b_2+b_4 \end{pmatrix}$

Осы сияқты екі матрицаның айырмасын да табуға болады.

2. $A=(a_{ij})$ матрицасын λ санына көбейту деп әрбір элементі А матрицасының сәйкес элементі мен λ санының көбейтіндісінен тұратын матрицаны айтады, яғни $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ десек, $\lambda\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 \end{pmatrix}$;

3. *m* жолы және *n* бағаны бар $A=(a_{ij})$ матрицасы мен *к* жолы мен *n* бағаны бар $B=(b_{ij})$ матрицасының көбейтіндісі деп *m* жолы және *n* бағаны бар және c_{ij} элементі А-ның *i* жолындағы элементтері мен В-ның *j* бағанының элементінің көбейтіндісінің қосындысына тең $C=(c_{ij})$ матрицасын айтады, яғни $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ik}b_{kj}, (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$.

Айталық,

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} \text{ десек, онда } A\cdot B=C=\begin{pmatrix} a_1a_3+b_1a_4 & a_1b_3+b_1b_4 \\ a_2a_3+b_2a_4 & a_2b_3+b_2b_4 \end{pmatrix}$$

4. Бас диагоналындағы элементтері 1-ге, ал қалған элементтері 0-ге тең матрицаны **бірлік матрица** деп атайды:

5.

$$E=\begin{cases} a_{ij}=1, i=j \\ a_{ij}=0, i\neq j \end{cases} \qquad \text{немесе} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Айталық, үшінші ретті бірлік матрицаны жазсақ: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Бірлік матрицаның мынадай қасиеті бар: $A\cdot E=A$ және $E\cdot A=A$

Матрицаларға сызықтық амалдар қолдануда мынадай қатынастарды қолдануға болады (қасиеттері):

1.$A+B=B+A$;
2.$(A+B)+C=A+(B+C)$;
3.$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
4.$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
5.$(\alpha\beta)A=(\alpha A)\beta$;
6.$A+0=A$; ,
7.$0\cdot A=0$

мұндағы

А,В және С - өлшемдері бірдей матрицалар;

α, β - кейбір нақты сандар;

0- нөлдік матрица.

Матрицаларды көбейтуде мынадай қатынастарды қолдануға болады (қасиеттері):

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $(A + B)C = AC + BC$;
3. $A(B + C) = AB + AC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \alpha -$ кез келген нақты сан.
5. $AE = A$;
6. $EA = A$.

Матрицаны транспонирлеу деп матрицаның жолдарын,ретін сақтай отырып, оның бағандарымен ауыстыруды айтады. Транспорленген матрицаны $\tilde{A}$ деп белгілейді.

Матрицаның **рангы** деп осы матрицаның нөлден өзгеше минорларының ең жоғарғы ретін айтады.

A матрицасының рангын r(*A*) деп белгілейді.

Мысал:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ сонда } r = 1$$

A^{-1} матрицасын *A* квадратты матрицасына **кері матрица** деп атайды, егер олардың көбейтіндісі бірлік матрицаға тең болса: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Кері матрицаны мына формуламен есептейді:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\bar{A}, \quad \text{мұндағы} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} - \text{ біріктірілген матрица.}$$

1.2 Анықтауыш

Анықтама $n \times n$ өлшемді матрицаға сәйкес келетін,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

таңбасымен белгіленген, кез келген сандар кестесіне белгілі бір заңдылықпен сәйкес қойылатын қандай да бір сан n-ші ретті **анықтауыш** деп аталады.

Анықтауышты Δ немесе $|A|$ деп белгілейді.

n-ші ретті анықтауыш әрқайсысы әр n жол мен әр n бағаннан тек бір элементтен алынған осы анықтауыштың n элементінің көбейтіндісі болатын n!=1*2*3*...*n мүшелерінің алгебралық қосындысына тең, сонай-ақ мүшелерінің жартысы солардың таңбасымен, ал қалғандары қарама-қарсы таңбамен алынады.

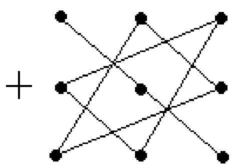
Дербес жағдайда екінші ретті квадраттық матрица берілсін:

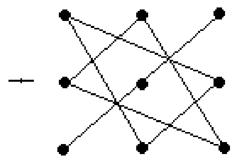
$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

Анықтама. Екінші ретті анықтауыш (детерминант) деп (3) матрицаға сәйкес және $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ таңбасымен белгіленетін және $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$; (2) теңдігімен анықталатын санды айтады.

Үшінші ретті анықтауыш та осылай анықталады: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Бұны есептеу үшін төмендегідей схема қолданылады:


1)


2)

Сонда жоғарыдағы анықтауыш мына теңдікпен табылады:

$$\Delta = a_1b_2a_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3\,, \qquad (4)$$

Анықтауыштың қасиеттері:

1. Анықтауыштың көлденең жолдарын сәйкес тік жолдарымен ауыстырғаннан мәні өзгермейді,

$$\text{яғни:} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. Анықтауыштың екі тік жолын немесе екі көлденең жолын ауыстырсақ онда оны –1-ге көбейткенге гең:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

3. Егер анықтауышта екі бірдей тік жол немесе екі бірдей көлденең жол болса, онда ол нөлге тең болады.
4. Анықтауыштың бір тік жолының немесе бір көлденең жолының элементтерін кез келген λ санына көбейту анықтауышты сол λ санына көбейткенмен теңбе-тең:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. Егер анықтауыштың бірнеше тік жолының немесе бірнеше көлденең жолының элементтері нөлге тең болса, онда анықтауыштың өзі де нөлге тең болады. (Бұл 4-ші қасиеттен шығады, яғни $\lambda = 0$ болса).
6. Егер анықтауыштың екі тік жолының немесе екі көлденең жолының элементтері пропоционал болса, онда мұндай анықтауыш нөлге тең болады.
7. Егер анықтауыштың n-ші тік жолының әрбір элементтері екі қосылғыштан тұрса,онда анықтауышты екі анықтауыштың қосындысымен жазуға болады, мұндағы 1-ші тік жолдар әр қосылғыштан тұрады, 2-ші, 3-ші тік жолдар өзгермейді.
8. Егер анықтауыш кейбір тік (көлденең) жолының элементтеріне сәйкесінше басқа тік (көлденең) жолдың элементтерін кез келген λ ортақ көбейткішке көбейтіп қосса, онда анықтауыштың шамасы өзгермейді.

1.3 Минор және алгебралық толықтауыш

1 анықтама. Анықтауыштың кез келген элементінің миноры дегеніміз - ол да анықтауыш, берілген анықтауыштың осы элемент тұрған тік жолы мен жатық жолын сызып тастаудан шыққан.

Мысалы, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

Анықтауышының $\underline{b_1}$ элементінің минорын табайық: $M_{b_1} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

2 анықтама. Анықтауыштың кез келген элементінің алгебралық толықтауышы дегеніміз осы элементтің минорын $(-1)^p$ көбейткенге тең, мұндағы $p=i+j$, яғни осы элемент орналасқан тік және көлденең жолдың нөмірлерінің қосындысы.

a_1 элементінің алгебралық толықтауышы A_1,

b_1 элементінің алгебралық толықтауышы B_1, т. с. с. белгіленеді.

Осы ұғымдардан кейін келесі қасиетті айтамыз.

Анықтауыш қандай да бір тік немесе көлденең жолдың элементтерін олардың алгебралық толықтауышына көбейтіп қосқанға тең болады.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1=\textit{немесе}=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3;$$

Мұны Δ - анықтауышты жіктеу деп атайды.

Мысал:

Анықтауышты 1-ші көлденең жолдың элементтерін жіктеу арқылы табу керек: $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix}$

Шешуі:

$$\Delta=(-1)^2\cdot 2\begin{vmatrix} 12 & 19 \\ 9 & 17 \end{vmatrix}+(-1)^3\cdot 4\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 17 \end{vmatrix}+(-1)^4\cdot 6\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=2\cdot(204-171)-4(85-57)+6(45-36)=$$

$$=2\cdot 33-4\cdot 28+6\cdot 9=66-112+54=8.$$

Матрицалар және анықтауыштардың теориясы теңдеулер жүйесін шешуде кеңінен қолданылады.

1. Үш белгісізі бар үш теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{5}$$

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ коэффициенттері және d_1, d_2, d_3 бос мүшелері берілген.

Егер x_0, y_0, z_0 үш санын x, y, z -тің орнына қойғанда (5) жүйедегі үш теңдеу тепе-теңдікке айналса, онда бұл үш санды (5) жүйенің **шешімі** деп атайды.

Әрі қарай мына төрт анықтауыш негізгі рөл атқарады:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Δ анықтауыш (6) жүйенің анықтауышы деп аталады. $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ анықтауыштары Δ анықтауышындағы бірінші, екінші және үшінші бағандарды сәйкесінше бос мүшелермен алмастыру арқылы алынады.

Егер (6) теңдеулер жүйесінің ең болмағанда бір шешімі болса, онда жүйе **үйлесімді;** егер жүйенің шешімі болмаса, онда **үйлесімсіз** деп аталады. Егер үйлесімді теңдеулер жүйесінің бір ғана шешімі болса, онда ол **анықталған,** ал бірден көп шешімі болса, онда **анықталмаған** деп аталады.

(5) түріндегі екі теңдеулер жүйесінің шешімдер жиыны бірдей болса, онда бұл теңдеулер жүйесін **эквивалентті немесе мәндес** деп атайды. Жүйені эквивалентті түрлендірулер оны эквивалентті (мәндес) жүйеге келтіреді.

Сызықтық теңдеулер жүйесінің элементар түрлендірулері

- $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$ - теңдеуін сызып тастау;
- жүйедегі теңдеулердің немесе теңдеудегі $a_{ij}x_j$ қосылғыштардың орнын ауыстыру;
- жүйедегі бір теңдеудің екі бөлігіне, екінші теңдеудің сәйкес екі бөлігін кез келген нақты санға көбейтіп қосу;
- жүйедегі басқа теңдеулердің сызықтық комбинациясы болатын теңдеуді жүйеден алып тастау.

Енді теңдеулер жүйесін шешудің әдістерін қарастырамыз.

1. (6) анықтауыштар арқылы (5) теңдеулер жүйесінің шешімдерін табу әдісін **Крамер ережесі** деп атайды. Ол мына формулалар: [2]

2.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (7)$$

3. Кері матрица әдісінде әуелі берілген (1) сызықтық теңдеулер жүйесін матрица түрінде жазып аламыз:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Сонда, матрицаларды көбейту ережесі бойынша, (1) жүйені эквивалентті матрица түрінде жазуға болады:

$$AX = H, \qquad (9)$$

мұндағы

A - берілген матрица;

H – берілген вектор-баған;

X – белгісіз вектор-баған.

Бұдан, кері матрица ұғымын қолдансақ, онда ізделінді шешімді былай табуға болады:

$$X = A^{-1}H., \qquad (10)$$

4. Тағы бір көп қолданылатын әдістердің бірі – Гаусс әдісі. Бұл әдісте белгісіздерді бірте-бірте жою арқылы шығарады. Гаусс әдісі бойынша шешім табу екі кезеңнен тұрады. Бірінші кезеңде (тура жол) жүйе сатылы түрге келтіріледі. Екінші кезеңде (кері жол) осы сатылы жүйеден белгісіздер анықталады. Осыны жүйелеп айтайық. Айталық, сызықтық теңдеулер жүйесі берілсін:

5.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ------------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{11}$$

Бірінші кезең:

$a_{11} \neq 0$ деп есептейміз (егер $a_{11} = 0$ болса, онда x_1-дің коэффициенті нөлден өзгеше теңдеуді бірінші жазамыз). a_{11}-ді жетекші коэффициент, ал осы коэффициенті бар теңдеуді жетекші теңдеу деп атайды.

Бірінші теңдеуден басқа барлық теңдеуден x_1 белгісізді жойып, (1) жүйені түрлендіреміз. Ол үшін бірінші теңдеудің екі жағын да $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$-ге көбейтіп, жүйенің екінші теңдеуіне мүшелеп қосамыз. Бұдан кейін бірінші теңдеудің екі жағын $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$-ге көбейтіп, үшінші теңдеуге қосамыз. Осы процесті жалғастыра отырып, эквивалентті жүйе аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad a'_{33}x_2 + a'_{33}x_3 + ... + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \qquad --------------- \\ \qquad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + ... + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \tag{12}$$

Мұндағы

$a'_{ij}, b'_i, (i, j = \overline{2, m})$ – бірінші адымнан кейінгі жаңа коэффициенттер.

Жоғарыдағыдай, басты элемент $a'_{22} \neq 0$ деп есептеп,бірінші және екінші теңдеулерден басқа барлық теңдеуден x_2 белгісізін жоямыз, т.с.с.

Егер ең соңында сатылы жүйе үшбұрыш түріне келсе, онда бұл жүйенің бір ғана шешімі болады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad ---------------- \\ \qquad\qquad\qquad a_{mn}^{(m-1)}x_n = b_m^{(m-1)} \end{cases}$$

Осы теңдеуден x_n – ді табамыз, бұның алдындағы теңдеуден x_{n-1} – ді табамыз, әрі қарай жүйе бойынша жоғары қарай көтеріліп, қалған барлық белгісіздерді $(x_{n-2},...,x_1)$ табамыз.

Есеп шығару үлгілері

1 есеп. $\vec{F}$ (2, 3, -5) күші А (1, -2, 2) нүктесіне түседі.
а) $\vec{F}$ күшінің түсу нүктесі түзу сызықпен қозғала отырып, А орнынан В (1, 4, 0) орнына орын ауыстырғандағы жұмысын;
б) $\vec{F}$ күшінің В нүктемен салыстырғандағы моментінің модулін есептеу керек.

Шешуі:
а) $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$, $\vec{S} = \vec{A}B = (0,6,-2)$ тең болғандықтан,

$\vec{F} \cdot \vec{A}B = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + (-5) \cdot (-2) = 28$, A=28;

б) Күш моменті $M = \vec{B}A \times \vec{F}$, $\vec{B}A = (0,-6,2)$,

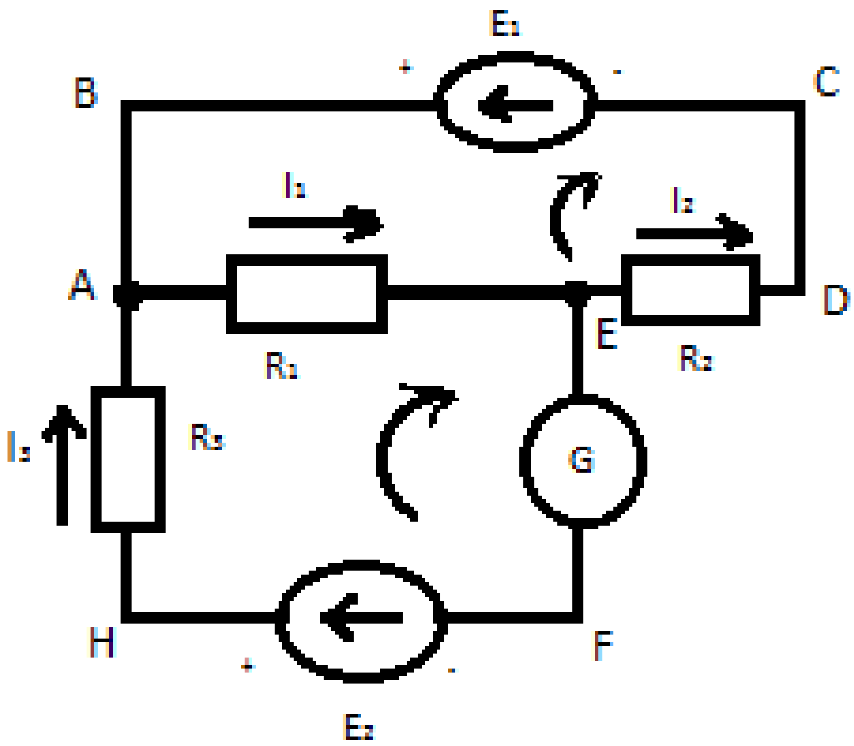
$$\vec{B}A \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}.$$

Олай болса $|M| = \sqrt{24^2 + 4^2 + 12^2} = 4\sqrt{46}$

2 есеп. Электрлік тізбек екі гальванилық элементерден, үш кедергілерден 120 Ом, 52 Ом, 26 Ом және гальванометрден тұрады (1 сурет). Бұл тізбекте гальванометр 55 мА токты анықтайды. Екінші элементінің ЭҚК-н, егер біріншінікі 2 В-қа тең болса табу керек. Гальванометр мен элементтердің ішкі кедергілерін еске алмаймыз.

Шешуі:

Тарталған тізбектер үшін Кирхгоф заңдары қолданылады, олар негізінде қажетті шамаларды табу үшін өрнектерді алуға болады (токтарды, кедергілерді және ЭҚК). Кирхгоф ережелерін қолдана отырып, келесі ережелері орындау керек:



1 сурет - Электрлік тізбек

1) Таңдап алудың алдында тендеулерді құру керек:
а) ток бағыттарын, егер олар есеп шартында берілмесе (оларды тілше көмегімен көрсету);
б) контурдың бағдарлануын;
2) Кирхгофтың бірінші заңы бойынша теңдеулерді құру кезінде түйінге кіретін токтарды оң деп шығатын токтарды теріс деп алу керек (теңдеулер саны түйіндер санынан бірге аз болу керек (сурет 1);
3) Екінші Кирхгофтың ережесі бойынша тендеулерді құру кезінде есептеу керек:
а) тізбек бөлігіндегі кереудің түсуі (яғни I_iR_i көбейтіндісі) теңдеугі плюс таңбасымен кіреді.

Егер ток бағыты бұл тізбек бөлігінде контурды шектеп алатын бағыт пен дәл келетін болса, және «минус» таңбасымен, ал егер керісінше жағдайда. Бағытты қарама-қарсы болса – «плюс» таңбамен кіреді.
б) ЭҚК теңдеуге плюс таңбасымен кіреді, егер ол контурды айналып отырған бағытта потенциалды арттыратын болса (яғни айналу кезінде ток көзінің ішінде минус таңбасынан плюс таңбасына қарай жүру қажет), минус таңбасымен керісінше жағдайда (Кирхгофтың екінші заңы бойынша құралатын тендеулер саны, тізбектегі тұйықталған контурлардың санынан аз болу керек).

Теңдеулерді құру кезінде бірінші контур қандай да бола алады. Барлық соңғы контурлар контурларға кіретін және әлі қарастырылмаған бір бұтақ болса да құру керек. Егер теңдеулерді шешу кезінде ток шамаларының теріс мәндері алынса немесе кедергілері, онда ол мынаны білдіреді, берілген кедергі арқылы ток шындығында таңдап алынған бағытына қарама қарсы жүреді.

$I_1 - I_2 - I_3 = 0$ токтардың бағыттарын, және сағат тілше бағытымен дәл келетін бағытты айналып өте алайық. Түйін үшін Кирхгофтың бірінші ережесі бойынша: бір түйінде тоғасын токтардың алгебралық қосындысы ABCDEA контур үшін Кирхгофтың екінші заңы бойынша:

$-I_1R_1 - I_2R_2 = -E_1$ немесе теңдеудің екі жағын да – 1 көбейткен соң $I_1R_1 + I_2R_2 = E_1$

AEFHA контур үшін сәйкес: $I_1R_1 + I_3R_3 = E_2$.

Жазылғандарды біріктірген соң белгісі саң мәндерін қойған соң, аламыз:

$I_1 - I_2 - 0{,}055 = 0$; $120I_1 + 52I_2 = 2$; $120I_1 + 0{,}055 \cdot 26 = E_2$.

Бұл теңдеулерді белгісіз мәндерді сол жаққа, ал белгілі мәндерде оң жаққа қойған соң, төменде келтірілген теңдеулер жүйесі шығады, оның ішінде Кирхгофтың бірінші ережесімен екінші ережесі біріктірген түрде келтірілген. Тек қана теңдеу жүйесін құрған соң, белгісіз шаманы бір өрнектен екінші өрнекке қойып қана табуға болады, түйінде тоғысатын тоқтардың алгебралық қосындысы – бірінші ереже арқылы жазылады, қалғандары екінші ереже бойынша, яғни:

$$I_1 - I_2 = 0{,}055$$

$$60I_1 + 26I_2 = 1$$

$$120I_1 - E_1 = -1{,}1$$

Бұл үш белгісіз шамалары бар теңдеулер жүйесін алгебраның кәдімгі ережелерін қолдана отырып шешуге болады, бірақ есеп шарты бойынша үш тең бір белгісізді табу қажет болғандықтан, анықтамалар әдісін қолданамыз. Жүйе анықтамасын құрып есептейміз:

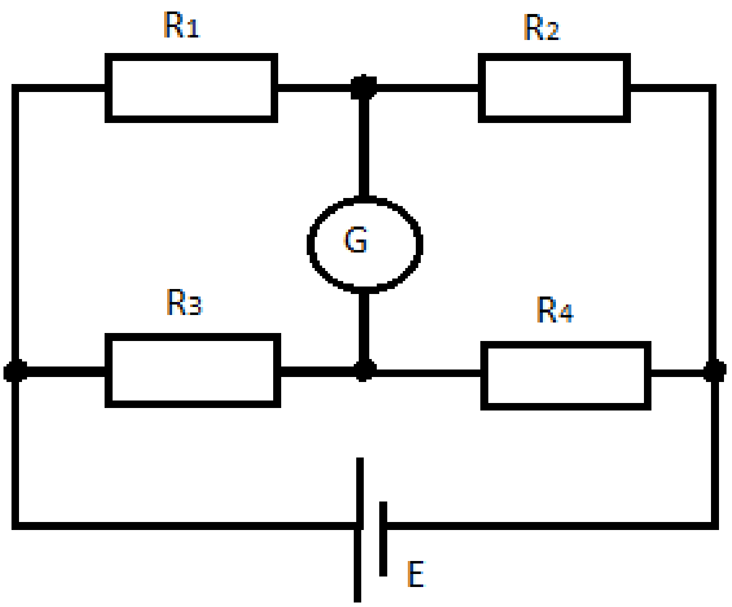
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 60 & 26 & 0 \\ 120 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -86$$

Ал E_2 шама үшін анықтаманы құрып шешеміз:

$$\Delta E_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0{,}055 \\ 60 & 26 & 1 \\ 120 & 0 & -1{,}1 \end{vmatrix} = -387$$

Демек, $E_1 = \frac{\Delta E_2}{\Delta} = 4{,}5$

3 есеп. Суретте (2 сурет) ε=2 В, R_1=60 Ом, R_2=40 Ом, R_3=R_4=20 Ом және R_G=100 Ом. Токтың күші I_G анықтаңыздыр.



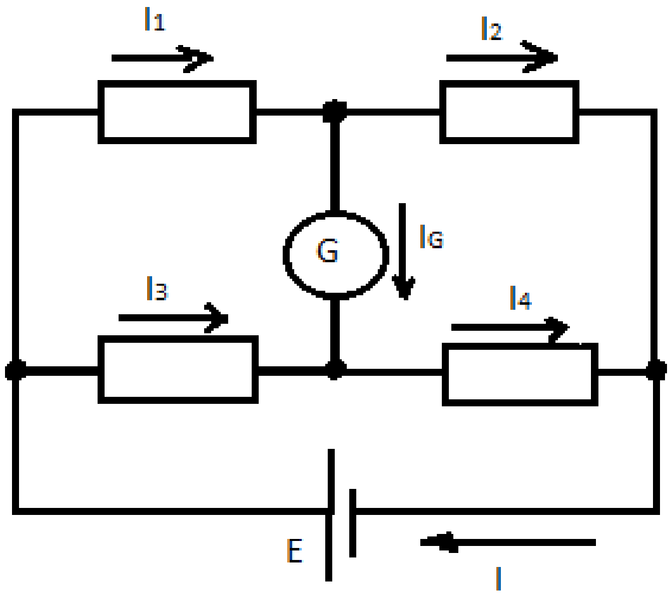
2 сурет – Электрлік тізбек

Шешуі:

Суреттерден анықтаймыз (2, 3 сурет):

$$\begin{cases} I = I_1 + I_3 \\ I_1 = I_2 + I_G \\ I_2 + I_4 = I \\ I_3 + I_G = I_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1R_1 + I_2R_2 = E \\ I_3R_3 + I_4R_4 = E \\ I_1R_1 + I_GR_G + I_4R_4 = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6I_1 + 4I_2 = 0{,}2 \\ 2I_3 + 2I_4 = 0{,}2 \\ 6I_1 + 10I_G + 2I_4 = 0{,}2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6I_1 + 4(I_1 - I_G) = 0{,}2 \\ 2(I_4 - I_G) + 2I_4 = 0{,}2 \\ 6I_1 + 10I_G + 2I_4 = 0{,}2 \end{cases}$$



3 сурет – Ток күшінің схемасы

$10I_1 - 4I_G = 0{,}2 \Rightarrow$

$I_1 = \dfrac{0{,}2 + 4I_G}{10}$

$4I_4 - 2I_G = 0{,}2 \Rightarrow I_4 = \dfrac{0{,}2 + 2I_G}{4}$

$6I_1 + 10I_G + 2I_4 = 0{,}2$

$6\left(\dfrac{0{,}2 + 4I_G}{10}\right) + 10I_G + 2\left(\dfrac{0{,}2 + 2I_G}{4}\right) = 0{,}2$

$1{,}2 + 24I_G + 100I_G + 1 + 10I_G = 2$

$134I_G = -0{,}2$

$I_G = -1{,}49 \cdot 10^{-3}$ А.

2 тақырып Санды тізбектің шегі

2.1 Тізбек шегі анықтамасы

Егер — шегі бар болса (кейде оны немесе деп те белгілейді), онда оны функциянің x x_0-ге сол жағынан ұмтылғандағы **шегі** деп атайды. Дәл осы сияқты функция -тің x x_0-ге оң жағынан ұмтылғандағы шегін анықтауға болады.

Функцияның оң жақты және сол жақты шектерін оның біржақты **шектері** деп атайды.

Функциянің x_0-дегі шегі болуы үшін оның оң жақты және сол жақты шектерінің болуы қажетті және жеткілікті яғни, функция шектері жөнінде келесі теоремалар орынды болады:

Теорема. Айталық, және бар болсын, онда болады (мұнда болуы да мүмкін).

Егер осы теоремалардың шарттары орындалмаса, онда түріндегі анықталмағандықтарды беруі мүмкін, ондай анықталмағандықта алгебралық түрлендірулер арқылы айқындалады.

Сандық тізбек. x айнымалысының шегі туралы ұғымды қалыптастыру үшін оның қандай сандық жиынның мәндерінен құралатынын білу жеткіліксіз. Оған қосымша нақты қандай мәндер (оның ішінде қайталанатындары да болуы мүмкін) және оны қандай ретпен қабылдайтынын білу қажет, яғни айнымалы реттелген (бағытталған) болуы керек.

Сандық тізбектің шегі. Бізге натурал қатар 1, 2, 3, 4, …, n, … берілсе, бұл қатардағы әрбір натурал сан n-ді белгілі бір заңдылықпен x_n нақты санымен ауыстырсақ, онда төмендегідей тізбек шығады (13):

$$x=\{x_n\}=x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n, \tag{13}$$

бұл тізбектің мүшелері немесе элементтері өсу реті бойынша нөмірленіп орналасқан.

1-Анықтама. (13) тізбегі арқылы берілген X айнымалысының мәндерін сандық қатар деп атайды. (13) қатары берілді деп есептеледі, егер оның кез келген мүшесін табуға болатын ереже белгілі болса.

2-Анықтама. а санын $X=\{X_n\}$ тізбегінің шегі деп атайды, егер кез келген барынша аз $\varepsilon > 0$ саны үшін N нөмірі табылып n>N мәндері үшін X_n -нің барлық мәндері төмендегі теңсіздікті қанағаттандырса:

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{14}$$

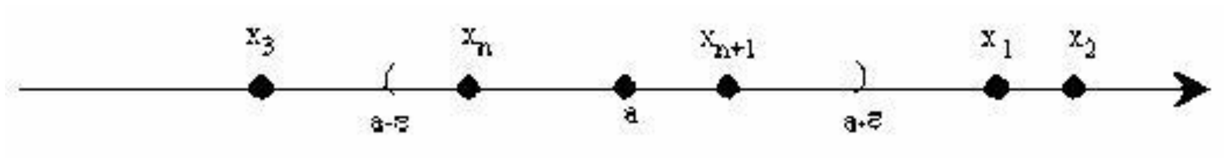
бұл фактіні былай жазады:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{15}$$

Бұл анықтаманы басқаша былай айтуға болады: а саны $X=\{X_n\}$ тізбегінің шегі болады, егер оның мәні белгілі бір орыннан бастап а санынан өте аз шамаға өзгешеленсе.

Мұндағы N нөмірінің ε санын қалай таңдап алуымызға байланысты екенін білу өте маңызды. ε саны азайған сайын оған сәйкес $N=N_\varepsilon$ нөмірі жалпы алғанда өседі. $|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігінен $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ немесе $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$. Бұдан былай осыны біз жиі пайдаланамыз.

Егер а, а+ε, а-ε сандарын $\{x_n\}$ айнымалысының мәндерін нүктелер арқылы сандық жазықтыққа кескіндесек (4 сурет), онда біз сан тізбегі шегінің айқын геометриялық ұғымын аламыз. Центрі а нүктесінде болатын қандай да бір өте аз (ұзындығы 2ε) кесіндісін алсақ та, x_n -нің барлық нүктелері белгілі бір нөмірден бастап осы кесіндінің ішінде жатады (кесіндінің сыртында өте аз мөлшердегі нүктелер болуы мүмкін)



4 сурет - Сан тізбегі

Шексіз аз және шексіз үлкен шамалардың анықтамасы

1-Анықтама. Шегі нөлге ұмтылатын сандық тізбек $\{x_n\}$ шексіз аз шама деп аталады. Егер анықтамадағы сандық тізбектің шегі a=0 болса, онда $|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі төмендегі түрге келеді (16)

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \qquad (16)$$

($n < N_\varepsilon$ үшін). Сонымен жоғарыда берілген шексіз аз шаманың анықтамасын «шек» атауын қолданбай-ақ беруге болады. Айнымалыны (сан тізбегін) шексіз аз дейді, егер ол абсолют шамасы бойынша алдын ала берілген барынша аз $\varepsilon > 0$ санынан кіші болса.

Бізге $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ сан тізбектері берілсе (17) және (18)

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \qquad (17)$$

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n \qquad (18)$$

онда олардың қосындысы $\{x_n+y_n\}$ төмендегідей тізбек болады:

$$x_1+y_1;\ x_2+y_2;\ \ldots;\ x_n+y_n;\ \ldots \qquad (19)$$

2.2 Шексіз аз және шексіз үлкен шамалардың қасиеттері

Теорема 1. Кез келген шектелген санмен шексіз аз шамалардың қосындысы да шексіз аз шама болады.

Дәлелдеуі: Бізге шексіз аз $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектері берілген болсын. Анықтама бойынша, $\{x_n\}$ шексіз аз шамасы үшін барынша аз $\varepsilon > 0$ санына сәйкес N' нөмірі табылып, n>N' мәндері үшін $|x_n| < \varepsilon/2$ теңсіздігі орындалады.Дәл осыған ұқсас шексіз аз $\{y_n\}$ шамасы үшін N'' нөмірі табылып, n>N'' мәндері үшін $|y_n| < \varepsilon/2$ теңсіздігі орындалады.

Егер натурал сан N, N' және N'' сандарының ең үлкені болса, онда $n > N$ болғанда жоғарыдағы екі теңсіздік бір мезгілде орындалады (20):

$$|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad (20)$$

Осыған ұқсас төмендегі теореманы дәлелдеуге болады.

Теорема 2. Шектелген айнымалы мен шексіз аз шаманың көбейтіндісі шексіз аз шама болады.

Салдар. Тұрақты шамамен шексіз аз шаманың көбейтіндісі шексіз аз шама болады.

Теорема 3. Кез келген санды шексіз аз шамалардың көбейтіндісі де шексіз аз шама болады. Шексіз көп шамалар шексіз аз шамаларға кері шамалар болады.

Анықтама. $\{x_n\}$ айнымалысын шексіз үлкен дейді, егер ол абсолют шамасы бойынша алдын ала берілген M>0 санынан үлкен болса. Шексіз үлкен шамалардың мысалы ретінде оның жалпы мүшесі түрінде берілуін айтуға болады.

Егер $\{x_n\}$ айнымалысы шексіз үлкен болса және (ең болмағанда жеткілікті үлкен n үшін) анықталған белгісін сақтаса (+ немесе -), онда сол таңбаларға қатысты айнымалы $\{x_n\}$ -нің шегі $+\infty$ немесе $-\infty$ деп жазады. $\lim x_n = +\infty$ немесе $x_n \to +\infty$; $\lim x_n = -\infty$ немесе $x_n \to -\infty$

Теорема 4. Егер айнымалы $\{x_n\}$ шексіз үлкен болса, онда оған кері шама $\{a_n\}=\{1/x_n\}$ шексіз аз шама болады.

Барынша аз $\varepsilon>0$ санын алайық. $|x_n|\to\infty$, онда $M=1/\varepsilon$ саны үшін N нөмірі табылып, n>N мәндері үшін $|x_n|>M=1/\varepsilon$ теңсіздігі орындалады.Онда сол n үшін $\{a_n\}<\varepsilon$ болады, бұл жағдай теореманың дұрыстығын дәлелдейді. Осыған ұқсас оған кері теореманы дәлелдеуге болады.

Теорема 5. Егер айнымалы $\{x_n\}$ шексіз аз боса (нөлге айналмайтын), онда оған кері шама $\{a_n\}=\{1/x_n\}$ шексіз үлкен болады.

2.3 Шегі бар айнымалының қасиеттері

Егер $\lim x_n = a$ болса, онда айнымалы мен оның шегінің айырымы $a_n=x_n-a$ шексіз аз шама болады, теңдеуін ескерсек, $|a_n|=|x_n-a|<\varepsilon$ ($n>N_\varepsilon$ үшін). Бұдан төмендегі тұжырымға келеміз:

Теорема 1. Егер айнымалының шегі a санына тең болса, онда олардың айырымы $a_n=x_n-a$ шексіз аз шама болады.

Теорема 2. Егер айнымалы мен оның шегі a санының айырымы шексіз аз шама болса, онда a саны сол айнымалының шегі болады. $\{x_n\}$ айнымаланың шегі a саны болсын. Кез келген $p<a$ (немесе $g>a$) саны үшін $\varepsilon>0$ саны табылып, $a-\varepsilon>p$ (немесе $a+\varepsilon<g$) теңсіздіктері орындалады. Бірақ шектің анықтамасы бойынша N нөмірі табылып, $n>N$ үшін төмендегі теңсіздік орындалады: $x_n>a-\varepsilon$ ($x_n<a+\varepsilon$), сондықтан төмендегі теңсіздік те орындалады: $x_n>p$ (немесе $x_n<g$). Бұдан төмендегі теоремаға келеміз:

Теорема 3. Егер $\{x_n\}$ айнымалысы a шегіне ұмтылса және $a>p$ ($a<g$), онда оның барлық мәндері белгілі бір орыннан бастап p-дан үлкен болады (g-дан кіші болады).

Теорема 4. Егер $\{x_n\}$ айнымалысының белгілі шегі бар болса, онда ол шектелген деп аталады.

Теорема 5. Егер айнымалының шегі бар болса, онда ол шек біреу ғана.

Шынында, керісінше болсын дейік: айталық, $x_n\to a$ және $x_n\to b$ ($a<b$). a мен b ортасында жататын кез келген r санын алайық. Егер $x_n\to a$ және $a<r$ болса, онда N' нөмірі табылып, $n>N'$ үшін $x_n<r$ теңсіздігі орындалады. Басқа жағынан, $x_n\to b$ және $b>r$ болса, онда N'' нөмірі табылып, $n>N''$ үшін $x_n>r$ теңсіздігі орындалады. Егер N нөмірі N' және N'' нөмірінің ең үлкені болса, онда , $\{x_n\}$ айнымалысының мәні бір мезгілде r –ден кіші және r-ден үлкен болады. Бұл мүмкін емес. Осы қайшылық тұжырымның дұрыстығын дәлелдейді.

Теорема 6. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ айнымалылары үшін әрқашанда $x_n<y_n$ теңсіздігі орындалса және олардың шектері сәйкес a және b болса, онда $a<b$ болады.

Теорема 7. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ айнымалылары олардың барлық өзгерістерінде $x_n=y_n$ болса және олардың шектері сәйкес a және b болса, онда ол шектер $a=b$ болады.

Теорема 8. (аралық айнымалы туралы теорема). Егер $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ тізбектері үшін ең болмағанда бір жерден бастап $x_n\le y_n\le z_n$ теңсіздігі орындалса және $\lim x_n = \lim z_n = a$ болса, онда $\lim y_n = a$ болады.

Барынша аз $\varepsilon>0$ санын алайық.Сондықтан N' нөмірі табылып, $n>N'$ болғанда $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ теңсіздігі орындалады және N'' нөмірі табылып, $n>N''$ болғанда $a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon$ теңсіздігі орындалады. N саны N' және N'' сандарының ең үлкені болсын, онда $n>N$ болғанда жоғарыдағы екі теңсіздік бір мезгілде орындалады: $a-\varepsilon < x_n\le y_n\le z_n < a+\varepsilon$. Ең соңында $n>N$ болғанда $a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon$ болады.

2.4 Шегі бар айнымалыларға арифметикалық амалдар қолдану

Төмендегі теореманың маңыздылығының мағынасы оның көмегімен шек анықтамасының қолданылуын керексіз етуге болады.

Теорема 1. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ айнымалыларының шектері $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ және $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, бар болса, онда олардың қосындысының (айырымының) шегі бар, ол шек a+b (a-b) –ға тең.

Теореманың шартын былай жазуға болады (21):

$$x_n=a+\alpha_n,\ y_n=b+\beta_n, \tag{21}$$

мұндағы

α_n және β_n – шексіз аз шамалар.

Онда (22)

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha \pm \beta), \tag{22}$$

мұндағы

$\alpha_n \pm \beta_n$ шексіз аз шама, сондықтан теорема (22) бойынша $\{x_n \pm y_n\}$ айнымалысының шегі $a \pm b$ болады.

Салдар. Кез келген шегі бар айнымалылардың қосындысының шегі олардың шектерінің қосындысына тең. Осыған ұқсас төмендегі теореманы дәлелдеуге болады:

Теорема 2. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ айнымалыларының шектері $\lim x_n = a,\ \lim y_n = b$ бар болса, онда олардың көбейтіндісінің шегі де бар болады және ол шек $\lim(x_n y_n) = ab$.

Салдар 1. Тұрақты санды шек таңбасының алдына шығаруға болады (23):

$$\lim Ax_n = A\lim x_n, \tag{23}$$

Салдар 2. Кез келген мөлшердегі айнымалылардың көбейтіндісінің шегі олардың шектерінің көбейтіндісіне тең.

Салдар 3. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ айнымалыларының шектері бар болса, $\lim x_n = a,\ \lim y_n = b$ және $b \neq 0$ болса, онда олардың қатынастарының шегі бар, ол шек:

$$\lim = \frac{x_n}{x_n} = \frac{a}{b}$$

2.5 Шексіз аз және шексіз көп шамалардың классификациясы

Шексіз аз шаманың классификациясы

Белгілі бір зерттеу жасаған кезде α, β, γ,…, шексіз аз шамалар қатарын қарастыралық. Жалпы алғанда олар шекті немесе шексіз шекке ұмтылатын бір ғана айнымалының функциялары болуы мүмкін.

1-Анықтама. Егер β/α (α/β) қатынасы нөлге тең емес белгілі бір шекке ұмтылса, онда α және β шексіз аз шамаларын аздығының реті бірдей шексіз аз шамалар деп атайды.

Теорема -1. Екі шексіз аз шама α және β эквивалентті болуы үшін $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу: $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ болсын, онда $\delta=(\beta/\alpha)-1\to 0$ и $\gamma=\beta-\alpha=\alpha\cdot\delta$, α –ға қарағанда аздығы жоғарғы ретті шексіз аз шама болады және $\lim(\gamma/\alpha)=\lim\delta=0$.

Эквиваленттіліктің осы дәлелденген қасиеті $\frac{0}{0}$ белгісізді анықтаған кезде пайдаланылады.

Шексіз көп шаманың классификациясы

2-Анықтама. Егер β/α қатынасы шексіз аз шама болса (ал α/β – шексіз көп), онда шексіз аз β шамасының аздығының реті шексіз аз α-дан жоғары деп аталады.

Егер шексіз аз β шексіз аз α-ға қарағанда жоғарғы ретті болса, онда ол былай жазылады (24):

$$\beta = 0(\alpha) \tag{24}$$

3-Анықтама. α және β шексіз аз шамаларын эквивалентті ($\alpha\sim\beta$) деп атайды, егер олардың айырымы $\gamma=\alpha-\beta$ α және β шексіз аз шамаларының әрқайсысына қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз шама болса.

4-Анықтама. Екі үлкен шама y и z бірдей ретті шама деп аталады, егер олардың қатынасы z/y (немесе y/z) нөлге тең емес тұрақты шекке ие болса.

5-Анықтама. Егер z/y қатынасы шексіз көп болса (керісінше, y/z –шексіз аз болады), онда z шамасы y-ке қарағанда жоғарғы ретті шама болады және y шамасы z -ке қарағанда төменгі ретті шама болады.

6-Анықтама. Егер екі шексіз үлкен шаманың қатынасының шегі 1-ге тең болса, онда оларды эквивалентті деп атайды.

2.6 Функцияның үздіксіздігі

Анықтама. $y = f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үздіксіз дейді, егер:

1. Функция x_0 нүктесінде және оның белгілі бір маңайында анықталған болса;

2. $x \to x_0$-да функцияның шегі бар болса;

3. Функцияның $x \to x_0$-дағы шегі оның x_0 нүктесіндегі мәніне тең болса;

Анықтама. $y = f(x)$ функциясын (a,b) интервалында үздіксіз деп атайды, егер ол осы интервалдың барлық нүктелерінде үздіксіз болса.

1-Анықтаманы былай жазуға болады (25):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0), \qquad (25)$$

(25) формуладан үздіксіз функцияның таңбасы мен шектің таңбасының орындарын ауыстыруға болатынын байқаймыз.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үздіксіз болса және $\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ болса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінін оң жағынан үзіліссіз дейді.

Егер $y = f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үздіксіз болса және $\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ болса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінін сол жағынан үзіліссіз дейді.

Сонымен $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үздіксіз болуы үшін оның бір жақтылы шектерінің тең болуы керектігін байқаймыз (26):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0), \qquad (26)$$

Егер $x\text{-}x_0=\Delta x$ деп белгілесек, онда $x=x_0+\Delta x$ болады және $x \to x_0$ -да $\Delta x \to 0$. Осыны ескерсек (26) формуласын төмендегідей түрде жазуға болады (27):

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (27)$$

Формуласынан функция үздіксіз болса, аргументтің шексіз аз мәніне функцияның шексіз аз мәні сәйкес келетінін байқаймыз. Осыған ұқсас барлық элементарлық функцияларды қарастырсақ, онда олардың барлығы да өздерінің анықталу болыстарында үздіксіз болатынын дәлелдеуге болады.

Теорема. Барлық элементарлық функциялар өздері анықталатын нүктелердің барлығында үздіксіз болады.

Егер белгілі бір x_0 нүктесінде (25) үздіксіздік шартының ең болмағанда біреуі орындалмаса, онда $y = f(x)$ функциясы үшін x_0 нүктесі үзіліс нүктесі болады.

Анықтама. y = f(x) функциясының x_0 үзіліс нүктесі бірінші текті үзіліс нүктесі деп аталады, егер бір жақтылы шектерінің $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ және $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ екеуі де бар болса.

Бірінші текті үзіліс нүктелерінен басқа үзіліс нүктелері оның екінші текті үзіліс нүктелері деп аталады.

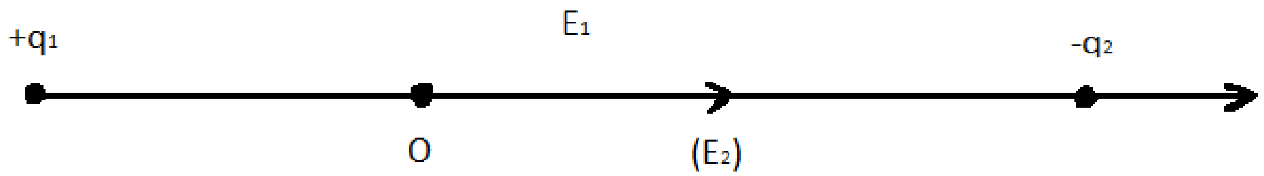
Анықтама.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x), \qquad (28)$$

болатын бірінші текті үзіліс нүктесі x_0 жөнделетін үзіліс нүктесі деп аталады.

Есеп шығару үлгілері

1 есеп. Скипидар ішінде бір-бірінен 10 см арақашықтықта орналасқан екі $+2\cdot10^{-7}$ Кл және $-4\cdot10^{-7}$ Кл зарядтардың ортасындағы нүктеде өріс кернеулігі неге тең?
(5 сурет).



5 сурет – Зарядтары орналыстыру

Шешуі:
1. О нүктесіне ойша оң зарядты (сыншы) орналастырайық. Аттас зарядтар бір-бірінен тебілгендіктен, Кулон күші q_2 зарядына қарай бағытталады, олай болса q_1 зарядының әсер ету күші және кернеулік векторы да $(\vec{E}_1)$ онымен бағыттас болады.
2. q_2 заряд тудырған өрістің кернеулігі де $(\vec{E}_2)$ алдыңғы $(\vec{E}_1)$ кернеулікпен бір бағытта болады.
3. О нүктедегі кернеулік векторларының геометриялық қосындысы $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.
Векторлар бір түзудің бойында орналасып, бір жаққа бағытталғандықтан, қорытқы вектордың $(\vec{E})$ модулі $(\vec{E}_1)$ және $(\vec{E}_2)$ векторлардың модульдарының арифметикалық қосындысына тең:

$$E = E_1 + E_2$$

4. $E_1 = \kappa \frac{q_1}{\varepsilon \cdot r_1^2}$, $E_2 = \kappa \frac{q_2}{\varepsilon \cdot r_2^2}$,

онда $E = \frac{k}{\varepsilon}\left(\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2}\right)$.

5. Әрбір зарядтан О нүктеге дейінгі арақашықтық (r) зарядтардың арақашықтығының (a) жартысына тең: $r = \frac{a}{2}$.

Осы мәнді орнына қойып табайық:

$$E = \frac{4k}{\varepsilon \cdot a^2}(q_1 + q_2) = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10^9}{2{,}2 \cdot 0{,}01}\left(2 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-7}\right) = 9{,}9 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

2 есеп. Кедергісі 20 Ом өткізгіштегі ток 2с уақыт ішінде сызықтық түрде 0-ден 6 А-ге дейін артады (6 сурет). Осы өткізгіштегі бірінші, екінші секундта бөлініп шыққан жылу мөлшерін анықтау керек.

Шешуі:

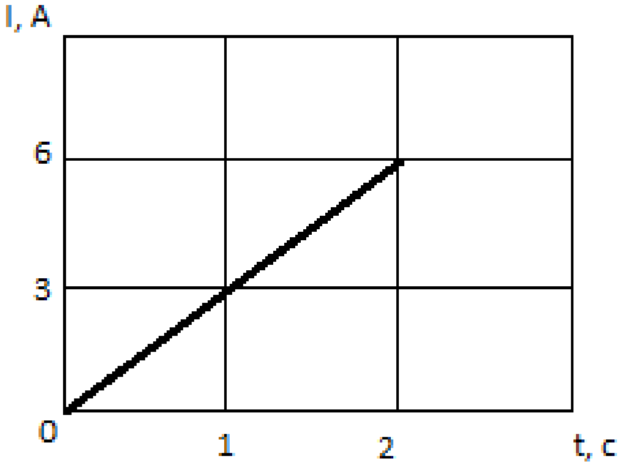
$Q = I^2Rt$ түрдегі Джоуль-Ленц заңы тек қана тұрақты ток үшін әділ (I=const). Егер де өткізгіштегі ток күші өзгеретін болса, онда бұл заң тек шексіз аз уақыт үшін ғана әділ:

$dQ = I^2Rdt$ электр токтың жылулық әсері анықтау формуласындағы ток күші аз уақыттың кейбір функциясы болып табылады. Берілген жағдайда $I = kt$ пропорционалдық к коэффициент, ток шамасын өзгеріс жылдамдығын сипаттайды:

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$k = \frac{6}{2} = 3 \text{ А/с}$$

Оны тәуелділік график арқылы (6 сурет) табуға болады,



6 сурет – Токтың тәуелділігі

 яғни:

$$dQ = k^2 R t^2 dt$$

Соңғы уақыт интервалында бөлініп шыққын жылу мөлшерін анықтау үшін Δt уақыт өзгерісінің t_1 ден t_2-ге дейін интегралдайтын шектері арқылы есепті жүргіземіз:

$$Q = k^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt \, ,$$

$$Q = \frac{1}{3} k^2 R (t_2^3 - t_1^3)$$

Берілген сан мәндерін қойған соң:

$$Q = \frac{1}{3} 3^2 \cdot 20(1-0) = 60 \text{ Дж}$$

бірінші және екінші $Q = \frac{1}{3} 3^2 \cdot 20(8-1) = 420$ Дж үшін қажетті шамаларын есептеп табамыз.

3 тақырып Функция шегі

3.1 Гейне Коши бойынша нүктедегі функция шегін анықтау, оларды салыстыру

$f(x)$ функциясы x=a нүктесінің маңайында анықталған (мүмкін a-дан басқа нүктелерде) болсын.

1-Анықтама. Тұрақты A санын f(x) функциясының $x \to a$ ұмтылғандағы шегі деп атайды, егер әрбір ε>0 үшін δ>0 саны табылып, |x-a|<δ теңсіздігі орындалғанда |f(x)-A|<ε теңсіздігі орындалса. Бұл жағдай былай белгіленеді (29):

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad (29)$$

Егер $f(x)$ функциясы өзінің шегі A_1 санына айнымалы x, a- санына одан кіші бола отырып ұмтылғанда жететін болса, оны былай жазады (30):

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A_1, \qquad (30)$$

осы A_1 санын f(x) функциясының a нүктесіндегі сол жақтылы шегі деп атайды.

Егер x, a-дан үлкен мәндерді қабылдаса, онда ол былай жазылады (31):

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A_2, \qquad (31)$$

осы A_2 санын f(x) функциясының a нүктесіндегі оң жақтылы шегі деп атайды.

Егер функцияның оң жақтылы және сол жақтылы шектері бар болса және олар бір-біріне тең $A_1=A_2=A$ болса, онда A саны f(x) функциясының 1-анықтама мағынасындағы шегі болады және керісінше функцияның a нүктесіндегі шегі бар болса, онда оның осы нүктеде оң жақтылы да, сол жақтылы да шегі бар болады және олар бір-біріне тең болады.

$f(x)$ функциясы сандар өсінің барлық нүктелерінде анықталған болсын немесе x-тің белгілі бір сандардан үлкен мәндерінде анықталсын. Кейбір жағдайда, керісінше функция шегі тізбектің шегіне келтірілуі мүмкін.

Шынында, $x > a$ болғанда (шексіз көп әдіспен) мынадай тізбек жасауға болады (32):

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \qquad (32)$$

мұның шегі a санына ұмтылатындай жасауға болады. (32) тізбегіндегі аргумент мәндеріне төмендегі функция тізбегінің мәндері сәйкес келеді (33):

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots \qquad (33)$$

(32) формуласындағы сияқты бұл тізбектің шегі де А санына тең болады. Бұған кері тұжырым да жазуға болады: Егер кез келген а-санына жинақты (30) тізбек үшін, оған сәйкес А санына жинақты (31) тізбек болса, онда А саны $x > a$ болғанда f(x) функциясының шегі болады.

2-Анықтама. Егер а санына жинақты аргумент мәндерінің тізбегі үшін, оған сәйкес функция мәндерінің тізбегі А санына жинақты болса, онда А санын $x > a$ болғандағы функцияның шегі деп атайды.

Бірақ та шек туралы теореманы бірден қолдану әрқашанда мақсатқа жеткізе бермейді. Мұндай жағдайда шек туралы теореманы қолдану үшін алдымен функция тепе-тең болатын түрлендіру жасау қажет. Оны төмендегідей мысалдан байқауға болады.

Бұл шығарылған мысалдардан төмендегідей тұжырым жасауға болады. x→± ∞ болғанда бірдей дәрежелі көпмүшеліктердің қатынасының шегі x-тің ең үлкен дәрежесінің коэффициеттерінің қатынасына тең болады. Егер бөлшектің алымындағы көпмүшеліктің дәрежесі бөліміндегі көпмүшеліктің дәрежесінен үлкен болса, онда оның шегі шексіздікке ұмтылады, ал бұған кері жағдайда бөлшектің шегі нөлге ұмтылады

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$ – бірінші тамаша шек

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x_n)^{1/x} = e$ - екінші тамаша шек.

$a_n = (1+\dfrac{1}{n})^n \quad n = 1,2,...,$ тізбегі үшін $2\langle a_n \langle 3$ теңсіздігі орындалады.

Сондықтан (a_n) жоғарыдан шенелген өспелі тізбек.

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1}{n})^n = e \pm$ шегі бар болады.

e санының жуық мәні $e \approx 2,72$ болатыны дәлелденген. Бұл сан Непер саны деп аталады.

Жинақты тізбек - шегі бар болатын an сандар тізбегі.Егер X жиынының әрбір белгіленген x0 нүктесінде fn(x0) сандар тізбегі жинақталса, онда fn(x) функциялар тізбегі X жиынында жинақталады деп айтылады.

Теорема. Егер тізбек жинақты болса онда оның тек жалғыз ғана шегі бар. Кері жорып жинақты тізбектің шегі бар дейік $\lim_{n\to\infty} x_n = a_1$және $\lim_{n\to\infty} x_n = a_2$

Егер $a_1 \neq a_2$болса онда $\sqrt{(a_1)} \cap \sqrt{(a_2)} \neq 0$

1) $\lim_{n\to\infty} = a_1 \quad : \forall\sqrt{a_1}\exists\, n_1 \in N \forall n > n_1 x_n \in \sqrt{(a_1)}$

2) $\lim_{n\to\infty} = a_2$: $\forall\sqrt{a_2}\ \exists\ n_2 \in N \forall n > n_2\, x_n \in \sqrt{(a_2)}$

Бұл екі қатынастан n> max $\{n_1,n_2\}$ болғанда $x_n \in \sqrt{(a_1)} \cap \sqrt{(a_2)}$ шығады.

Коши критерийі

X_n тізбегі R жиынында жинақты болу үшін Xn тізбегінің фундаментальді болуы қажетті және жеткілікті Қажеттілік айталық x_nтізбегі жинақты және оның шегі а болсын сонда мұның фундаментальді екенін көрсетейік

$\exists$ n $\cdot N \Rightarrow |x_n - a|$ = a

Демек n+p>n_a үшін де фундаментальді Xn функционалды тізбек

3.2 Функция шегі. Функция шегінің бар болуының Коши критерийі

Егер x_0 нүктесінің кез келген аймағында X жиынының x_0- ден өзгеше x нүктесі жатса, онда x_0 нүктесін X жиынының шектік нүктесі деп атайды. Айталық y=f(x) X жиынында анықталсын және x_0 осы X-тың шектік нүктесі болсын.

Анықтама (Гейне бойынша). Егер x_0 нүктесіне жинақты болатын X жиынының кез келген $\{x_n\}$ тізбегі $(x_n \neq x_0, n = 1,\ldots)$ бойынша құрылған $\{f(x_n)\}$ тізбегі b санына жинақты болса, онда b санын y=f(x) функциясының x_0 нүктесіндегі (немесе $x \to x_0$ –дағы) шегі деп атайды. Оны былай жазады:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b$$

немесе

$$x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to b$$

Анықтама. (Коши бойынша).

Егер $\forall \varepsilon > 0$ сәйкес $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып $0 < |x - x_0| < \delta$ шартты қанағаттандыратын x-тің барлық мәндері үшін $|f(x) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b санын y=f(x) функциясының x_0 нүктесіндегі шегі деп атайды.

Егер $\forall \varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $0 < |x' - x_0| < \delta,$ $0 < |x'' - x_0| < \delta$ шарттарын қанағаттандыратын $\forall x', x'' \in X$ үшін $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде Коши шартын қанағаттандырады дейді.

Теорема (Коши белгісі). y=f(x)функциясының x_0 нүктесінде тиянақты шегі бар болуы үшін y=f(x) функциясының x_0 нүктесінде Коши шартын қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті.

Бірінші тамаша шек

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x_n}{x_n}=1$$

Салдарлар:

1. $\lim_{x\to x_0}\frac{tgx}{x}=1$;

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$;

3. $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$.

Екінші тамаша шек $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

Айталық y=f(x) және z=F(y)функциялары берілсін, онда z=F(f(x)) күрделі функция (супперпозиция) болады.

Теорема. Егер $\lim_{x\to x_0} f(x)-y_0 \lim_{y\to y_0} F(y)$ шектер бар болса және $x\neq x_0$ үшін $f(x)\neq y_0$ болса, онда x_0 нүктесінде $F[f(x)]$ күрделі функциясының шегі бар және $\lim_{x\to yx_0} F[f(x)] = \lim_{y\to y_0} F(y)$.

3.3 Үзіліссіз функциялар. Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеті

Аңықтама. y=f(x) функциясы:

a) x_0 нүктенің белгілі бір маңайында аңықталса.

b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Онда y=f(x) функциясы x_0 нүктеде үзіліссіз деп аталады. Мысал: $y = x^2$ функциясы x=0 нүктеде үзіліссіз, өйткені бұл функция біріншіден осы нүктенің аймағында аңықталған, екіншіден $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, y(0) = 0, яғни $\lim_{x\to 0} y(x) = y(0)$

Анықтама. y=f(x) функциясы B сандар жиынының (натурал, бүтін, рационал және иррационал сандар жиыны)кез келген нүктесінде үзіліссіз болса, онда бұл y=f(x) функциясы B сандар жиынында үзіліссіз деп аталады.

Теорема. Егер f(x) функциясы [a,b] кесіндісінде үзіліссіз болса, f(x) ол кесіндіде **шектелген** болады.

Теорема. Егер f(x) функциясы [a,b] кесіндісінде үзіліссіз болса, ол функция сол кесіндіде кем дегенде бір рет өзінің ең үлкен мәнін, бір рет ең кіші мәнін қабылдайды.

Мысал. Берілген x_1 және x_2 нүктелеріндегі y= f(x) функциясының үзіліссіздігін анықтау керек. Егерде олардың ішінде үзілісті нүктелер болса, онда оның тегін анықтап, функцияның графигін салу керек.

1) y=3x/x+2; $x_1=3, x_2=-2$;

Шешуі:

1) y=3x/x+2; $x_1=3, x_2=-2$; Берілген функцияны аргументтің x_1, x_2 мәндерінде жеке-жеке қарастырамыз. $x_1=3$ нүктесінде функция анықталынған y(3)=3·3/3+2=9/5 және элементарлық функция болғандықтан үзіліссіз.$x_2=-2$ нүктесінде бөлшектің бөлімі нольге айналатын болғандықтан, функция анықталмаған, сондықтан бұл нүктеде функция үзілісті. Функцияның $x_2=-2$ нүктесінде оң жақты, сол жақты шектерін есептейміз.

Есеп шығару үлгілері

1 есеп. Суретте (7 сурет) көрсетілген график бойынша:

а) тербелістің амплитудасын, периодын, жиілігін және циклдік жиілігін табыңыздар.

б) $x = x(t)$ тәуелділіктің теңдеуін жазыңыздар.

в) фазалары $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$ рад болғандағы тербелетін нүктенің табыңыздар.

г) уақыт есебі басталғаннан 0,1 және 0,5 сек өткеннен кейінгі ығысуды табыңыздар.

Шешуі:

а) тепе-теңдік қалпынан ең үлкен ығысу, яғни амплитуда 10 см=0,1 м.

Толық тербеліске кеткен уақыт-период 0,2 с.

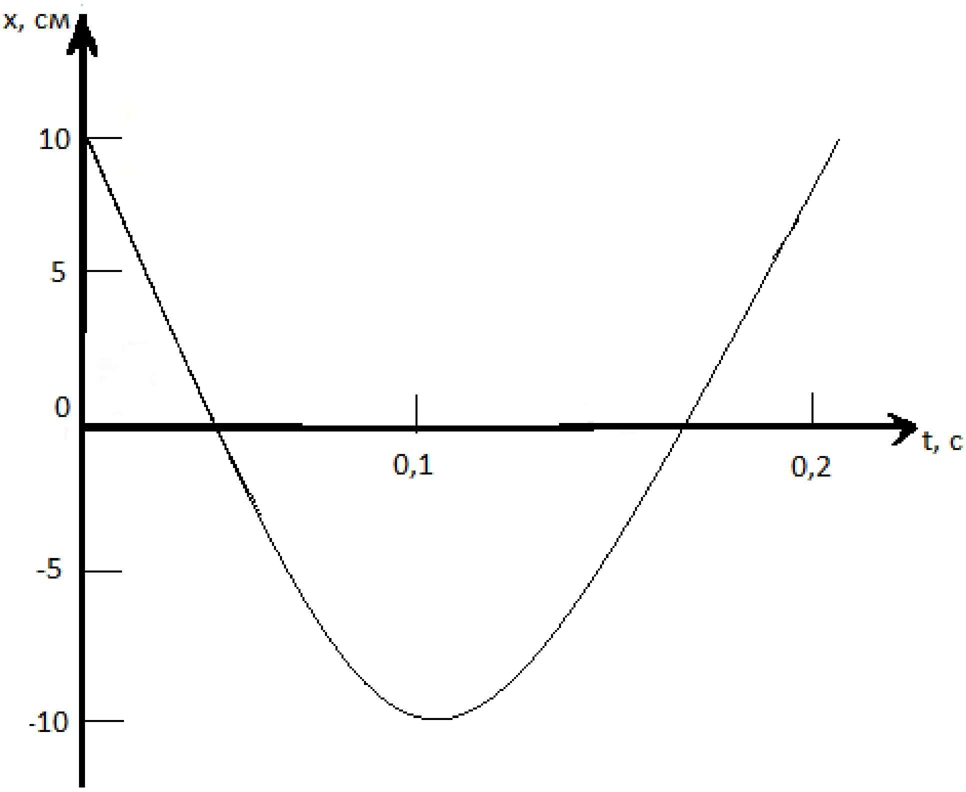
Жиілік $\nu = \frac{1}{O} = \frac{1}{0,2} = 5$ Гц;

циклдік жиілік $\omega = \frac{2\pi}{O} = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi$ (рад/с).

б) ығысудың уақытқа тәуелділігі формуласының жалпы түрі:

$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha_0)$ бұл графиктегі косинустық қисыққа сәйкес жазылған. $\alpha_0 = 0$ ескеріп, x_0 және ω мәндерін қойсақ,

$x = 0{,}1\cos 10\pi t$



7 сурет – Косинус графигі

в) Тербелмелі жүйенің кез келген уақыттағы ығысуы немесе косинус (синус) функцияларының аргументі фаза деп аталады. Сондықтан фаза $\frac{\pi}{2}$ рад болғанда,

$x = 0{,}1\cos\frac{\pi}{2} = 0{,}1 \cdot 0$ фаза $\frac{2\pi}{3}$ рад болғанда,

$x = 0{,}1\cos\frac{2\pi}{3} = -0{,}05$ м.

г) ығысу $x_1 = 0{,}1\cos 10\pi \cdot 0{,}1 = 0{,}1\cos\pi = -0{,}1$ м

$x_2 = 0{,}1\cos 10\pi \cdot 0{,}15 = 0{,}1\cos 1{,}5\pi = 0$.

2 есеп. Нүктенің жылдамдық пен үдеудің максимал мәнін табу керек, егер ол амплитудасы 3 см және циклдік жиілік $\omega = \pi / 2c^{-1}$ гармониялық тербеліс жасап тұрса.

Шешуі:

Тербеліп тұрған нүктенің жылдамдығы υ деп мынадай шама аталады $\upsilon = \dot{x} = (A\sin \omega t)' = A\omega \cos \omega t$, ал максимал жылдамдық өзінің максимал мәніне $\cos \omega t = 1$ болғанда жетеді,

яғни

$$\upsilon_{\max} = A\omega$$

$$\upsilon_{\max} = 0{,}03\text{м} \cdot 3{,}14 / 2c^{-1} = 0{,}0471 \text{ м/с.}$$

Тербеліп тұрған нүктенің үдеуі

$$a = A\omega^2 .$$

$$a = 0{,}03 \cdot \left(\frac{3{,}14}{2} c^{-1} \right)^2 = 0{,}0739 м / c^2$$

3 есеп. Материалдық нүкте бір мезгілде екі өзара перпендикуляр гармониялық тербелістерге, теңдеулері $x = A_1 \cos \omega t$ және $y = A_2 \cos \frac{\omega}{2} t$ қатысады, мұндағы $A_1 = 1см; A_2 = 2см; \omega = \pi c^{-1}$. Нүкте траекторияның теңдеуін табу керек.

Шешуі:

Гармониялық тербелістер теңдеулері

$$x = A_1 \cos \omega t ,$$

$$y = A_2 \cos \frac{\omega}{2} t ,$$

Траектория теңдеуін табу үшін гармониялық тербелістер теңдеулерден уақытты t шығару керек. Ол үшін мына формуланы пайдаланамыз

$$\cos(\alpha / 2) = \sqrt{(1/2)(1 + \cos \alpha)} .$$

Берілген жағдайда $\alpha = \omega t$, сондықтан $y = A_2 \cos \frac{\omega}{2} t = A_2 \sqrt{(1/2)(1 + \cos \alpha)}$. формула бойынша $\cos \omega t = x / A_1$, онда траектория теңдеуі

$$y = A_2\sqrt{(1/2)(1 + x/A_1)}.$$

Шыққан өрнек өзімен парабола теңдеуін ұсынады. Осы теңдеулерден нүкте ығысуы координаттар осьтерімен шектелген және -1 ден +1 см Ох осімен және -2 ден +2 см Оу осімен шектеледі.

4 есеп. $x = A \cdot \sin\omega(t+\tau)$ теңдеуі арқылы тербеліс берілген, мұндағы $\omega = 2{,}5 \cdot \pi\ c^{-1}$, $\tau = 0{,}4c$. Тербелістің периодын, жиілігін және бастапқы фазасын табу керек.

Шешуі:

Тербеліс периоды T дөңгелектік жиілік арқылы мына формула бойынша анықталады:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

осыдан

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2{,}5\pi\ c^{-1}} = 0{,}8\ c.$$

Тербеліс жиілігімен период арасындағы мынадай байланыс балғандықтан $T = \frac{1}{\nu}$, осыдан тербеліс жиілігін ν табамыз:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}8c} = 1{,}25c^{-1} = 1{,}25\text{Гц}.$$

Тербелістің бастапқы фазасы $\varphi = \omega \cdot \tau = 2{,}5\pi \cdot 0{,}4c = \pi$-ге тең.

4 тақырып Монотонды айнымалы шектің бар болуының белгісі

4.1 Монотонды айнымалы шек

1-Анықтама. $\{x_n\}$ айнымалысын өсетін айнымалы дейді, егер (34)

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots \qquad (34)$$

x_n айнымалысын кемімелі айнымалы дейді, егер (35)

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots \qquad (35)$$

Жоғарыда айтылған тізбектерді монотонды деп атайды.

Теорема 1 (тізбек шегінің бар болуының қажетті белгісі). Монотонды өсетін және жоғарғы жағынан шектелген тізбектердің бәрінің де шегі бар.

Теорема 2. Монотонды кемитін және төменгі жағынан шектелген кез келген тізбектің шегі бар. [1]

2 е саны

Жалпы мүшесі (36)

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad (36)$$

болатын тізбек қарастыралық. Бұл тізбектің монотонды өсетіндігін және жоғарғы жағынан шектелгендігін көрсетуге болады.

Өсетін және шектелген тізбектің шегінің бар болуы туралы белгіні еске алсақ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ тізбегінің шегі бар. Осы шек математикада үлкен роль атқарады. Ол шекті е саны деп атайды.

Сонымен

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad (37)$$

е – иррационал сан, е=2,718281828459045.

4.2 Натурал логарифм

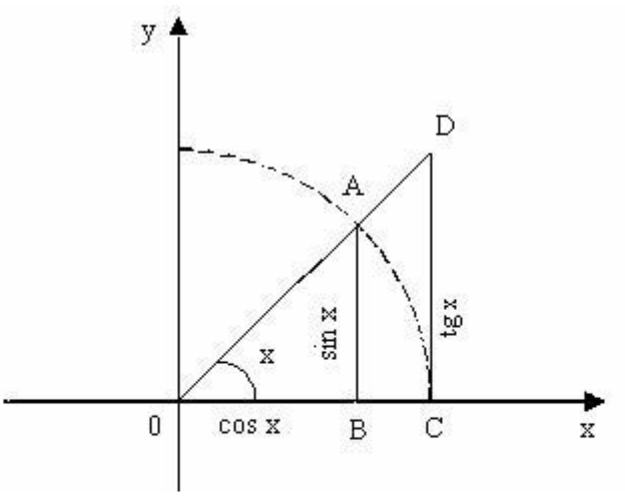
Негізі е санына тең логарифмді натурал логарифм деп атаймыз, оны $\ln x$, $\ln x = \log_e x$ арқылы белгілейді. Натурал және ондық логарифмдер арасындағы байланысты табайық. $y = \ln x$ болсын, онда логарифмнің анықтамасы бойынша $x = e^y$. Осы теңдеуді негізі (4) бойынша логарифм десек, онда $\lg x = y \lg e$. Мұндағы $\lg e \approx \lg 2{,}7183$, онда $\lg x = 0{,}4343 \cdot \ln x$, бұдан $\ln x \approx 2{,}30261 \cdot \lg x$.

4.3 Бірінші тамаша шек

Егер $x \to 0$, онда $\frac{\sin x}{x}$ функциясының шегі 1-ге тең болады. Бұл үшін алдын-ала $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, ал $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ болатынын көрсетейік. 0<x<π/2 болсын. Радиусы 1-ге тең шеңбер қарастырайық (8 сурет). АС доғасының сандық мәнінің центрлік бұрышы радиан арқылы өрнектелген x-ке тең, ал AB кесіндісінің сандық мәні Sinx, өйткені 0<AB<AC, сондықтан (38):

$$0 < \sin x < x \tag{38}$$

теңсіздігінен аралық айнымалы туралы теореманың салдары бойынша, x→0 болса sin x→0 болады.



8 сурет - Радиусы біріншi тең шеңбер

$\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ болатынын дәлелдейік, шынында, $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ сондықтан (38),

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1 \tag{39}$$

Енді x→0, $\frac{\sin x}{x}$ функциясының шегі неге тең болатынын көрелік. $\frac{\sin x}{x}$ қатынасы $\frac{0}{0}$ анықталмағандығы. 8 суреттен мынаны байқаймыз

$S_{\Delta AOB}<S_{\text{сектора } AOC}<S_{\Delta ODC}$,

$S_{\Delta AOB}$ =(1/2) OB·AB=(1/2)

sin x · cos x ;

$S_{\text{сектора } AOC}$ =(1/2) R^2·x=(1/2) (40)

x ;

$S_{\Delta ODC}$ =(1/2) OC· CD=(1/2)

R· tg x=(1/2) tg x, R=1.

Осыларды (38) теңсіздігіне қойсақ (40):

$$\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tgx \qquad (41)$$

(39) теңсіздігі x-тің 0 мен π/2 аралығындағы барлық мәндері үшін орындалады. Бұл теңсіздікті $\frac{1}{2}\sin x$ -ке бөлсек, онда (41):

$$Cosx<\frac{x}{Sinx}<\frac{1}{Cosx}$$ немесе

$$\frac{1}{Cosx}<\frac{Sinx}{x}<Cosx \qquad (42)$$

(41) теңсіздігі x<0 болған жағдайда орындалады. Бізге $\lim\limits_{x\to0} cosx=1$ екені белгілі. (42) теңсіздігінің екі жағы да x→0 болғанда шектері 1-ге тең болды. Сондықтан, аралық аргумент туралы теорема бойынша (43):

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (43)$$

4.4 Екінші тамаша шектер

Математикада және оның қосымшаларында екінші тамаша шек деп аталатын шектің маңызы зор (44):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e, \qquad (44)$$

Салдар -1. x→–∞ болсын. Мынадай жаңа айнымалы енгізейік: t=-(x–1) немесе x=-(t+1). Егер x→–∞ болса, онда t→+∞ болады.

Сондықтан:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right), \quad (45)$$

Сонымен (45),

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e, \qquad (46)$$

Сондықтан $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ - айнымалысы $x\to\mp\infty$ -да бір ғана шекке ұмтылады. Яғни (46),

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e, \qquad (47)$$

Салдар. Егер (45) теңдігіндегі 1/x=α болса, онда x→+∞ болғанда α→0 (α≠0) болады да (48):

$$\lim_{a\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e, \qquad (48)$$

Есеп шығару үлгілері

1 есеп. Өшетін тербелістің периоды T=4c, өшудің логарифмдік декременті $\lambda=1{,}6$, бастапқы фазасы $\alpha=0$. $t=\frac{T}{4}$ болғанда нүктенің ығысуы x=4,5 см. Осы тербелістің қозғалыс теңдеуін жазыңыздар.

Шешуі:

Өшетін тербелістің теңдеуі:

$$x = Ae^{-\beta t}\sin\left(\omega t + \alpha\right)$$

Мұнда

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha = 0,$$

$$\beta = \frac{\lambda}{T} = \frac{1{,}6}{4} = 0{,}4 \ (\text{с}^{-1}).$$

$t = \frac{T}{4} = \frac{4}{4} = 1$ с болғанда х=4,5 см

(А) амплитуданы табамыз.

$x = Ae^{-\beta t}\sin\left(\omega t + \alpha\right)$ теңдеумен

$$A = \frac{x}{e^{-\beta t}\sin\omega t}$$

$$A = \frac{4{,}5}{e^{-0{,}4\cdot 1}\sin\frac{\pi}{2}\cdot 1} = \frac{4{,}5}{e^{-0{,}4}}$$

Осы өрнекті логарифмдейік:

$$\ln A = \ln\left(\frac{4{,}5}{e^{-0{,}4}}\right) = \ln 4{,}5 - \ln\left(e^{-0{,}4}\right) = \ln 4{,}5 + 0{,}4 = 3{,}8 + 0{,}4 = 4{,}2$$

Натурал логарифмдік кестеден lnA=4,2 болғанда А=6,7 см екендігін табамыз.

Осы тербелістің қозғалыс теңдеуі:

$$x = 6{,}7e^{-0{,}4t}\sin\frac{\pi}{2}t \ (\text{см}).$$

2 есеп. Математикалық маятниктің өшу логарифмдік декременті $\lambda = 0{,}2$. Маятниктің толық бір тербелісінде, тербеліс амплитудасы қанша есеге азаяды?

Шешуі:

Өшетін тербелістер үшін амплитуданың кему заңы:

$$A = A_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}$$

Осыны маятниктің толық бір тербелісінен кейінгі амплитудасы үшін жазайық.

$$A_1 = A_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}$$

жәнe

$$A_2 = A_0 e^{-\lambda \frac{t+T}{T}}$$

Қатынасын табайық:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}}{A_0 e^{-\lambda \frac{(t+T)}{T}}} = e^{\left[-\lambda \frac{t}{T}(-\lambda \frac{(t+T)}{T}\right]} = e^{\left(-\lambda \frac{t}{T} + \frac{\lambda}{T} t - \frac{\lambda}{T} T\right)} = e^{\lambda}$$

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \ln e^{\lambda} = \lambda = 0{,}2$$

Натурал логарифмдік кестеден

$$\frac{A_1}{A_2} = 1{,}22$$

5 тақырып Нүктедегі және аралықтағы үзіліссіз функциялар

5.1 Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеті

Анықтама. y=f(x) функциясы:
a) x_0 нүктенің белгілі бір маңайында аңықталса.
b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
Онда y=f(x) функциясы x_0 нүктеде үзіліссіз деп аталады. Мысал.y = x^2 функциясы x=0 нүктеде үзіліссіз, өйткені бұл функция біріншіден осы нүктенің аймағында аңықталған, екіншіден $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, y(0) = 0, яғни $\lim_{x\to 0} y(x) = y(0)$

Анықтама. y=f(x) функциясы B сандар жиынының (натурал, бүтін, рационал және иррационал сандар жиыны)кез келген нүктесінде үзіліссіз болса, онда бұл y=f(x) функциясы B сандар жиынында үзіліссіз деп аталады.

Теорема. Егер f(x) функциясы [a,b] кесіндісінде үзіліссіз болса, f(x) ол кесіндіде **шектелген** болады.

Теорема. Егер f(x) функциясы [a,b] кесіндісінде үзіліссіз болса, ол функция сол кесіндіде кем дегенде бір рет өзінің ең үлкен мәнін, бір рет ең кіші мәнін қабылдайды. Мысал. Берілген x_1 және x_2 нүктелеріндегі y= f(x) функциясының үзіліссіздігін анықтау керек. Егерде олардың ішінде үзілістінүктелер болса, онда оның тегін анықтап, функцияның графигін салу керек.

5.2 Функцияның нүктедегі үзіліссіздігі

$y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде және осы нүктенің қандайда маңайында анықталған. $y = f(x))$ функциясы x_0 нүктеде үзіліссіз деп аталады, егер осы нүктеде шек бар болса және шек функцияның осы нүктедегі мәніне тең болса, яғни

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad (49)$$

(49) теңдігі 3 шарттың орындалатын көрсетеді:

1) $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде және осы нүктенің қандайда маңайында анықталған;

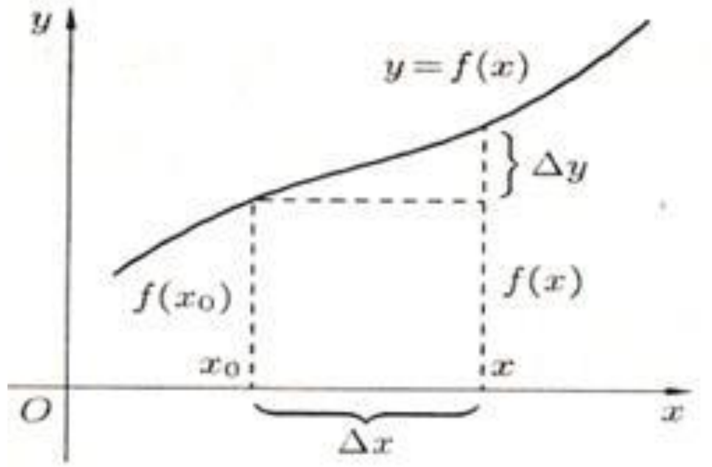
2) $y = f(x)$ функциясының $x \to x_0$ болғанда шегі бар болады;

3) функцияның x_0 нүктесіндегі шегі функцияның осы нүктедегі мәніне тең, яғни (49) теңдігі орындалады. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ болғандықтан, (49) теңдігінен

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \qquad (50)$$

$$= f(\lim_{x\to x_0}(x) = f(x_0)$$

Бұл $y = f(x)$ үзіліссіз функцияның шегін табу барысында функция таңбасы астындағы шекке өтуге болатындықтан, яғни $f(x)$ функцияның x арументінің орнына оның x_0 шектік мәнін қоюға болатындығын білдіреді. Аргумент пен функция өсімшелері ұғымдарына сүйеніп, функция үзіліссіздігіне тағы бір анықтама беруге болады (9 сурет).



9 сурет - Функция өсімшесі мен аргумент өсімшесі

$f(x)$ функциясы қандай да $(a;\ b)$ интервалында анықталсын. Кез-келген $x_0 \in (a;\ b)$ нүктесін алайық. Кез-келген $x \in (a;\ b)$ үшін $x - x_0$ айырмасы x_0 нүктесіндегі x арументінің өсімшесі деп аталып, $\Delta\, x$ («дельта х») арқылы белгіленеді: $\Delta\, x = x - x_0$. Бұдан $x = x_0 + \Delta\, x$. Функцияның сәйкес мәндерінің $f(x) - f(x_0)$ айырмасы $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі айырмасы деп аталып, $\Delta\, y$ немесе $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ арқылы белгіленеді. Δx және $\Delta\, y$ өсімшелері оң сан, теріс сан да болуы мүмкін. теңдігін жаңа белгілеу арқылы жазайық. $x - x_0$ және $x - x_0 \to 0$ шарттары бірдей болғандықтан, (51) теңдігі төмендегі түрде жазылады:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0, \qquad (51)$$

немесе

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Алынған (51) теңдігі функциясының нүктедегі үзіліссіздігінің тағы бір түрі болып табылады. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде және оның маңайында анықталып (50) теңдігі орындалса, яғни ақырсыз аз аргумент өсімшесіне функцияның ақырсыз аз өсімшесі сәйкес келсе, $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

Функцияның интервалдағы және кесіндідегі үзіліссіздігі

$y = f(x)$ функциясы $(a;\ b)$ интервалында үзіліссіз деп аталады, егер ол осы интервалдың әрбір нүктесінде үзіліссіз болса.

$y = f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ интервалында үзіліссіз деп аталады, егер ол $(a;\ b)$ интервалында үзіліссіз және $x = a$ нүктесінде оң жақтан, ал $x = b$ нүктесінде сол жақта үзіліссіз болса.

5.3 Функцияның үзіліс нүктелері мен олардың жіктелуі

Функция үзіліссіздігі бұзылатын нүктелер функцияның үзіліс нүктелері деп аталады. Егер $x = x_0$ нүктесі $y = f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі болса, онда бұл функцияда функция үзіліссіздігінің бірінші анықтамасынан ең болмағанда бір шарты орындалмайды. Функция барлық үзіліс нүктелер бірінші, екінші текті үзіліс нүктелеріне жіктеледі. x_0 нүктесі бірінші текті үзіліс нүктесі деп аталады, егер осы нүктеде функцияның оң, сол нақты ақырлы шектері (бір жақты) бар болса, онда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$$

және

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

Сонымен қатар,

а) егер $A_1 = A_2$ болса, онда x_0-қалыпта келтірілетін үзіліс нүктесі, ә) егер $A_1 \neq A_2$ болса, онда x_0-ақырлы үзіліс нүктесі деп аталады, егер $|A_1 - A_2|$ шамасын бірінше текті үзіліс нүктесіндегі секіріс деп аталады. Егер $y = f(x)$ функциясының ең болмағанда біржақты шектерінің (оң және сол жақты) біреуі жоқ болса немесе шексіздікке тең болса, x_0 нүктесі $y = f(x)$ функциясының *екінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады.

Үзіліссіз функциялар туралы негізгі теоремалар. Элементар функциялардың үзіліссіздігі

Функциялар үзіліссіздігі туралы теоремалар сәйкес шек туралы теоремадан шығады.

Теорема 1. Екі ақырсыз аз функцияның әрқайсысын немесе біреуін оған эквивалент ақырсыз аз функциямен алмастырғаннан олардың қатынасының шегі өзгермейді.

Теорема 2. Екі ақырсыз аз функцияның эквивалентті айырмасы олардың әрқайсысы қарағанда жоғары ретті ақырсыз аз функция болады.

Теорема 3. Әртүрлі ретті саны ақырлы ақырсыз аз функцияның қосындысы төменгі ретті қосылғышқа эквивалент.

Теорема 4. (Вейерштрасс). Егер функция кесіндіде үзіліссіз болса, онда сол кесіндіде функция ең үлкен және ең кіші мәнге ие.

Берілген функциясы үшін әрбір мәніне бір ғана мәні сәйкес келетін болсын. Сонда әрбір мәніне теңдігі орындалатындай бір ғана мәні сәйкес келетін кері сәйкестік анықталады. Осылайша функциясына **кері функция** *деп* аталатын және арқылы белгіленетін функциясы алынады.

Кері функция

Анықталу облысы D, мәндер жиыны E болатын $y = f(x)$ функциясы берілсін. Егер $y \in E$ мәніне $x \in D$ жалғыз мәні сәйкес келсе анықталу облысы E, мәндер жиыны D болатын $x = \varphi(y)$ функциясы анықталған. Осылай анықталған $\varphi(y)$ функциясы $f(x)$ функциясына кері деп аталып, $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ түрінде жазылады. $y = f(x)$ және $x = \varphi(y)$ түріндегі функцияларды өзара кері деп аталады. $y = f(x)$ функциясына кері $x = \varphi(y)$ функциясын табу үшін х-ке қатысты $f(x) = y$ теңдеуін шешу жеткілікті болады (егер мүмкін болса).

Кері функция анықтамасы бойынша, $f(x)$ функциясының кері функциясы болады, сонда тек қана сонда егер $f(x)$ функциясы D және E жиындарының арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатса. Осыдан әрбір **қатаң монотонды функцияның кері функциясы** болатының шығады. Егер функция өссе (кемісе), кері функция да өседі (кемиді).

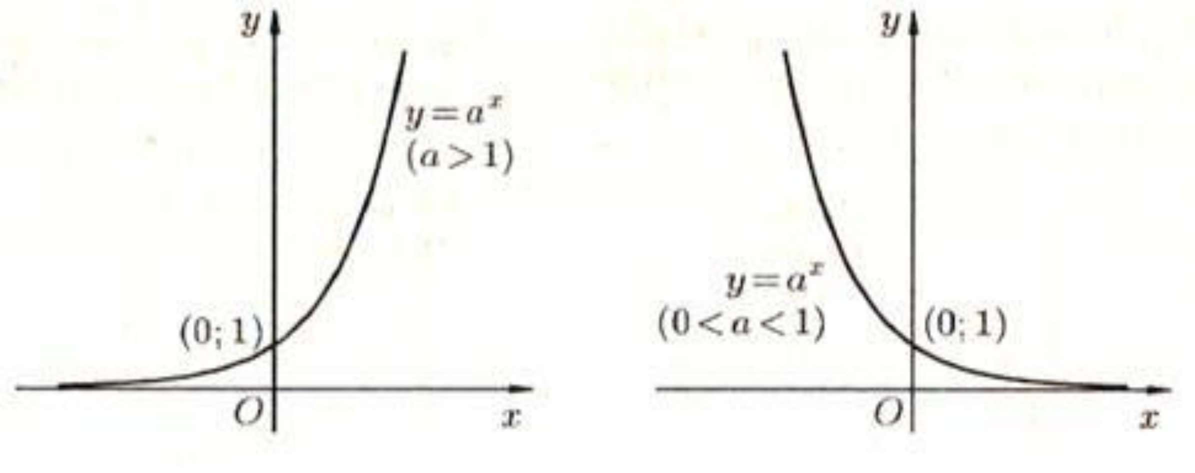
Күрделі функция

$y = f(u)$ функциясы D жиынында $u = \varphi(x)$ функциясы D_1 жиынында анықталсын. Сонымен қатар, $\forall x \in D_1$ үшін сәйкес мән $u = \varphi(x) \in D$ болсын. Сонда D_1 жиынында анықталатын $u = f(\varphi(x))$ функциясы *x*-тан тәуелді күрделі функция (немесе берілген функциялардың суперпозициясы немесе функциялардан алынған функция) деп аталады. $u = \varphi(x)$ айнымалысын күрделі функцияның аралық аргументі деп аталады.

Негізгі элементар функциялар және олардың графиктері

Келесі функциялар негізгі элементар функциялар деп аталады:

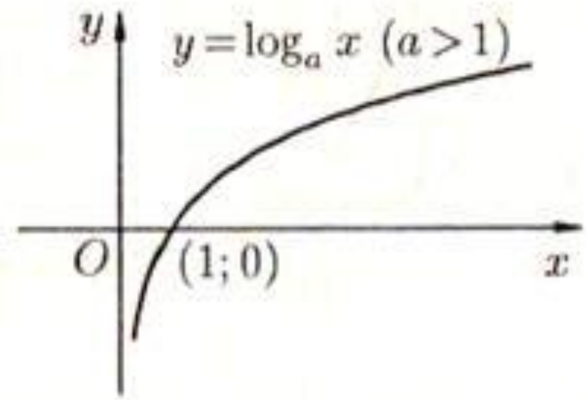
1) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ *көрсеткіштік* функциясы 10 суретте көрсеткіштік функциялар көрсетілген .

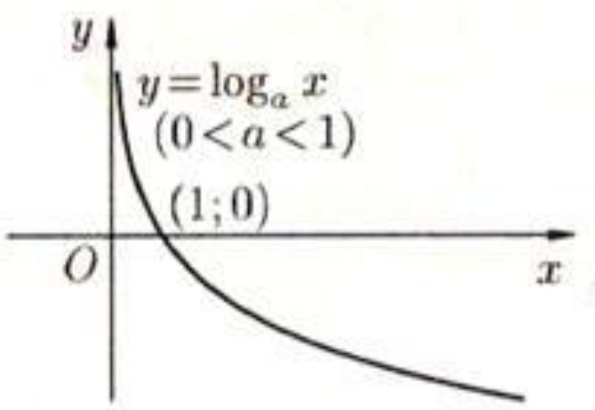


10 сурет - $y = a^x$ көрсеткіштік функция

2) $y = x^{\alpha},\ \alpha \in R$ *дәрежелік* функциясы

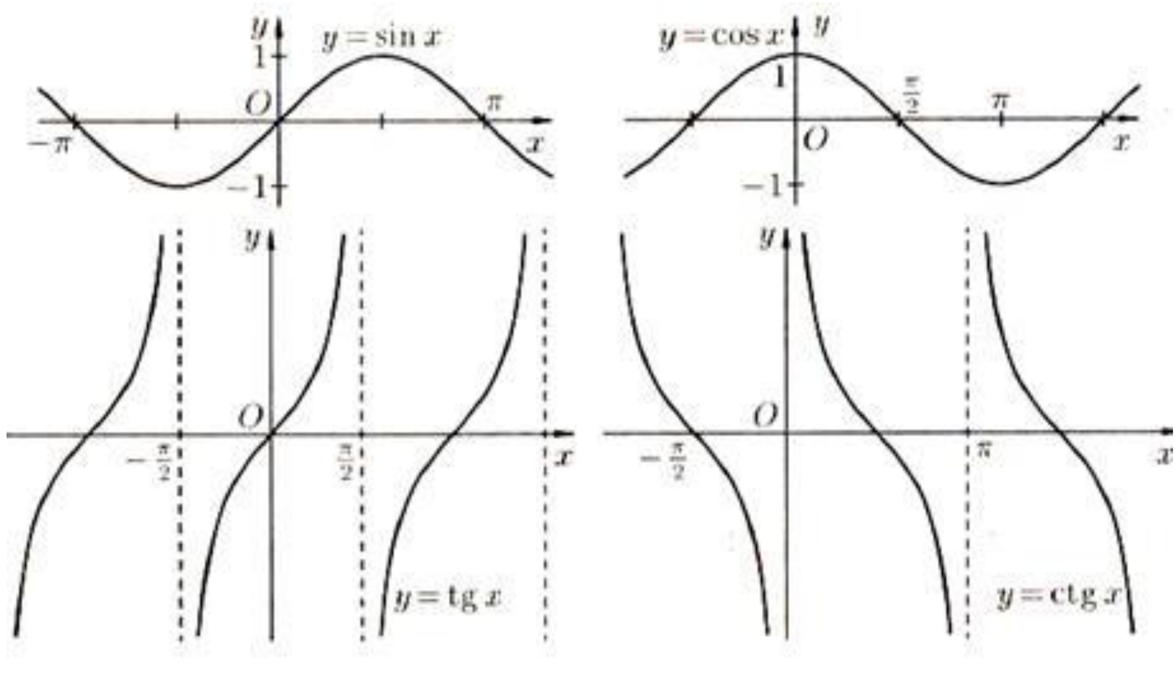
3) $y = \log_a x, a > 0,\ a \neq 1$ *логарифмдік* функциясы (11 сурет)





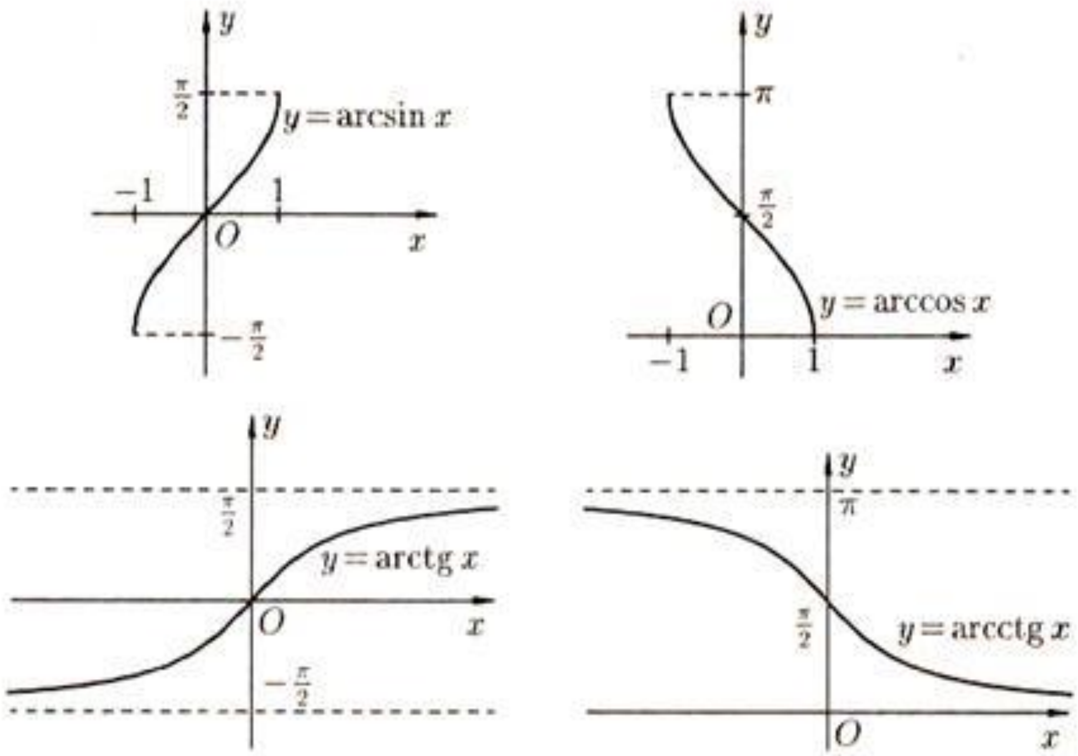
11 сурет - $y = \log_a x, a > 0,\ a \neq 1$ логарифмдік функция

4) $y = \sin\ x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$ *тригонометриялық* функциялары. Тригонометриялық функциялар графиктер түрлері 12 суретте көрсетілген.



12 сурет - $y = \sin\ x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$ тригонометриялық функциялары

5) $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$ *кері тригонометриялық* функциялары 13 суретте көрсетілген.



13 сурет - $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$
кері тригонометриялық функциялары

Есеп шығару үлгілері

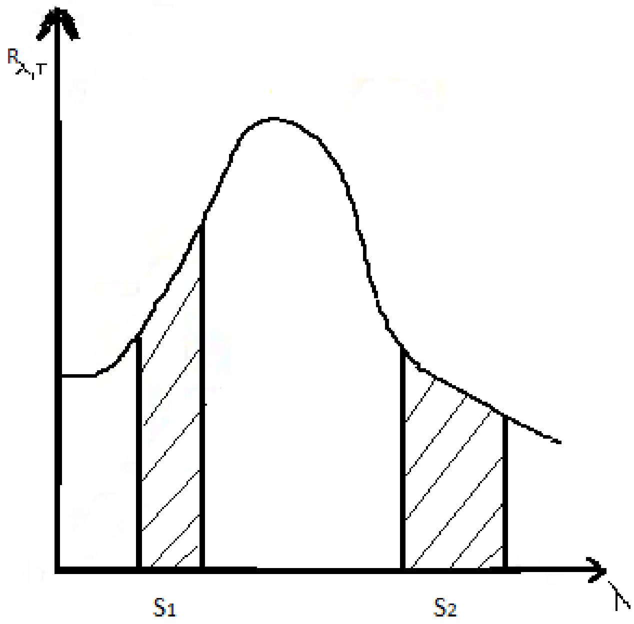
1 есеп. Абсолют қара дененің сәуле шығаруының энергия бөлінуін сипаттайтын графикте (14-сурет), аудандары бірдей екі бөлік көрсетілген. Сәйкес толқын ұзындықтарының интервалына келетін сәуле шығарудың қуыты және шыққан кванттардың сандары бірдей ме?

Шешуі:

Толқын ұзындығының белгілі интервалына сәйкес келетін шыққан сәуленің қуаты

$$\Delta R_T = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R_{\lambda,T} d\lambda$$

Себебі, графикте интеграл ординаталары шеткі мәндермен шектелген қисық астындағы ауданмен өлшенеді, сондықтан екі толқын интервалындағы қуат бірдей. Үлкен толқын ұзындығына аз квант энергиясы сәйкес келеді.



14 сурет – Абсолют қара дененің сәуле шығаруының энергия бөлінуі

Олай болса қуат бірдей болғанда, энергия аз кванттардың саны (яғни, S_2 ауданға келетін) көптеу.

2 есеп. Абсолют қара дененің сәуле шығару энергиясының көлемдік тығыздығын кванттар саны бөлінуінің квант энергиясына тәуелділік функциясы ретінде көрсетіңіздер

Шешуі:

v –ден v+dv жиілік интервалына келетін абсолют қара дененің сәуле шығару энергиясының көлемдік тығыздығы планк формуласымен табылады:

$$du = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Осы интервалдағы әрбір кванттың энергиясы $h\nu$. Олай болса квант энергиясы бойынша квант сандарының бөліну функциясы

$$\frac{dn}{dh\nu} = \frac{8\pi (h\nu)^2}{c^2 h^3} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} \cdot d\nu \,, \qquad (52)$$

$\alpha = \frac{h\nu}{kT}$ өлшемсіз шаманы енгізсек, (52) теңдеуді төмендегіше жазуға болады:

$$n = \frac{dn}{d\alpha} = \frac{8\pi k^3}{c^3 h^3} T^3 \cdot \frac{1}{e^\alpha - 1} d\nu \quad , \tag{53}$$

Кванттың жалпы «концентрациясын» табу үшін (53) теңдеуді ν бойынша нөлден шексіздікке дейін интегралдаймыз:

$$n = \frac{8\pi k^3}{c^3 h^3} T^3 \cdot \int_0^\infty \frac{\alpha^2 d\nu}{e^a - 1}, \tag{54}$$

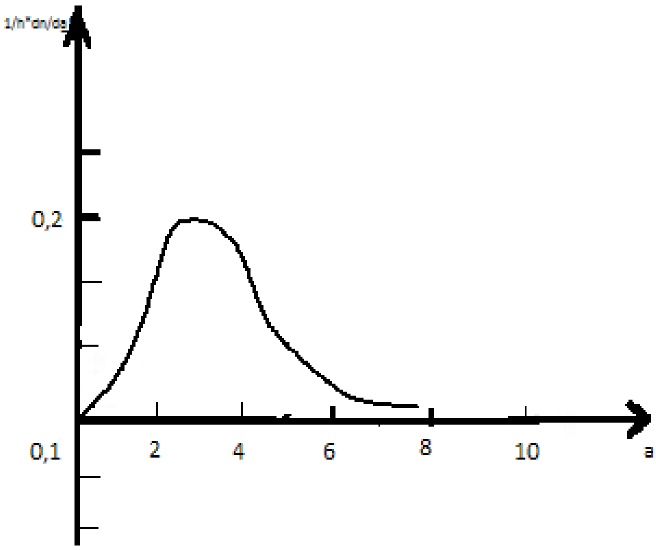
(54) теңдеуге кіретін интегралды кестелік функциямен шектеуге болады:

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^2}{e^a - 1} = 2{,}404$$

Сонымен

$$n = \frac{8 \cdot 2{,}404 \cdot \pi k^3}{c^3 h^3} = 2{,}028 \cdot 10^7 \cdot T^3$$

Салыстырмалы бірлікпен өрнектелген кванттардың энергия бойынша бөліну функциясы $\frac{1}{h}\frac{dn}{da}$ суретте (15 сурет) көрсетілген.



15 сурет – Квант энергия $\frac{1}{h}\frac{dn}{da}$ функциясына бөлінген

Абсолют қара дененің шығарған сәуле энергиясының жалпы тығыздығы

$$u = \frac{4\sigma}{c} T^4 = 7{,}57 \cdot 10^{-16} \cdot T^4$$

мұнда

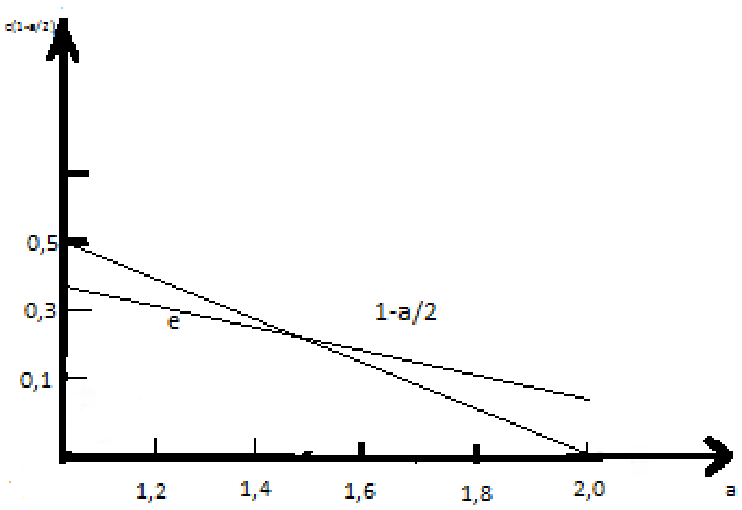
σ - Стефан-Больцман тұрақтысы.

Жалпы кванттардың санын (3) бойынша біле отырып, кванттың орташа энергиясын анықтауға болады:

$$h\nu_{op} = \frac{7{,}57}{2{,}028} \cdot 10^{-23} \cdot T = 3{,}73 \cdot 10^{-23} \cdot T = 2{,}70kT$$

Бөліну функциясы (2) «ең ықтимал» кванттың энергиясын, яғни энергиясы максимум бөліну функциясына сәйкес келетін кванттың энергиясын анықтауға мүмкіндік береді. Ол үшін $\frac{dn}{da}$ туындысын нөлге теңістіруге керек.

Бұдан трансценденттік теңдеу шығады: $(2-\alpha)e^{\alpha} = 2$, оның жуықталған графикалық шешуі (16 сурет) $\alpha = 1{,}6$ береді.



16 сурет – Теңдеу графигі

Дәлірек мәні $\alpha = 1{,}594kT$.

Олай болса

$$h\nu_{ЫI} = 1{,}594kT$$

6 тақырып Функция дифференциалы және туындысы

6.1 Функция дифференциалдары ұғымы

$y = f(x)$ функциясының x нүктесінде нөлден өзгеше туындысы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$ бар болсын. Сонда, функция оның шегі мен ақырсыз аз функция арасындағы байланыс туралы теорема бойынша $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\Delta x \to 0$ болғанда $a \to 0$ деп немесе $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ деп жаза аламыз. $f'(x) \cdot \Delta x$ бірінші қосылғышын Δy функция өсімшесінің бас бөлігі деп атайды. $y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі дифференциалы деп функция туындысы мен аргумент өсімшесінің көбейтіндісіне тең функция өсімшесінің бас бөлігі аталады және dy (немесе $df(x)$) арқылы белгіленеді.[5]

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

dy дифференциалын **бірінші ретті дифференциал** деп те атайды. Тәуелсіз x айнымалысының дифференциалын, яғни $y = x$ функциясының дифференциалын табайық. $y' = x' = 1$ болғандықтан, (55) формуласы бойынша $dy = dx = \Delta x$ болатындығын аламыз, яғни тәуелсіз айнымалының дифференциалы осы айнымалының өсімшесіне тең: $dx = \Delta x$.

Сондықтан да формуласын мына түрде жазуға болады:

$$dy = f'(x)dx, \qquad (55)$$

Басқаша айтқанда, функция дифференциалы осы функцияның туындысы мен тәуелсіз айнымалының дифференциалының көбейтіндісіне тең.

Функция дифференциалының геометриялық мағынасы

Дифференциалдың геометриялық мағынасын анықтайық. Ол үшін $y = f(x)$ функциясының графигіне $M(x, y)$ нүктесінде MT жанамасын жүргізіп, $x + \Delta x$ нүктесі үшін жанаманың ординатасын қарастырайық.

$y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі дифференциалы x-ке Δx өсімшесін бергендегі функция графигі сол нүктеде жүргізілген жанаманың ординатасының өсімшесіне тең.

Бұл дифференциалдың геометриялық мағынасы.

Дифференциалдар туралы негізгі теоремалар

Функция дифференциалы мен туындысы арасындағы байланысты ($dy = f'(x)dx$) туындылар туралы сәйкес теоремаларды қолданамыз.

Мысалы, $y = c$ функциясының туындысы нөлге тең болғандықтан, тұрақты шаманың дифференциалы нөлге тең: $dy = c' \cdot dx = 0 \cdot dx = 0$.

Теорема 1. Екі дифференциалданатын функциялардың қосындысының, көбейтіндісінің, бөліндісінің дифференциалы келесі формулалары арқылы анықталады:

$$d(u+v) = du + dv,$$

$$d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}(v \neq 0).$$

Теорема 2. Күрделі функцияның дифференциалы осы функцияның аралықтағы аргументінің туындысы мен аргументтің дифференциалдарының көбейтіндісіне тең.

Жуықтап есептеуде дифференциалды қолдану

$y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі Δy өсімшесін $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, мұндағы $\Delta x \to 0$ болғанда $a \to 0$ түрінде немесе $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$ түрінде көрсетуге болады. $\alpha \cdot \Delta x$ Δx-ке қарағанда жоғары ретті ақырсыз аз функцияны алып тастап, $\Delta y \approx dy$ жуық мәнін аламыз. Сонымен қатар, Δx кіші болған сайын теңдік нақтылана түседі.

Бұл теңдік кез-келген дифференциалданатын функцияның өсімшесін үлкен дәлдікпен жуықтап есептеуге мүмкіндік береді.

6.2 Жоғары ретті дифференциалдар

$y = f(x)$ дифференциалданатын функция, ал функцияны тәуелсіз айнымалы болсын. Онда оның бірінші дифференциалы $dy = f'(x)dx$ та x функциясы болып табылады, осы функцияның дифференциалын табуға болады. $y = f(x)$ функциясының дифференциалынан алынған дифференциал екінші дифференциал (немесе екінші ретті диффереинал) деп аталып, d^2y немесе $d^2 f(x)$ арқылы белгіленеді.

Сонымен, анықтама бойынша, $d^2y = d(dy)$. $y = f(x)$ функциясының екінші дифференциалының өрнегін табайық. $dx = \Delta x$, x- тәуелсіз болғандықтан, дифференциалдау барысында dy - тұрақты деп есептейміз:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' \cdot dx = f''(x) \cdot dx \cdot dx = f''(x) \cdot (dx)^2$$

$$d^2y = f''(x) \cdot (dx)^2$$

Мұнда $d^2x = (dx)^2$-ты білдіреді.

6.3 Дифференциалданатын функциялар туралы теоремалар

Теориялық және қолданбалы мәні бар бір қатар теоремаларды қарастырайық.

Теорема 1. (Ролль). Егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын болса және кесінді ұштарында бірдей $f(a)=f(b)$ мәнін қабылдаса, онда $f'(x)$ туындысы нөлге айналатын, яғни $f'(c)=0$ болатын ең болмағанда бір $c\in(a;b)$ нүктесі табылады.

$f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан, ол осы кесіндіде ең үлкен M және ең кіші m мәндерін қабылдайды. Егер $M=m$ болса, онда $f(x)$ [a,b] да тұрақты болғаны және сәйкесінше, оның туындысы $[a;b]$ кесіндісінің кез-келген нүктесінде $f'(x)=0$. Егер $M\neq m$ болса, онда $f(a)=f(b)$ болғандықтан, функция (a,b) интервалының c ішкі нүктесінде M, не m мәндерін біреуін қабылдайды.

Ролль теоремасының геометриялық мағынасы мынада: $f(x)$ функциясының графигінің бойынан график жүргізілген жанама Ox осіне параллель болатындай нүкте табылады.

Теорема 2. (Коши). Егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары [a, b] кесіндісінде үзіліссіз, (a,b) интервалында дифференциалданатын болса, және үшін $\varphi'(x)\neq 0$ болса, онда

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

теңдігі орындалатындай ең болмағанда бір $c\in(a;b)$ нүктесі табылады.

Теорема 3. (Лагранж). Егер $f(x)$ функциясы [a,b] кесіндісінде

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Лопиталь ережесі. Туындының қолданумен негізделген $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашу әдісін қарастырайық.

Теорема 4. ($\frac{0}{0}$ белгісіз түрінде берілгендегі есептеудің Лопиталь ережесі). $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінің маңайында үзіліссіз, дифференциалданатын болсын және осы нүктеде нөлге айналсын: $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$. x_0 нүктесінің маңайында $\varphi'(x)\neq 0$ болсын.

Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=1$ шегі бар болса, онда $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=1$.

Теорема 5. ($\frac{\infty}{\infty}$ белгісіз түрінде берілгендегі есептеудің Лопиталь ережесі). $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінің (x_0-дің өзінде де болуы мүмкін) маңайында үзіліссіз және дифференциалданатын болсын.

Бұл маңайда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, $\varphi'(x) \neq 0$.

Егер $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ шегі бар болса, онда $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ болады. [8]

Әртүрлі болған жағдайдағы белгісіздерді есептеу

Лопиталь ережесі $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі негізгі деп аталатын анықталмағандықтарды шешуде қолданылады. $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} түріндегі анықталмағандықтарды тепе-тең түрлендірулер арқылы негізгі екі түрге келтіріледі.

1. $x \to x_0$ болғанда $f(x) \to 0$, $\varphi(x) \to \infty$ болсын. Сонда келесі түрлендірулер орынды:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\varphi(x) = [0,\infty] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

2. $x \to x_0$ болғанда $f(x) \to \infty$, $\varphi(x) \to \infty$ болсын. Онда былай жазуға болады:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - \varphi(x) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

3. $x \to x_0$ болғанда не $f(x) \to 1$ және $\varphi(x) \to \infty$, не $f(x) \to \infty$ және $\varphi(x) \to 0$, не $f(x) \to 0$ және $\varphi(x) \to 0$ болсын. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ түріндегі шекті табу үшін $A = f(x)^{\varphi(x)}$ өрнегін, алдымен, логарифмдеу ыңғайлы.

Есеп шығару үлгілері

1 есеп. Материалдық нүкте $S = t^4 - 3t^2 + 2t - 4$ заңымен қозғалады. Нүкте қозғалысының t=2с сәтіндегі жылдамдығын табу керек.

Шешуі:

S туындыны аламыз:

$$V = (S)' = \left(t^4 - 3t^2 + 2t - 4\right)'$$

$$V = 4 \cdot t^{4-1} - 3 \cdot 2 \cdot t^{2-1} + 2 = 4 \cdot t^3 - 6 \cdot t + 2$$

уақыт t орнына қоямыз

$$V = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 2 = 22 \text{ (м/с)}$$

2 есеп. Материалдық нүкте $S = 3t^4 - t^3 + 4t^2 + 6$ заңымен қозғалады. Нүкте қозғалысының t=2с сәтіндегі жылдамдығын және үдеуін табу керек.

Шешуі:

S туындыны аламыз:

$$V = (S)' = (3t^4 - t^3 + 4t^2 + 6)'$$

$$V = 3 \cdot 4 \cdot t^{4-1} - 3 \cdot t^{3-1} + 4 \cdot t^{2-1} + 6 = 12 \cdot t^3 - 3 \cdot t^2 + 4 \cdot t$$

Уақыт t орынына қоямыз:

$$V = 12 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 92 \text{ (м/с)}$$

$$a = (V)' = 12 \cdot t^3 - 3 \cdot t^2 + 4 \cdot t$$

$$a = 12 \cdot 3 \cdot t^{3-1} - 3 \cdot 2 \cdot t^{2-1} + 4 = 36 \cdot t^2 - 6 \cdot t$$

Уақыт t орынына қоямыз:

$$a = 36 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 132 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

3 есеп. Егер салмағы 2 кг болатын бөлшек x = A t - Bt + Ct^2 + Dt^3 заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда A = 1 м, B = 2 м / с, C = 1 м / $с^2$, D = 1 м / $с^3$, онда бөлшектердің жылдамдығы модулі 1 секундта қозғалыс тең болады. Осы бөлшектің кинетикалық энергиясын табыңыз.

Шешуі:

Кинетикалық энергия формуланы жазамыз

$$E_к = \frac{m \cdot V^2}{2}$$

Туындысы аламыз

$$V = (x)' = (A \cdot t - B \cdot t + C \cdot t^2 + D \cdot t^3)'$$

$$V = A - B + 2 \cdot C \cdot t^{2-1} + 3 \cdot D \cdot t^{3-1} =$$

$$= A - B + 2Ct + 3Dt^2$$

уақыт t және A, B, C, D қойямыз

$$V = 1 - 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 = 4 \text{ (м/с)}$$

Кинетикалық энергия табамыз:

$$E_к = \frac{2 \cdot 4^2}{2} = 16 \text{ (Дж)}$$

4 есеп. Материалдық нүктенің ось бойынша қозғалыс теңдеу мына түрде берілген $x = A + Bt + Ct^3$, мұндағы A = 2 м, B = 1 м/с, C = –0,5 м/с^3. 2 с уақыт үшін координатасын, үдеуін, жылдамдығын табу керек.

Шешуі:

Координата x, теңдеуге белгілі коэффициенттерді қоя отырып табамыз:

$$x = (2 + 1 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2^3) \text{ м} = 0.$$

Лездік жылдамдық дегеніміз уақыт бойынша алынған бірінші ретті

$$v = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Уақыт t = 2 с:

$$v = 1 - 3 \cdot 0{,}5 \cdot 2^2 = -5 \text{ м/с}.$$

Үдеуді жылдамдықтан уақыт бойынша екінші ретті туындысы:

$$a = \frac{dv}{dt} = 6Ct.$$

t=2 с уақыт

$$a = 6(-0{,}5) \cdot 2 \text{ м/с}^2 = -6 \text{ м/с}^2.$$

5 есеп. Дене қозғалмайтын ось қатысты заң бойынша айналады $\varphi = A+Bt+Ct^2$, мұндағы A = 10 рад, B = 20 рад/с, C = –2 рад/с^2. 0,1 м қашықтықта орналасқан осьтен нүктенің толық үдеуін t=4 с уақыт үшін табу керек

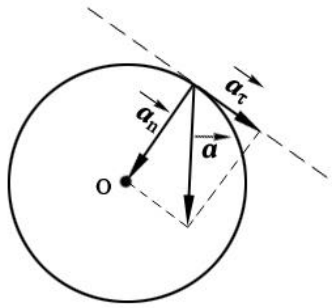
Шешуі:

Қисық сызық бойынша нүктенің $\vec{a}$ толық үдеуін табу, тангенциал $\vec{a}_\tau$, және нормаль $\vec{a}_n$, үдеулердің геометриялық қосындысы болып табылады (17 сурет):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Векторлар $\vec{a}_\tau$ және $\vec{a}_n$ өзара перпендикуляр болғандықтан, оның абсолютті мәні неге тең

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$



17 сурет – Векторлар $\vec{a}_\tau$ және $\vec{a}_n$

Айналмалы қозғалыстағы дененің тангенциал және нормаль үдеулерін мына формулаларымен өрнектеледі

$$a_\tau = \varepsilon r, \; a_n = \omega^2 r,$$

мұндағы

ω — дененің толық үдеуі;

ε — оның бұрыштық үдеуі.

$\vec{a}_\tau$ және $\vec{a}_n$ формулаға, өрнектерді қоя отырып табамыз:

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Бұрыштық жылдамдықты ω табамыз, ол үшін айналу бұрышының уақыт бойынша туындысын аламыз:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct$$

t=4 с уақыт мезет үшін бұрыштық жылдамдық

$$\omega = [20 + 2(-2)4] \text{ рад/с} = 4 \text{ рад/с}.$$

Бұрыштық үдеуді, уақыт бойынша бірінші ретті туындысын ала отырып табамыз:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C = -4 \text{ рад/с}^2.$$

Табылған мәндерді қойған соң ϖ және ε және берілген r шамасын формулаға қойған соң табамыз:

$$a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} = 1{,}65 \text{м/с}^2.$$

7 тақырып Жоғарғы ретті туындылар мен дифференциалдар

7.1 Жоғарғы ретті туындыларын анықтау

Айталық, $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде және оның маңайында анықталған болсын.

Анықтама. Аргумент x-тің x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta x = x - x_0$ айырмасын атайды.

Анықтама. $y = f(x)$ функцияның x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ айырмасын айтады.

Анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталған және $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ болса, онда ол x_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

Шындығында да $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы деп ақырлы шегін айтады.

Бұл туынды мына символдардың бірімен белгіленеді:

$$y'(x_0) \cdot \frac{df}{dx}(x_0), \quad y'\Big| x - x_0, \frac{df}{dx}\Big|_{x - x_0} \cdot f''(x_0).$$

Егер $y = f(x)$ функциясының (a, b) интервалының әрбір нүктесінде туындысы болса, онда оны осы интервалда дифференциалданады дейді. Туындыны табу амалын дифференциалдау дейді.

Теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын функция болса, онда ол бұл нүктеде үзіліссіз болады.

Ескерту: теорема керісінше дұрыс емес.

Туындының геометриялық мағанасы. Туындының геометриялық мағынасы: $y' = f(x_0)$ туындысы $y = f(x)$ функциясының графигіне $(x_0, f(x_0))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті болады. Осы жанаманың теңдеуін былай жазады:

$$y = f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Туындының механикалық мағынасы. Егер x- айнымалысын уақыт деп есептеп, $y = f(x)$- функциясы дененің жүрген жолын сипаттаса, онда $f'(x)$ дененің x- уақытындағы жылдамдығын білдіреді. [1]

Дифференциалдаудың негізгі ережелері. Туындының анықтамасын пайдаланып, кейбір элементар (қарапайым) функциялардың туындыларын есептейді.

Теорема 1. (қосындыны, көбейтіндіні және қатынасты дифференциалдау ережелері).

Егер $y = u(x)$ және $y = v(x)$ дифференцианалданатын болса, онда бұл функциялардың қосындысы, көбейтіндісі және қатынасы да (қатынастың бөлімі $v(x) \neq 0$) осы нүктеде дифференцианалданады және мына формулалар орынды:

Негізгі элементар функциялар туындыларының ескерту керек.

7.2 Жоғарғы ретті туындылар мен дифференциалдар теоремалар мен анықтамалар

$y' = f'(x)$ берілген $y = f(x)$ функциясының бірінші немесе бірінші ретті туындысы, ал функцияның өзі нөлінші ретті туынды деп аталады.

Анықтама. Функцияның k–ші ретті туындысы деп оның $(k\text{-}1)$-ші туындысының туындысын айтады $f^{(k)}(x) = (f^{k-1}(x))'$, $k = 1,2,3,\ldots,$ егер олар бар болса, онда $f(x)$ функциясы k-рет дифференциалданатын функция деп аталады.

Анықтама. Функцияның k–ші дифференциалы деп оның $(k\text{-}1)$–ші ретті дифференциалының дифференциалын айтады: $(d^k f = d(d^{k-1} f)$.

Есеп шығару үлгілері

1 есеп. Массасы 10 г материалдық нүкте $x = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{5} + \frac{\pi}{4}\right)$ см теңдеу бойынша тербеледі. Нүктеге әсер ететін жылдамдық және тербелетін нүктенің т үдеу табу керек.

Шешуі:

Массасы нүктенің әсерінен гармониялық гармониялық тербеліс жасайтын күш мынаған тең:

$$F = m \cdot a$$

$$x = A\sin(\frac{2\pi t}{T} + \varphi) = A\sin(2\pi\nu t + \varphi)$$

жылдамдық формуласы

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi A}{T}\cos(2\pi\frac{t}{T} + \varphi)$$

үдеу формуласы

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 A}{T^2}\sin(2\pi\frac{t}{T} + \varphi)$$

2 есеп. Электр өрісі сызықтық тығыздығы 20 нКл/м біртекті зарядталған ұзын цилиндмен туғызылған. 0,5 см және 2 см ара қашықтықта цилиндр бетінен орналасқан екі нүкте арасындағы потенциал айырымын оның ортақ бөлігінде анықтау керек. Цилиндр радиусы 1 см.

Шешуі:

Потенциал айырымын анықтау үшін өріс кернеулігімен потенциал өзгеріс арасындағы формуламен анықталады:

$$E = -grad\varphi$$

Осьті симметрия өрісі үшін, ондай қріс болып цилиндр өрісі болады, бұл сәйкестікті мына түрде жазуға болады

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}, \text{ онда } d\varphi = -Edr$$

Бұл теңдеуді интегралдау соңынан, цилиндр осінен r_1 және r_2 қашықтықта орналасқан екі нүкте үшін потенциал айырымын табамыз:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} Edr$$

Цилиндр шексіз ұзын болғандықтан және нүктелер оның ортасында болып алынғандықтан, өріс кернеулігінің өрнегі үшін шексіз ұзын цилиндр өрісінің кернеулігі үшін формуланы аламыз:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Алдыңғы формуласына Е үшін өрнекті қойған соң

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

немесе $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$

Осы түрде шығарылған теңдеулердің жалпы түрлері, кез келген цилиндр тәрізді өткізгіштер үшін орын табады.

Есептеулерді

$$r_1 = R + a_1, \qquad r_2 = R + a_2$$

ескере отырып, шығарамыз

Есептеулерді жасаймыз:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\cdot 10^{-8}\cdot 1{,}8\cdot 10^{10}\ln\frac{3}{1{,}5} = 250 \text{ В.}$$

3 есеп. Электр өрісінде 10^6 м/с жылдамдыққа ие болған электрон оның жылдамдығы 2 есе арту үшін өте алатын үдетуші потенциал айырымын табу керек.

Шешуі:

Үдетуші потенциал айырымын электр өрісі A жұмысын есептеп алған соң табуға болады. Бұл жұмыс элементар зарядтың e потенциал айырымына $\Delta\varphi$ көбейтіндісімен анықталады:

$$A = e\Delta\varphi$$

Берілген жағдайда электростатикалық өріс күштер жұмысы электронның кинетикалық энергия өзгерісіне тең болады:

$$A = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}$$

Осыған кіретін m – электромасса, белгілі; V_1. V_2 - электронның бастапқы және соңғы жылдамдықтары.

Теңдіктің оң жақтарын теңестіріп, аламыз

$$e\Delta\varphi = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV_1^2 n^2}{2} - \frac{mV_1^2 n_1}{2}$$

Осыдан ізделіп тұрған потенциал айырымы тең болады

$$\Delta\varphi = \frac{mV_1^2(n^2-1)}{2e}$$

Есептеулерді жасаймыз:

$$\Delta\varphi = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot (10^6)_1^2}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}(2^2-1) = 8{,}53 \text{ В.}$$

Шыққан сан мәні бойынша электронды үдетуші потенциал айырымы 8,53 В тең екендігі дәлелденді.

4 есеп. Адиабаттық ұлғайып азот 480 Дж жұмыс істейді. Ұлғайғанға дейінгі газдың температурасы T_1=362 К болса, газдың соңғы температурасын табыңыздар. Азоттың массасы m=12 кг, жылу сыйымдылығын тұрақты деп алыңыздар.

Шешуі:

Адиабаттық ұлғайғандағы істелетін жұмыс:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{C}{V^\gamma} dV = C\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma},$$

$PV^\gamma = const$ болғандықтан

$$A = \frac{1}{\gamma - 1}\left(V_1^{\gamma-1} \cdot C - V_2^{\gamma-1} \cdot C\right) = \frac{1}{\gamma - 1}\left(P_1V_1 - P_2V_2\right)$$

$$P_1V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \qquad P_2V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$$

ескерсек $A = \frac{m}{\mu} R \frac{1}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)$

бұдан $T_2 = T_1 - A\frac{m}{\mu}\frac{(\gamma - 1)}{R}$

$$362 - 480\frac{28}{12}\frac{(1{,}3 - 1)}{8{,}31} \approx 322K$$

8 тақырып Дифференциалдана алатын функциялар туралы негізгі теоремалары

8.1 Ролль, Лагранж және Коши теоремалары

Теорема 1. (Ролль). Егер $f(x)$ функциясы [a, b] кесіндісінде үзіліссіз, (a, b) интервалында дифференциалданатын болса және кесінді ұштарында бірдей $f(a)=f(b)$ мәнін қабылдаса, онда $f'(x)$ туындысы нөлге айналатын, яғни $f'(c)=0$ болатын ең болмағанда бір $c\in(a;b)$ нүктесі табылады.

$f(x)$ функциясы [a; b] кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан, ол осы кесіндіде ең үлкен M және ең кіші m мәндерін қабылдайды. Егер $M=m$ болса, онда $f(x)$ [a, b] - да тұрақты болғаны және сәйкесінше, оның туындысы [a; b] кесіндісінің кез-келген нүктесінде $f'(x)=0$. Егер $M\neq m$ болса, онда $f(a)=f(b)$ болғандықтан, функция (a, b) интервалының c ішкі нүктесінде M, не m мәндерін біреуін қабылдайды.

Ролль теоремасының геометриялық мағынасы мынада: $y=f(x)$ функциясының графигінің бойынан график жүргізілген жанама Ox осіне параллель болатындай нүкте табылады.

Теорема 2. (Коши). Егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары [a, b] кесіндісінде үзіліссіз, (a, b) интервалында дифференциалданатын болса, және $x\in(a;b)$ үшін $\varphi'(x)\neq 0$ болса, онда

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

теңдігі орындалатындай ең болмағанда бір $c\in(a;b)$ нүктесі табылады.

Теорема 3. (Лагранж). Егер $f(x)$ функциясы [a; b] кесіндісінде үзіліссіз, ал (a; b) интервалында дифференциалданатын болса, онда

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Лопиталь ережесі

Туындының қолданумен негізделген $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашу әдісін қарастырайық.

Теорема 4. ($\frac{0}{0}$ белгісіз түрінде берілгендегі есептеудің Лопиталь ережесі). $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінің маңайында үзіліссіз, дифференциалданатын болсын және осы нүктеде нөлге айналсын: $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$. x_0 нүктесінің маңайында $\varphi'(x)\neq 0$ болсын.

Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=1$ шегі бар болса, онда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=1$.

Теорема 5. ($\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$ белгісіз түрінде берілгендегі есептеудің Лопиталь ережесі) $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінің (x_0 - дің өзінде де болуы мүмкін) маңайында үзіліссіз және дифференциалданатын болсын. Бұл маңайда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$. Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ шегі бар болса, онда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ болады.

Әртүрлі болған жағдайдағы белгісіздерді есептеу

Лопиталь ережесі $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі негізгі деп аталатын анықталмағандықтарды шешуде қолданылады. $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0 түріндегі анықталмағандықтарды тепе-тең түрлендірулер арқылы негізгі екі түрге келтіріледі.

1. $x\to x_0$ болғанда $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to\infty$ болсын. Сонда келесі түрлендірулер орынды:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\varphi(x))=[0,\infty\}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right];$$

2. $x\to x_0$ болғанда $f(x)\to\infty$, $\varphi(x)\to\infty$ болсын. Онда былай жазуға болады:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-\varphi(x))=[\infty-\infty\}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)}\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

3. $x\to x_0$ болғанда не $f(x)\to 1$ және $\varphi(x)\to\infty$, не $f(x)\to\infty$ және $\varphi(x)\to 0$, не $f(x)\to 0$ және $\varphi(x)\to 0$ болсын. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ түріндегі шекті табу үшін

$$A=f(x)^{\varphi(x)}$$

Лагранж теоремасы

Егер *y=f(x)* функциясы:

1). [*a*; *b*] сегментінде аңықталған әрі үзіліссіз болса;

2). *f ' (x)* туындысы осы сегментте шектелген болса;

Онда мына теңдікті *(a; b)* интервалына тиісті кем дегенде бір *c* нүктесі бар болады:

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c) \quad c \in (a; b).$$

Коши теоремасы

Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары:

1). $[a; b]$ сегментінде анықталған әрі үзіліссіз болса;

2). $g'(x)$, $f'(x)$ туындылары осы сегментте шектелген болса;
3). $(g'(x))^2 + (f'(x))^2 \neq 0$, $x \in (a; b)$ үшін;
4). $g(a) \neq g(b)$;

Онда мына теңдікті қанағаттандыратың $(a; b)$ интервалына тиісті кем дегенде бір c нүктесі бар болады:

$$\frac{f(b) - f(a)}{q(a) - q(b)} = \frac{f'(c)}{q'(c)}, \quad c \in (a; b).$$

өрнегін, алдымен, логарифмдеу ыңғайлы.

Математикалық есептерді шығарыңыздар:

1 есеп. Берілген функцияларды дифференциалдау керек

1.1) $y = 9x^5 - \frac{4}{X^3} + \sqrt[3]{X^7} - 3x + 4$

1.2) $y = \sqrt[4]{(2x^2 - 3x + 1)^3} - \frac{6}{(x+1)^3}$

1.3) $y = \sqrt[6]{(10x^2 + 5x - 1)^4} + \frac{4}{(x-1)^4}$

2 есеп. Интегралды есептеу керек

2.1) $\int x^5 dx$

2.2) $\int \frac{7x dx}{3x^2 + 4}$

2.3) $\int x^9 dx$

2.4) $\int xe^{x}dx$

2.5) $\int x\ln xdx$

2.6) $\int x^{2}e^{x}dx$

2.7) $\int arctgxdx$

2.8) $\int x\sin xdx$

2.9) $\int x\ln xdx$

2.10) $\int \arcsin xdx$

2.11) $\int e^{5x}dx$

2.12) $\int \cos 5xdx$

2.13) $\int \sin axdx$

2.14) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

9 тақырып Вектор - функция және функцияның мінездемесін зерттеу

9.1 Вектор - функция

Анықтама 1. Егер әр бір $t\in T$, мұндағы Т кейбір сандар жиынтығы үш өшемді кеңістіктің $\vec{r}=\vec{r}(t)$ векторға сәйкес болып келетін болса, онда Т де вектор-функциясы анықталып немесе векторлық функция анықталатын деп айтуға болады.

Анықтама 2. Егер кеңістіктік облыстың бөлігінің (бұл облыс бүкіл кеңістікті түгел қамтуы мүмкін) әрбір нүктесіне вектор сәйкес келсе, онда оны векторлық өріс деп атайды.

Векторлық өріс $\overline{F}$ векторымен сипатталады.

$$\overline{F} = X(x,y,z)\overline{i} + Y(x,y,z,)\overline{j} + Z(x,y,z)\overline{k},$$

$$\overline{F}(P_i) = X(x_i,y_i,z_i)\overline{i} + Y(x_i,y_i,z_i)\overline{j} + Z(x_i,y_i,z_i)\overline{k}.$$

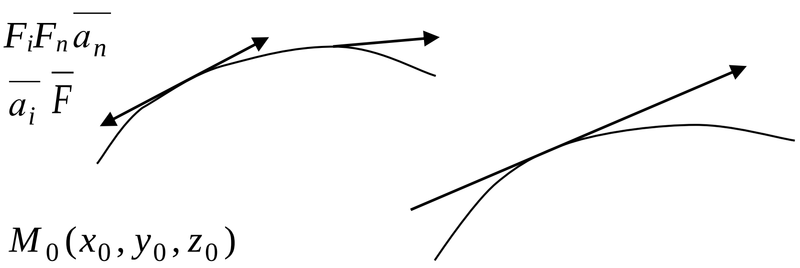
Егер *X,Y,Z* функциялары *t*-дан тәуелді болса, онда өріс стационар емес векторлық өріс деп аталады.

Егер *X,Y,Z* функциялары *t*-дан тәуелді болмаса, онда өріс стационар деп аталады.

Векторлық өріс жазық деп аталады, егер олардың координаталары *x,y* екі айнымалыларына тәуелді болса, яғни

$$\overline{F}_{жаз.} = X(x,y)\overline{i} + Y(x,y)\overline{j} + Z(x,y)\overline{k}.$$

Анықтама 3. Егер жазықтықтағы сызықтың әр нүктесіндегі вектор жанамамен беттесетін болса, онда ол жазықтықтағы векторлық сызықтар деп аталады (18 сурет).



18 сурет – Векторлық сызықтар

9.2 Функция монотондығының белгілері. Функцияның локалды экстремумы

Анықтама. функциясы (a,b) интервалында қатаң өсетін (кемитін) функция дейміз,егер үшін (немесе) орындалса.

Келесі теорема функцияның өсу және кемею аралықтарын оның туындысы арқылы табуға мүмкіндік береді.

Теорема. Айталық (a,b)-да дифференциалданушы болсын:

1. Егер (a,b) монотон өссе, онда,

2. Егер, онда f(x) (a,b)-да монотон өседі.

Осы сияқты теорема монотон кемитін функция үшін орынды. Демек, өсу немесе кемею интервалында функция туындысы таңбасын өзгертпейді
Мысал. Мына функцияның өсу және кемию аралықтарын тап:

$$y = x^3 – 3x^2 + 1.$$

Ол үшін функция туындысының таңбасының тұрақтылық интервалдарын анықтаймыз

Бұл квадрат үш мүшеліктің түбірлері $x_1=0$, $x_2=2$.

Сондықтан, егер , демек $y = x^3 – 3x^2 + 1$ функция бұл аралықта кемиді.

Егер , f′(x)>0, демек бұл аралықтарда функция өседі.

Енді функцияның экстремальдық нүктелерінің анықтамасын еске түсірейік.

Анықтама. Егер x_0 нүктесінде $f(x_0)$ үзіліссіз, ал y=f(x) функцияның туындысы нөлге тең немесе жоқ болса, онда нүкте функцияның күдікті нүктесі деп аталады.

Теорема (экстремумның қажеттілік шарты).

Айталық x_0 y=f(x) функцияның экстремальдық нүктесі болсын, онда x_0 бұл функцияның күдікті нүктесі болады.

Бірақ бұл функцияның экстремальдық нүктесі жоқ, себебі $y=x^3$ функция бүкіл сандар өсінде қатаң өспелі.

Теорема (экстремумнің жеткіліктілік шарты).

Айталық, y=f(x) функциясы x_0 күдікті нүктенің $U(x_0)$ төңірігінде үзіліссіз және $U(x_0)$ $\{x_0\}$-де дифференциалданушы болсын.

Онда

1) егер $U(x_0)$-де f ' (x)>0 x<x0болғанда, жәнеf '(x)<0 x>x0 болғанда, онда x_0 ¾ максимум нүктесі; </x;

2) егер U (x_0)-де f ' (x)<0 x<x_0 болғанда, және и f '(x)>0 x>x_0 болғанда, онда x_0 ¾ максимум нүктесі; </x;

3) егер U (x_0)-де f ' (x)>0 немесе f '(x)<0 x^1 x_0 болғанда, онда x_0 ¾ нүктеде экстремум жоқ.

Демек, функцияның экстремальдық нүктелерін анықтау үшін оның барлық күдікті нүктелерін табу керек және олардың араларындағы интервалдарда туындының таңбаларын анықтаймыз. Одан кейін жеткіліктілік шартты қолданып функцияның экстремумдарын табамыз. Егер туынды таңбасын «плюс»-тен «минус»-ке ауыстырса максимум, ал «минус»-тен «плюс»-ке ауыстырса минимум мән болады және функция таңбасы өзгермесе экстримум жоқ.

Теорема. Айтайық, y=f(x) функциясы x_0 нүкте төңірегінде дифференциалданатын және $f''(x_0)$ бар болсын. Онда егер $f''(x_0)>0$ онда x_0 - минимум нүкте, ал егер $f''(x_0)<0$, онда x_0 - максимум нүкте.

Математикалық есептерді шығарыңыздар:

1 есеп. Берілген векторлар.

1.1) $\vec{a}$=(1, 2, 3), $\vec{b}$=(4, 5, 6) векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

1.2) $\vec{a}$=(1, 4, 9), $\vec{b}$=(4, -1, 7) векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

1.3). $\vec{a}$=(-1, 5, 1), $\vec{b}$=(1, 2, 8) векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

1.4) $\vec{a}$=(2, 6, 9), $\vec{b}$=(2, 3, 5) векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

1.5) $\vec{a}$=(-1, 2, 1), $\vec{b}$=(4, 5, -5) векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

1.6) $\vec{a}$=(1, -2, -3), $\vec{b}$=(7, -5, 9) векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

2 есеп. Шектерді табу керек

2.1) $\lim\limits_{x\to -2} = \frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$

2.2) $\lim\limits_{x\to 4} = \frac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64}$

2.3) $\lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}$

2.4) $\lim\limits_{x\to-\infty} = \dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$

10 тақырып Анықтамалық интерграл

10.1 Анықталмаған интерал ұғымы

Қарастырайық. Мәселе: (x) функциясы F берілген туынды, (x) функциясын F табу талап етіледі онда F (X) тең, яғни. F (x)=F (X).

Анықтамасы: Функция F, егер барлық (x), (x) аралықта [a, b] функциясы F қарапайым деп аталады Осы сегменттің балл, теңдік F (x)=F (X).

Мысал. Функциясы F туралы antiderivative табу (x)=x_2.Iz қарабайыр анықтамасы мынадай (x_3/3) «x2=ретінде.

F (x) x_3/3=функциясы қарабайыр екенін

Бұл оңай бұл қарабайыр берілген функциясы F (X) бар болса, бұл көрген қарабайыр бір ғана емес. Осылайша, алдыңғы мысалда еді мынадай функцияларды примитивов ретінде алынады: немесе жалпы (C еркін, онда тұрақты), сондай-ақ, сондықтан. Екінші жағынан, түрі пайдаланылған Баршаға функцияларын дәлелдей алады функциясы x_2 туралы примитивы. Бұл келесі теоремалары.

Теорема. (X) F_1 және F_2 Егер (X) - аралықта функция F екі примитивы (x) [a, b], содан кейін Олардың арасындағы айырмашылық тұрақты санына тең болып табылады.

Дәлелдеу. Қарабайыр анықтау бойынша алған

$$F_1 (x)=F (X), F_2 (x) = F (x) \qquad (57)$$

кезде аралығында x кез келген мән [a, b].

болсын
$$F_1 (X) - F_2 (x)=\varphi (x). \qquad (58)$$

Содан кейін теңдеулер негізінде (1) $_{F'1}$ болып (x) - F'_2 (x)=F (X) - F (X) 0 немесе = φ (x)=[F'_1 (x) - F'_2 (X)] '≡0 кез келген аралығы [a, b] X мәні.

Бірақ теңдік φ (x)=0, бұл мынадай φ (x) тұрақты болып табылады. Шынында да, біз функциясына Лагранж теоремасын қолдануға φ (x), анық, аралығында үздіксіз және сараланатын болып табылатын [a, b]. Қандай да аралықта нүктесі x [a, б], біз Лагранж теоремасын бар φ (x) - φ (a)=(x-a) φ (Z), онда A LT; Z LT; сондай-ақ x.Так φ (a)=0, φ (x)=φ (a) - φ (Z) 0, φ (x) =. (3)

Сондықтан , Функция φ (x) аралығында кез келген x нүктесінде [a, б] мәні сақтайды φ (a), және ол функция φ (x) аралығында тұрақты екенін білдіреді [A, B].

Тұрақты φ тағайындау (a) C арқылы (2) және (3) аламыз F1 (X) - F2 (x)=C бастап Берілген функция F (X) табылған жағдайда, бұл теорема дәлелденді - қандай да бір antiderivative F F (x), содан кейін кез келген басқа antiderivative (X) бар F (x) + C=Const/C.

Анықтау 2. функциясы F (x), содан кейін өрнек F (x) + C, (x) F үшін қарабайыр болса (x) функциясы e . Анықталмаған интеграл деп аталды және ∫f (X) dx. белгіленеді мәнерде, анықтау бойынша, ∫ F (X) DX=F (x) + C, F, егер (x)=F (X). Жанында Бұл функция F (X) интеграл, F (X) dx- интеграл деп аталады өрнек, белгі ∫- ажырамас белгісі.

Сондықтан, анықталмаған интеграл (x) + y=F функцияларын отбасы C. бірге Көріністің геометриялық нүкте Анықталмаған интеграл жиынтығы болып табылады Қисық бірін ығысу арқылы алынған, олардың әрқайсысы (отбасылық) қисықтар, өзіне параллель жоғары немесе төмен, бұл е. болып табылады. y-осі.

Әрине сұрақ кез келген функциясын F (X) үшін, қарабайыр (және бар, ма туындайды демек,) анықталмаған интеграл? Ол әрбір екен. Ескерту Алайда, функция F (X) аралықта үздіксіз болса, дәлелі жоқ [A, B], содан кейін функцияны қарабайыр (және, демек, анықталмаған бар ажырамас).

Табу функциясы F үшін қарабайыр (x) функциясы интеграция F (x) деп аталады.

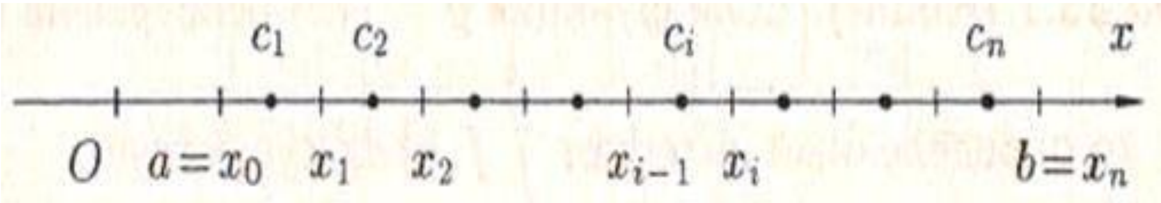
10.2 Айнымалы жоғарғы шегі анықталған интеграл

Анықталған интеграл интегралдық қосындының шегі ретінде

$y = f(x)$ функциясы [a; b] кесіндісінде анықталсын және $a < b$ болсын. Келесі амалдарды орындайық:

[a, b]

1. Кесіндісін $x_0 = a_1 x_1, x_2, ..., x_n = b$ $(x_0 \langle$ $(x_1 \langle . ... \langle x_n)$ нүктелер көмегімен n бөлікке $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, $[x_{n-1}; x_n]$ кесінділерге бөлейік (19 сурет);



19 сурет - [a, b] кесіндісі

2. Әрбір $[x_{i-1}; x_i]$, i=1,2,…n кесінді бөліктерінен кез-келген $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ нүктесін алып, функцияның мәнін есептейік, яғни $f(c_i)$ шамасын есептейміз;

3. Табылған функцияның $f(c_i)$ мәндерін сәйкес кесінді бөліктерінің $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ұзындығына көбейтеміз.

4. Барлық көбейтіндінің S_n қосындысын құрастырайық:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2 \_ \Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \qquad (59)$$

(59) түріндегі қосынды $y = f(x)$ функциясының $[a; b]$ кесіндісіндегі интегралдық қосынды деп аталады. Ең үлкен кесінді бөлігін λ арқылы белгілейміз: $\lambda = \max \Delta x_i (i = 1,2,..., n)$;

5. $n \to \infty$ ұмтылғанда $\lambda \to 0$ ұмтылатындай (59) интегралдық қосындының шегін табамыз.

Егер S_n интегралдық қосындының I шегі $[a; b]$ аралығындағы бөлінген кесінділерден және нүктелерді таңдап алғанымызға байланыссыз болса, онда I саны $y = f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралы деп аталады және $\int_a^b f(x)dx$ деп белгіленеді.

Яғни,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad , \tag{60}$$

а және b сандары интегралдың сәйкес төменгі және жоғарғы шектері, ал $f(x)$ функциясы–интеграл астындағы өрнек, x - интегралдау айнымалысы, $[a;b]$ кесіндісінде

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегралы бар болса, онда оны осы кесінді де интегралданатын функция деп атайды.

Енді анықталған интегралдың бар болуы туралы теореманы тұжырымдайық.

Теорема 1. (Коши). Егер $y = f(x)$ функциясы [a; b] кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ интегралы бар болады.

Функцияның үзіліссіздігі оның интегралданатындығының жеткілікті шарты екенін атап өтуге болады. Егер функция кесіндінің ақырлы нүктелерінде үзілісі бар болып, басқа нүктелерінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде интегралданатын функция болады. (1.2) анықтамасынан шығатын анықталған интегралдың қасиеттерін көрсетейік:

1. Анықталған интеграл өзінің интегралдану айнымалысынан тәуелді емес:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \,, \tag{61}$$

Бұдан (60) интегралдың қосынды, яғни ол тек интегралдың шектері мен функциясынан тәуелді екені шығады.

2. Анықталған интегралдың шектері бірдей болса, онда анықталған интеграл нөлге тең:

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

3. Кез-келген c нақты саны үшін $\int_a^b cdx = c\cdot(b-a)$

Есеп шығару үлгілері

1 есеп. Сутегінің 2 г энтропиясы қалай өзгере еді, егер ол 40 лкөлемді 270 К, алған болса, егер қысымды тұрақты температурада екі есе арттырса, және сонан соң температурасын 320 К-ге дейін арттырса?

Шешуі:

Энтропия өзгерісі мына формуламен анықталады:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T}, \qquad (62)$$

мұндағы

dQ — жылу мөлшерінің өзгерісі;

T — термодинамикалық температура.

Жылудың мөлшерінің өзгерісін идеал газ үшін термодинамиканың бірінші бастамасынан табуға болады:

$$dQ = \frac{m}{\mu} C_V dT + pdV. \qquad (63)$$

мұнда

m —газмассасы ;

μ— молярлық масса;

C_V — молярлық изохоралық жылу сыйымдылық;

dT — газдың температура өзгерісі;

P —газ қысымы;

dV— көлем өзгерісі;

pdV — газдың ұлғаю жұмысы.

P шамасын Менделеев – Клапейрон теңдеуінен табамыз:

$$p = \frac{m}{\mu V} RT.$$

Екі атомды газ үшін:

$$C_V = \frac{5}{2} R, \qquad (64)$$

мұндағы

R=8,31 Дж/(моль $\cdot$ К) — универсал газ тұрақтысы.

(63)-ті (64) –ке койған соң, табамыз:

$$dQ = \frac{5\cdot m}{2\cdot\mu}R\,dT + \frac{m}{\mu}RT\frac{dV}{V}. \qquad (65)$$

(62) -ті (63) қойған соң, табамыз:

$$\Delta S = \frac{5\cdot m}{2\cdot\mu}R\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} + \frac{mRT_1}{\mu T_1}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu}R\left(\frac{5}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} + \ln\frac{V_2}{V_1}\right), \qquad (66)$$

Изотермиялық процесс үшін:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

(66) теңдеуі орын табады:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu}R\left(\frac{5}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} - \ln\frac{p_2}{p_1}\right).$$

Есептеулерді жасаймыз:

$$\Delta S = \frac{2\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-3}}\cdot 8{,}31\left(\frac{5}{2}\ln\frac{320}{270} - \ln 2\right) = -2.27 \text{ Дж/К}.$$

2 есеп. Цилиндр формалы муфтаның (жалғастырғыш) симметрия осімен сәйкес келетін оьске қатысты инерция моментін (20 сурет) анықтаңыздар? Муфтаның массасы m=2 кг, ішкі радиусы r=0,03 м, сыртқы радиусы R=0,05 м.

Шешуі:

Инерция моментінің жалпы формуласы

$$J = \int r^2 dm$$

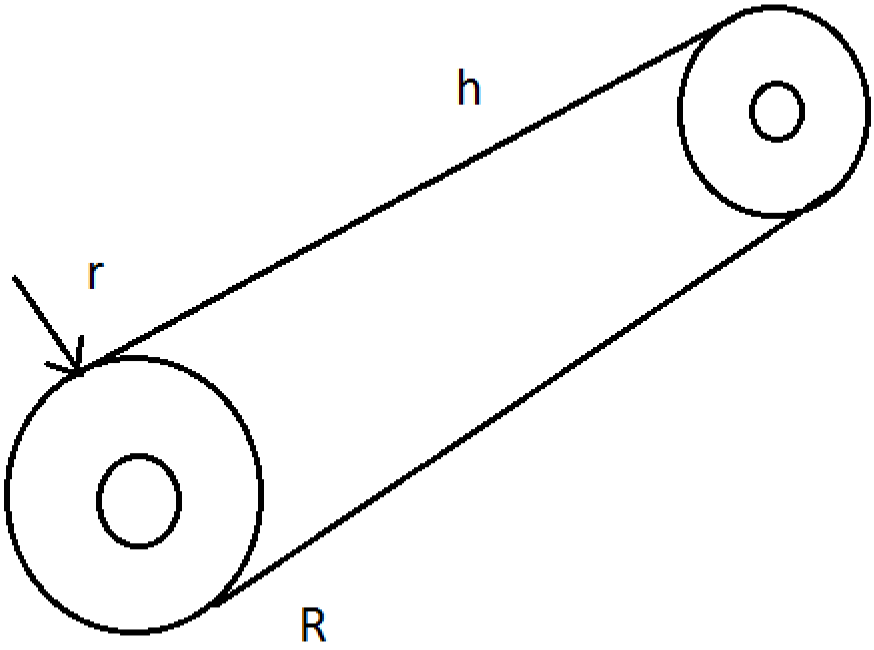
мұнда

$dm = \rho \cdot dV$,

ρ - муфта материалының тығыздығы,

dV оның көлемі.

Көлемді цилиндр бетінің ауданы мен $2\pi rh$ оның қабатының қалыңдығының dr көбейтіндісі арқылы табуға болады.



20 сурет – Цилиндр формасы

$$J = \int_r^R r^2 dm = \rho \int_r^R r^2 dV = \rho \int_r^R 2 \cdot \pi \cdot h \cdot r^3 dr = 2\rho \frac{\pi \cdot h}{4}\left[R^4 - r^4\right] = \frac{1}{2} m\left(R^2 + r^2\right)$$

мұнда

$$m = \rho \cdot \pi \cdot h\left(R^2 - r^2\right),$$

ал $\left[R^4 - r^4\right] = \left(R^2 - r^2\right)\left(R^2 + r^2\right)$

Сонымен

$$J = \frac{1}{2} m\left(R^2 + r^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 2\left(9 \cdot 10^{-4} + 25 \cdot 10^{-4}\right) = 34 \cdot 10^{-4} \text{ (кг·м}^2\text{)}.$$

Әр түрлі типті есептерді шешудің жалпы әдістемесі

Әр түрлі типті есептерді шешу әдістемесі, олардың оқу процесіндегі орны.

Сапалы есептер – қалғандардың алдында оқу процесінде қолданады, оқытылған материалдың бекіту құралы ретінде. Сапалы есептің шешуі индукция және дедукция көмегімен физикалық заңдарына бағына отырып логикалық ойтұйықталуды құрастыру. Жуықтап алғанда сапалы есептердің шешу әдістемесі мынадай:

- шартын оқу, есептегі барлық ұғымдарын түсініп алу;

- есеп шартын талдау, физикалық құбылыстың құрастыруын талдау, егер қажет болса суретін немесе сызбасын қарастыру.

Ой тізбегін аналитиялық және синтетикалық тізбегін құрастыру.
Алынған жауаптың физикалық мағынасы жағынан талдау, шарттың нықты сәйкес келтіру.

Бұл есептердің екі тобы қарастырылады: қарапайым, есептер - сұрақтар.

Олардың шешілуі бір физикалық занына негізделеді және ойтұйықталу тізбегі салыстырмалы жеңіл.

- қарапайым сапалы есептер, бірнеше қарапайым есептердің комбинациясы немесе жиынтығы. Оларды шеше отырып құрделі және ұзын ойтұйқталуларды жасау қажет, бірнеше физикалық заңдылықтарын талдау керек.

Мысалы, неліктен шертіп кеткен кезде адам алға қарай құлайды. Киімнің шаңнан қағып босатуы неге негізделген

Бұған ұқсас есептерді Ньютонның бірінші заңын қажетті жағдайға қолдана отырып шешеді. Берілген жағдайда қай физикалық құбылыс қарастырылғанына көз жеткізу керек.

Инерция құбылысы. Осы құбылысты жазып беретін физикалық заңына сүйенеді. Ньютонның 1 заңы – инерция заңы. Сондықтан адам аяқтары қандай да болсын бөгетті кездестірген, тоқталады, ал басқа бөліктері тнерция бойынша қозғалысты алға қарай жалғастырады

Кұрделі есептер: Реостаттың қозғалатын ползунокты солға, оңға жылжытқанда приборлардың көрсетулері қалай өзгереді?

Амперметр тізбектегі ток күшін көрсетеді, вольтметр- реостаттағы кернеу түсуін. Реостаттың ползуногын солға қарай жылжытқанда кедергісі азаяды, алоңға жылжытқанда – артады. Толық тізбек үшін Ом заңын қолдана отырып, ползуноктың жылжыуы кезінде оның кедергісі азаятының аламыз, ал ток күші артады. Бірмезгілде элементтің ішкі кедергісі де кернеу түсуі артады, ал реостаттағы түсуі азаяды.

Эксперименталды есептер. Бұлардың сипаттысы зертханалық немесе демонстрациялық эксперимент кезінде шешілуі.

Мысалы, теңдігі рычагта массалары бірдей, бірақ көлемдері әр түрлі екідене ілінген. Тепе-теңдігі сақталады ма, егер денені суға батырса. Әңгімелесу кезінде суға денені батырған кезде оған ығыстырушы күш әсер ететіндігі анықталады. Оның шамасы дене көлеміне және сүйық тығыздығына пропорционал. Көлемі аз денеге азырақ ығыстырушы күш әсер етеді. Сондықтан өлшемдері аз дене су ішінде тартып кетеді. Жауапты тәжірибемен тексереді.

Есептеуші есептердін шешу әдістерін ажыратады: арифметикалық, алгебралық, геометриялық, графикалық.

Арифметикалық: физикалық шамаларымен тек қана арифметикалық әрекет жасайды.

Алгебралық: алгебра бойынша бар болған білімдерді қолданады, формулаларды қолданады, құрастырады және теңдеулерді шешеді.

Геометриялы: ізделініп отырылған шамасы белгілі геометриялық сәйкестіктер негізінде шешеді, тек қана геометриялық сәйкестіктерді қолдандана отырмай тригонометриялық формулаларды да қолданады.

Графикалық - іздеіп отырған шаманы анықтау кезінде графиктер қолданылады.

Логикалық операциялар сипаты жағынан аналитикалық және синтетикалық тәсілі қолданылады.Аналитикалық тәсілі кезінде ізделініп отырған шаманың анықтауынан бастайды, бұ шама басқа шамаларымен қалай байланысқан екенін және физикалық формулаларды қолдана отырып қысқа жолмен ізделініп шамаға келе отырады.

Синтетикалық тәсілі кезінде берілген физикалық шамалар арасында тең аралық байланыстарды анықтайды. Барлық операциялар қорытындысында В кейбіреулерінің пайдасы жоқ болады, қалғандарынан ізделініп отырылған шаманы анықтайды.

Графикалық есептерде зерттеу объектісі ретінде физикалық шамалардың тәуелдік графиктері болып табылады. Бір есептерде бұл графиктер шартында берілген, басқаларында оларды құру керек. Бірінші графикалық есептер «оқу» және графиктерді құру болып табылады. Сонан соң графикпен жасалған жұмысын бірті-бірте қиын болып істеу керек формулаларды құруға дейін шамалар араысндағы байланыстарын анықтау керек. Шешудің негізгі кезеңдері әдебиеттерде қарастырылған.

Бақылау сұрақтары:

1. Есептердің жалпы классификациясын келтіру керек
2. Есептерді қай таңба жағынан классификациялайды ?
3. Әр түрлі есептер типтеріне анықтама беріңіз
4. Әр бір жағдайда зерттеу объектісі ретінде не бола алады?
5. Есеп шешу кезінде қандай тәсілдер ажыратылады?

Өз бетімен шығаратын есептер

Студенттің өзіндік жұмысының жоспары:

Пәнді оқу барысында әр студент жеке тапсырмалар алады. Тапсырмалар студенттің теориялық білімінің қандай деңгейде меңгергенін, оны есептер шығарғанда қаншалықты пайдалана алатындығын көрсетеді.

Жеке тапсырмалар тақырыптары нұсқа бойынша берілген.

Жеке тапсырмаларды орындауға әдістемелік нұсқаулар: тапсырмалар нұсқаны көрсетілген уақытта 12 беттік дәптерде не А4 форматты қағазда файлға салынып, аты-жөні, тобы, мамандығы, нұсқа №, өткізілген уақыты көрсетіліп өткізілуі керек.

Тапсырмалар ұғынықты жазумен жазылып, олардың арасында түзетулер, нұсқаулар, ескертулер тағы басқа үшін бос орын қалтыру керек.

Тапсырмалардағы есептердің берілуі, нөмірі көрсетілуі керек. Есептерді шығарғанда талдап жазып, пайдаланылған формулаларды, теоремалар мен анықтамаларды жазып отырса, олар жоғары бағаланады. Тапсырмаларды кешіктермей уақытында орындап, өткізген жөн.

Кешіктіріліп өткізілген тапсырмалар төмен бағаланады.

Тапсырмалардың нұсқалары, мазмұны студентке жеке түсіндіріледі.

1 Нұсқа

1 есеп. $\vec{F}$ (1, -2, 1) күші А (4, 2, 3) нүктесіне түседі.

а) $\vec{F}$ күшінің түсу нүктесі түзу сызықпен қозғала отырып, А орнынан В (1, 2, 1) орнына орын ауыстырғандағы жұмысын;

б) $\vec{F}$ күшінің В нүктемен салыстырғандағы моментінің модулін есептеу керек.

2 есеп. Егер бөлшектердің радиусы векторы уақыт бойынша заңға сәйкес өзгерсе $r=t^3i + 3t^2 j$ (м), онда 1 секунд уақыт үшін бөлшектердің жылдамдық модуліне тең болады.

3 есеп. Егер доңғалақ өзінің бұрыштық координатасын $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt$ теңдеуімен келтірсе, онда В = 2 рад / с, С = 1 рад / с^2, D = 1 рад / с, содан кейін дөңгелек басталғаннан 2 секунд өткен соң оның шеңберіндегі нүктелердің бұрыштық үдеуі тең болады

4 есеп. Егер салмағы 1 кг болатын бөлшек $x= A - Bt + Ct^2 – Dt^3$, заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда В=2 м/с, С=2 м/с^2, D=0,4 м/с^3 , онда бөлшектердің жылдамдығы модулі 2 секундта болады. қозғалыс тең болады. Осы бөлшектің кинетикалық энергиясын табыңыз

5 есеп. Егер салмағы 1 кг болатын бөлшек $x= A - Bt + Ct^2 – Dt^3$, заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда В=3 м/с, С=2 м/с^2, D=0,4 м/с^3 , онда бірінші бөлшектердің импульсті модулінің өзгеруі оның қозғалысының екіншісі тең болады

6 есеп. Егер салмағы 2 кг болатын бөлшек $x= A\ t + Bt - Ct^2 – Dt^3$, заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда В=1 м/с, С=2 м/с^2, D=0,4 м/с^3 , онда бөлшектердің жылдамдығы модулі 1 секундта болады. қозғалыс тең болады. Осы бөлшектің кинетикалық энергиясын табыңыз

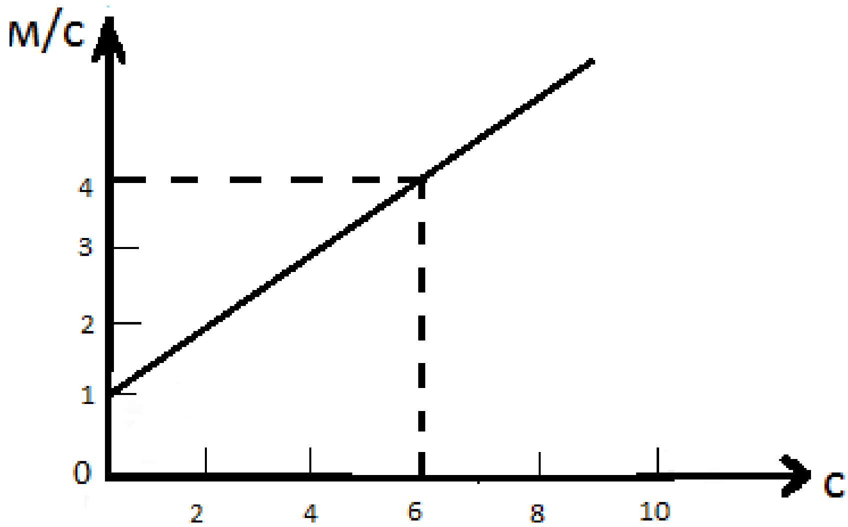
7 есеп. Егер бөлшектер координаты $x=3+2t+t^3$ (м)теңдеуімен берілсе, онда бөлшектердің екінші секунд ішінде орташа үдеуі оның қозғалуына тең болады

8 есеп. Гармониялық осцилляторына теңдеуі жазыңыз. Оның жылдамдық және үдеу тербелісі жазыңыз.

9 есеп. Гармониялық осциллятор мына теңдеумен $x= a\ (t)\ \cos\ (\omega t + \alpha)$ қозғалады. x табу керек.

10 есеп. Егер салмағы 2 кг болатын бөлшек $x = A\ t - Bt + Ct^2 + Dt^3$ заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда B = 2 м / с, C = 1 м / с^2, D = 1 м / с^3, онда бөлшектердің жылдамдығы модулі 1 секундта болады. қозғалыс тең болады. Осы бөлшектің кинетикалық энергиясын табыңыз

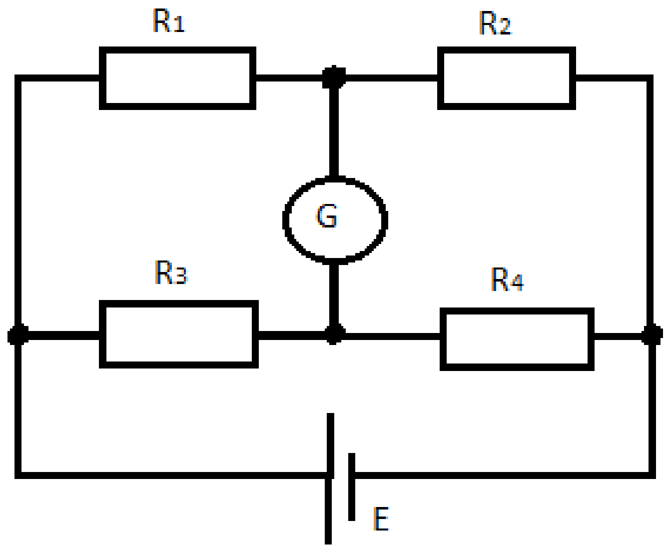
11 есеп. Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі (21 сурет) бойынша 6 секундтағы үдеуді табыңыздар.



21 сурет - Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі

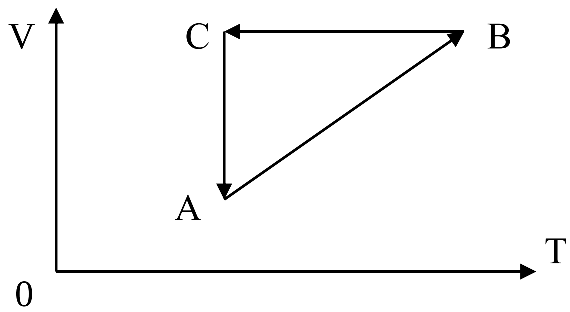
12 есеп. Дененің жүрген s жолының t уақытқа тәуелділігі теңдеу $s = A - Bt + Ct^2$ арқылы берілген, мұндағы A=6 м, B=3 м/с және C=2 м/с^2. Дененің 1 секундтан 4 секундқа дейінгі уақыт интервалындағы орташа жылдамдығы мен үдеуін табу керек.

13 есеп. Суретте (22 сурет) ε=3 В, R_1=70 Ом, R_2=50 Ом, R_3=R_4=30 Ом және R_G=110 Ом. Токтың күші I_G анықтаңыздыр.



22 сурет – Кедергілер және гальванометр схемасы

14 есеп. 23 суретте V, T координат осінде, тұйық циклде газ күйінің өзгеруі көрсетілген. Осы тұйық контурдағы газ күйінің өзгеруін T, V осінде көрсет.



23 сурет – V, T координат графикті

15 есеп. Дененің жүрген s жолының t уақытқа тәуелділігі теңдеу $s = At - Bt^2 + Ct^3$ арқылы берілген. Мұндағы A=2 м/с^2, B=3 м/с^2 және C=4 м/с^3. Мыналарды: 1) V жылдамдық пен a үдеудің t уақытқа тәуелдігін, 2) дененің жүріп өткен жолын, қашықтығын және қозғалыс басынан 2 с уақыт өткеннен кейінгі дененің жылдамдығы мен үдеуін табу керек. 0,5 с өткеннен кейінгі, $0 \le t \le 3$ интервалдағы жолдың, жылдамдықтың және үдеудің графиктерін құраңыздар.

2 Нұсқа

1 есеп. $\vec{F}$ (5, 1, 7) күші A (1, -1, 2) нүктесіне түседі.

а) $\vec{F}$ күшінің түсу нүктесі түзу сызықпен қозғала отырып, А орнынан В (0, 4, 1) орнына орын ауыстырғандағы жұмысын;
б) $\vec{F}$ күшінің В нүктемен салыстырғандағы моментінің модулін есептеу керек.

2 есеп. Егер бөлшектердің радиусы векторы уақыт бойынша заңға сәйкес өзгерсе r = 4t2i + 3t j + 2k (m), онда 2 секунд уақыт үшін бөлшектердің жылдамдық модуліне тең болады.

3 есеп. Егер бөлшектердің координатасы x= 3t - 2t^2 + t^3 (м) теңдеуімен берілсе, онда қозғалыс басталғаннан 1 секундтан кейін бөлшектің үдеуіне тең болады.

4 есеп. Егер салмағы 1 кг болатын бөлшек x = A - Bt + Ct^2 - Dt^3 заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда B = 3 м / с, C = 2 м / с^2, D = 0,4 м / с^3, онда бірінші бөлшектердің импульсті модулінің өзгеруі оның қозғалысының екіншісі тең болады

5 есеп. Егер салмағы 2 кг болатын бөлшек x = A t - Bt + Ct^2 + Dt^3 заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда B = 2 м / с, C = 1 м / с^2, D = 1 м / с^3, онда бөлшектердің жылдамдығы модулі 1 секундта болады. қозғалыс тең болады. Осы бөлшектің кинетикалық энергиясын табыңыз

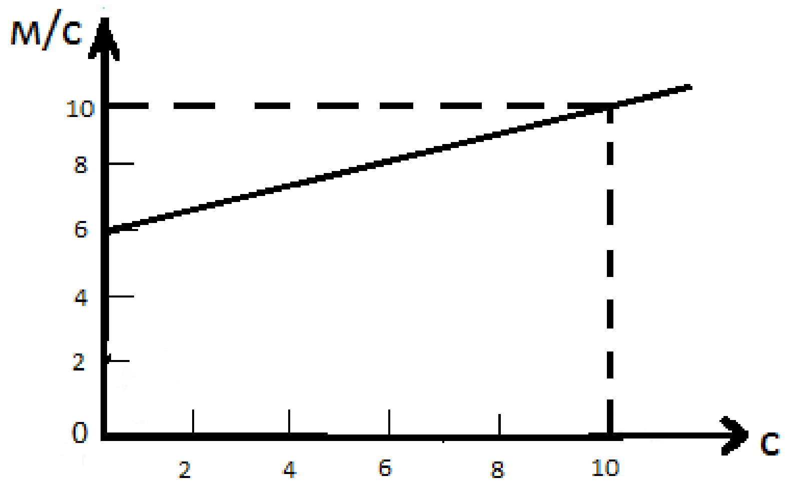
6 есеп. Дененің жүрген s жолының t уақытқа тәуелділігі теңдеу $s = A + Bt + Ct^2$ арқылы берілген, мұндағы A=3 м, B=2 м/с және C=1 м/с^2. Дененің қозғалысының бірінші, екінші және үшінші секундтарындағы орташа жылдамдығы мен үдеуін табу керек.

7 есеп. Дененің жүрген s жолының t уақытқа тәуелділігі теңдеу $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ арқылы беріледі, мұндағы C=0,14 м/с^2 және D=0,01 м/с^3 .
1) қозғалыс басталғаннан кейін қанша уақыттан соң дененің үдеуі 1 м/с^2 тең болады?
2) осы уақыттағы дененің орташа үдеуі неге тең болады?

8 есеп. Тепе-теңдік қалпында гармониялық осциллятордың кинетикалық энергиясы неге тең?

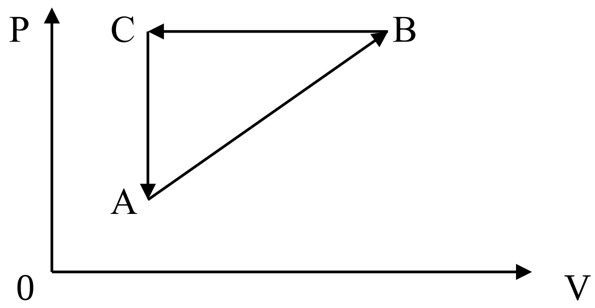
9 есеп. Төменде келтірілген дифференциалдық теңдеулердің қайсысы механикалық жүйенің өшпейтін тербелісін сипаттайды?

10 есеп. Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі бойынша 10 секундтағы үдеуді табыңыздар (24 сурет).



24 сурет - Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі

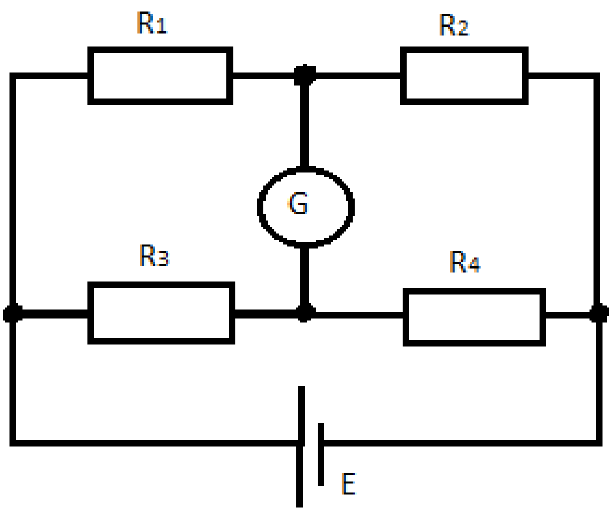
11 есеп. 25 суретте P, V координат осінде, тұйық циклде газ күйінің өзгеруі көрсетілген. Осы тұйық контурдағы газ күйінің өзгеруін P, V осінде көрсет.



25 сурет – P, V координат графикті

12 есеп. Сутегінің 2,6 г энтропиясы қалай өзгере еді, егер ол 35 л көлемді 275 К, алған болса, егер қысымды тұрақты температурада екі есе арттырса, және сонан соң температурасын 300 К-ге дейін арттырса?

13 есеп. Суретте (26 сурет) ε=4 В, R_1=80 Ом, R_2=400 Ом, R_3=R_4=20 Ом және R_G=100 Ом. Токтың күші I_G анықтаңыздыр.



26 сурет – Кедергілер және гальванометр схемасы

14 есеп. Идеал газ Карно циклі бойынша жұмыс жасады. Қыздырғыштың температурасы суытқыштың температурасынан төрт есе артық. Циклдің термиялық пайдалы әсер коэффициентін анықтау керек.

15 есеп. Нүкте радиусы R=20 см шеңбердің бойымен $a_т$=5 м/с^2 тұрақты тангенциаль үдеумен қозғалады. Қосғалыс басынан қанша уақыттан кейін нүктенің нормаль үдеуі a_n :
1) тангенциаль үдеуге тең болады,
2) тангенциаль үдеуден екі есе үлкен болады?

3 Нұсқа

1 есеп. $\vec{F}$ (6, 0, -1) күші А (2, 1, 0) нүктесіне түседі.
а) $\vec{F}$ күшінің түсу нүктесі түзу сызықпен қозғала отырып, А орнынан В (3, 1, 2) орнына орын ауыстырғандағы жұмысын;
б) $\vec{F}$ күшінің В нүктемен салыстырғандағы моментінің модулін есептеу керек.

2 есеп. Егер бөлшектердің координатасы x= 1 - 2t - 5t^2 + 4t^3 (м) теңдеуімен берілсе, онда қозғалыс басталғаннан 2 секундтан кейін бөлшектің үдеуіне тең болады.

3 есеп. Егер бөлшектердің координатасы x = 6 - 3t + 2t^2 (m) теңдеуімен берілсе, онда қозғалыс басталғаннан 2 секундтан кейін бөлшектің үдеуіне тең болады.

4 есеп. Егер салмағы 3 кг болатын бөлшек x= - A t - Bt - Ct^2 – Dt^3, заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда B=1 м/с, C=2 м/с^2, D=3 м/с^3 , онда бөлшектердің жылдамдығы модулі 3 секундта болады. қозғалыс тең болады. Осы бөлшектің кинетикалық энергиясын табыңыз

5 есеп. Егер салмағы 1 кг болатын бөлшек $x = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ заңына сәйкес түзу қозғалса, онда $B = 3$ м / с, $C = 2$ м / $с^2$, $D = 0,4$ м / $с^3$, онда ең жақын уақыт оның басынан басталады. қозғалыс, бөлшектердің импульс модулі нөлге тең болғанда, ол тең болады

6 есеп. Егер бөлшектің жылдамдығы $V=1+2t+4t^2$ (м/с) теңдеумен берілсе, онда бөлшектің орташа жылдамдығы оның қозғалысының алғашқы екі секундында тең болады

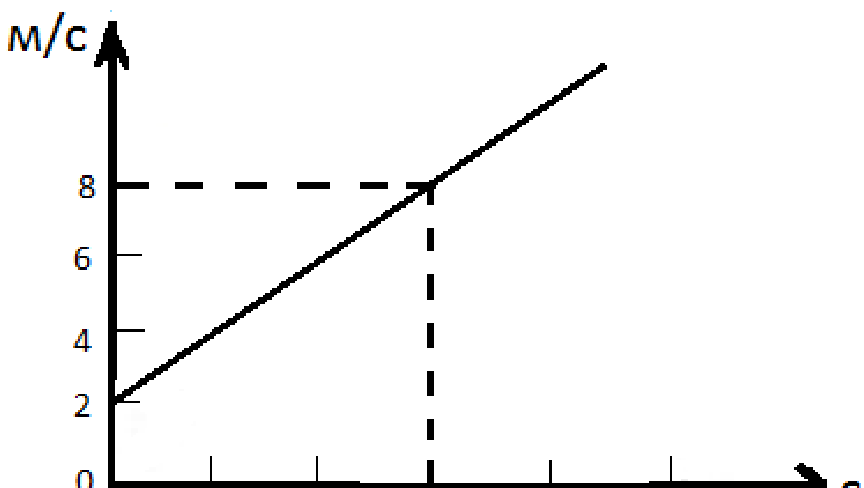
7 есеп. Тербелістегі кез келген материалдық нүктенің кинетикалық энергиясы $E_K = mV^2/2$. Тербелістегі үшін жылдамдық жазу керек және соңғы теңдуі жазыңыз.

8 есеп. Гармониялық тербелетін нүктенің жылдамдвығы мен ығысуының арасындағы фаза ығысуы неге тең?

9 есеп. Өзара перпендикуляр екі тербеліс қосылғанда шығатын, қорытқы тербелістің теңдеуін жазыңыздар.. $x= 2 \sin \omega t$ (м), $y= 2 \cos \omega t$ (м).

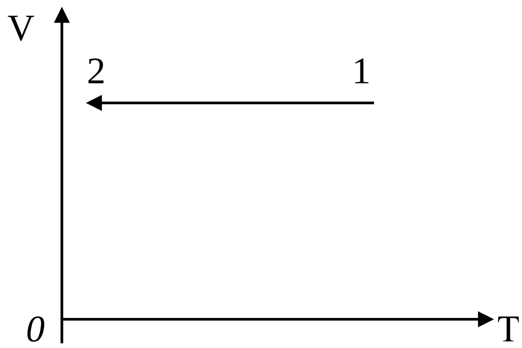
10 есеп. Егер бөлшектердің радиусы векторы уақыт бойынша заңға сәйкес өзгерсе $r=t^3i + 3t^2 j$ (м), онда 1 секунд уақыт үшін бөлшектердің жылдамдық модуліне тең болады.

11 есеп. Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі бойынша 3 секундтағы үдеуді табыңыздар (27 сурет).



27 сурет – Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі

12 есеп. 28 суретте көрсетілгендей газ 1-ші күйден 2-ші күйге өтті. Газ күйінде қандай өзгерістер болды және оның макроскопиялық параметрлері қалай өзгереді.

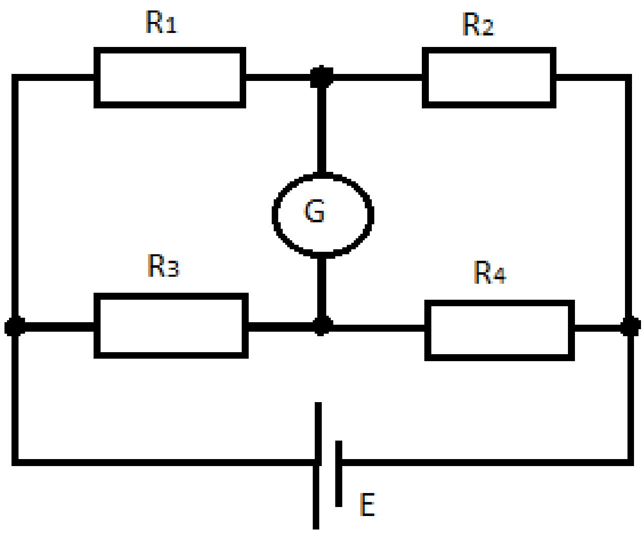


28 сурет – V, T координат графикті

13 есеп. Бір қалыпты үдемелі қозғалған дөңгелек айнала бастағаннан N=10 айналынан кейін ω=20 рад/с бұрыштық жылдамдыққа жетті. Дөңгелектің бұрыштық үдеуін табу керек.

14 есеп. Пружинаға 10 кг жүк лнген. 1 кг күштің әсерінен пружина 1,5 см созылатындығын біле отырып, осы жүктің вертикаль тербелісінің периодын анықта керек.

15 есеп. Суретте (29 сурет) ε=2 В, R_1=80 Ом, R_2=50 Ом, R_3=R_4=40 Ом және R_G=120 Ом. Токтың күші I_G анықтаңыздыр.



29 сурет – Кедергілер және гальванометр схемасы

4 Нұсқа

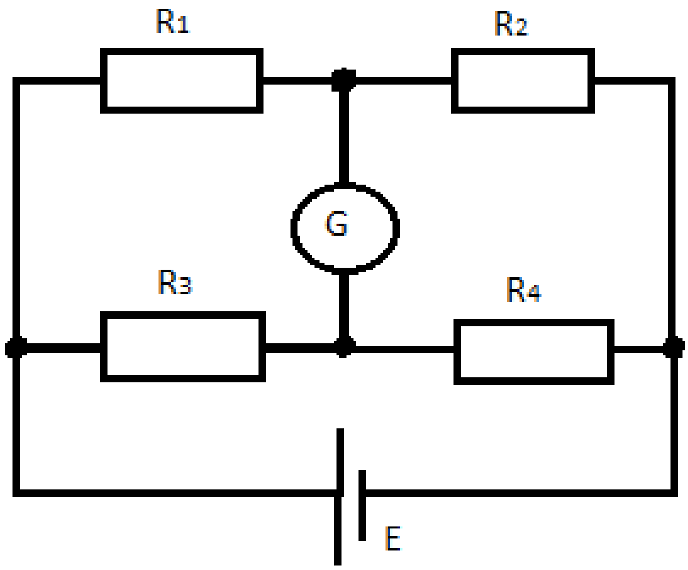
1 есеп. Егер бөлшектердің координатасы x= 1 - 2t - 5t^2 + 4t^3 (м) , теңдеуімен берілсе, онда қозғалыс басталғаннан 1 секундтан кейін бөлшектің үдеуіне тең болады.

2 есеп. Егер диск тұрақты осьтің айналасында оның бұрыштық координатасы φ = 0,5 t^2 (рад / с2) теңдеуімен анықталатын болса, онда оның бұрыштық үдеуіне тең болады

3 есеп. Егер массасы 2 кг болатын бөлшектің жолы s = 3 cos (πt / 3) заңына сәйкес өзгерсе, онда бөлшектердің момент модулі максимум болған кезде қозғалыс басталған сәттен бастап ең жақын сәт болады.

4 есеп. Егер салмағы 1 кг болатын бөлшек x = A - Bt + Ct^2 - Dt^3 заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда C=2 м/$с^2$, D=0,4 м/$с^3$, онда қозғалысының бірінші секундының соңында бөлшекке әсер ететін күш модулі, тең болады

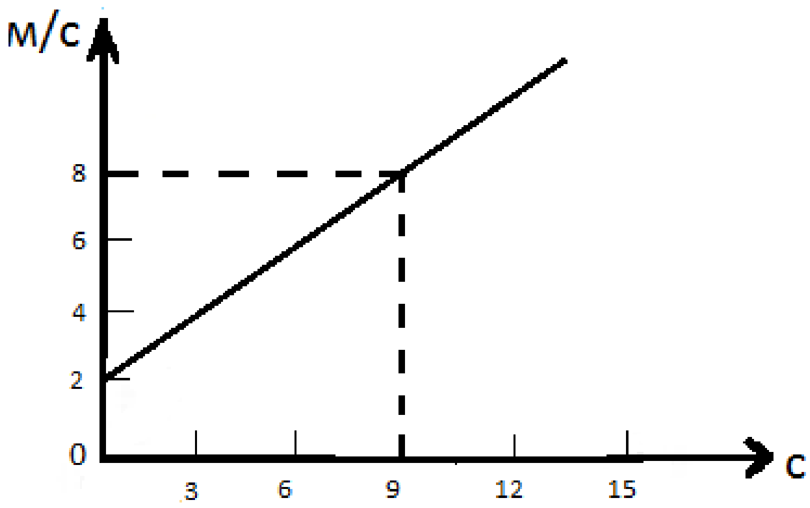
5 есеп. Суретте (30 сурет) ε=2 В, R_1=80 Ом, R_2=50 Ом, R_3=R_4=40 Ом және R_G=120 Ом. Токтың күші I_G анықтаңыздыр.



30 сурет – Кедергілер және гальванометр схемасы

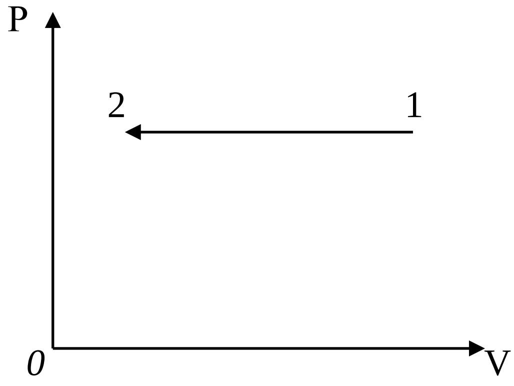
6 есеп. Материалдық нүкте $S = t^4 - 3t^2 + 2t - 4$ заңымен қозғалады. Нүкте қозғалысының t=2c сәтіндегі жылдамдығын табу керек.

7 есеп. Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі бойынша 9 секундтағы үдеуді табыңыздар (31 сурет).



31 сурет - Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі

8 есеп. 32 суретте көрсетілгендей газ 1-ші күйден 2-ші күйге өтті. Газ күйінде қандай өзгерістер болды және оның макроскопиялық параметрлері қалай өзгереді.



32 сурет – P, V координат графикті

9 есеп. Егер бөлшектер координаты $x=3+2t+t^3$ (м) теңдеуімен берілсе, онда бөлшектердің бірінші секунд ішінде орташа үдеуі оның қозғалуына тең болады

10 есеп. Материалдық нүкте массамен m=5 г жиілігімен ν=0.5 Гц гармониялық тербелістер қозғалады . Анықтау:
1) жылдамдық V нүктесінің уақытқа тәуілдігіне
2) максималды күші F_{max} нүктеге қозғалында
3) кинетикалық энергия E

11 есеп. Массасы 0,5 кг дене түзу сызықты қозғалады, оның s жүрген жолының t уақытқа тәуелділігі $s=A-Bt+Ct^2-Dt^3$ теңдеумен көрсетіледі, мұндағы C=5 м/с^2 және D=1 м/с^2. Қозғалыс уақытының бірінші секундының соңында денеге әсер ететін күштің шамасын табу керек.

12 есеп. Жиілігі ν=500 Гц және амплитудасы А=0,25 м дыбыс тербелісі ауада тарайды. Толқынның ұзындығы λ=70 см. Мыналарды:
1) тербелістің таралу жылдамдығын,
2) ауа бөлшегінің максимал жылдамдығын табу керек.

13 есеп. Массасы 0,18 кг материалық нүктенің тербеліс теңдеуі мынадай түрде: $x = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$ см берілген. Нүктенің кинетикалық, потенциалдық және толық энергияларының уақытқа (бір периодтың шегіндегі) тәуелділігінің графигін құру керек.

14 есеп. Нүкте радиусы R=20 см шеңбердің бойымен $a_т$=5 м/с^2 тұрақты тангенциаль үдеумен қозғалады. Қосғалыс басынан қанша уақыттан кейін нүктенің нормаль үдеуі a_n :
1) тангенциаль үдеуге тең болады,
2) тангенциаль үдеуден екі есе үлкен болады?

15 есеп. Адиабаттық ұлғайып азот 480 Дж жұмыс істейді. Ұлғайғанға дейінгі газдың температурасы 362 К болса, газдың соңғы температурасын табыңыздар. Азоттың массасы 12 кг, жылу сыйымдылығын тұрақты деп алыңыздар.

5 Нұсқа

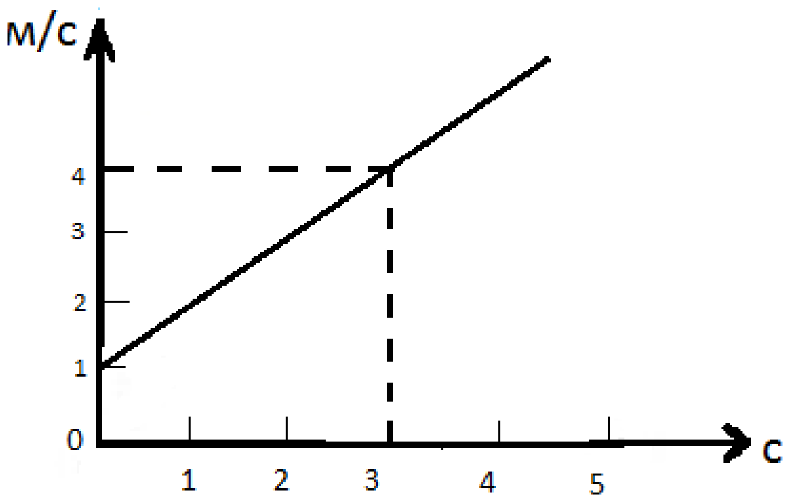
1 есеп. Егер түзу сызықты қозғалатын екі бөлшектің координаталары x_1 = 2t + 3t^2 (m), x_2 = 2t + 3t^2 + 4t^3 (m) теңдеулерімен берілсе, онда олардың 2 секундтағы салыстырмалы жылдамдығының модуліне тең болады.

2 есеп. Егер доңғалақ өзінің бұрыштық координатасын φ = A + Bt + Ct^2 , теңдеуімен келтірсе, онда B=2 рад/с, C= 1 рад/с^2 содан кейін дөңгелек басталғаннан 2 секунд өткен соң оның шеңберіндегі нүктелердің бұрыштық үдеуі тең болады

3 есеп. Егер салмағы 1 кг болатын бөлшек x= - A t + Bt + Ct^2 + Dt^3 , заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда B=1 м/с, C=1 м/с^2, D=2 м/с^3 , онда бөлшектердің жылдамдығы модулі 2 секундта болады. қозғалыс тең болады. Осы бөлшектің кинетикалық энергиясын табыңыз

4 есеп. Егер бөлшектің жылдамдығы V=1+5t-6t^2 (м/с)теңдеумен берілсе, онда бөлшектің орташа жылдамдығы оның қозғалысының алғашқы екі секундында тең болады

5 есеп. Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі бойынша 3 секундтағы үдеуді табыңыздар (33 сурет).

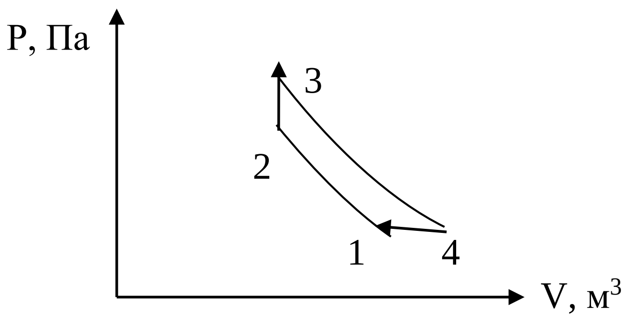


33 сурет - Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі

6 есеп. Радиусы R=0,1 м дөңгелек радиусының бұрылу бұрышының уақытқа тәуелділігі $\varphi = A + Bt + Ct^3$ теңдеумен өрнектелетіндей айналады. Мұндағы B=2 рад/с және C=1 рад/с^3. Дөңгелектің шеңберінде жатқан нүктелер үшін қозғалыс басталғаннан кейін 2 с уақыттан соң төмендегідей шамаларды табу керек:

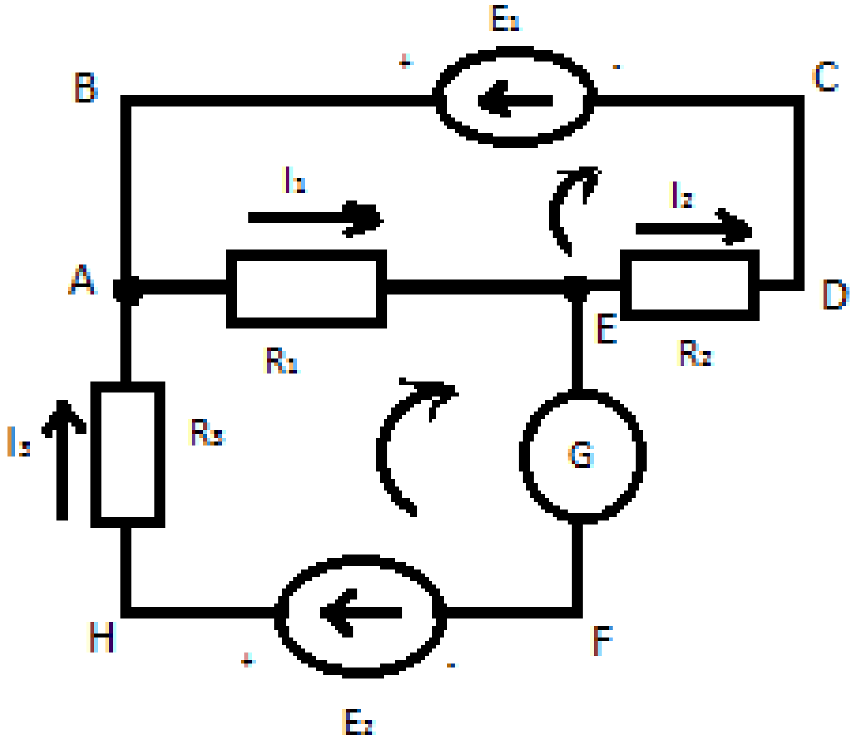
1) бұрыштық жылдамдықты,
2) сызықтық жылдамдықты,
3) бұрыштық үдеуді,
4) тангенциаль үдеуді,
5) нормаль үдеуді табу керек.

7 есеп. Газ өзгерсінің жабық циклы яғни екі адиабаталық, бір изохоралық және бір изобаралық күйден тұратын процестер кескінделген. V, P параметрлерін анықта **(**34 сурет).



34 сурет – p, V координат графигі

8 есеп. Электрлік тізбек екі гальваниялық элементерден, үш кедергілерден 111 Ом, 52 Ом, 8 Ом және гальванометрден тұрады (35 сурет). Бұл тізбекте гальванометр 52 мА токты анықтайды. Екінші элементінің ЭҚК-н, егер біріншінікі 4 В-қа тең болса табу керек. Гальванометр мен элементтердің ішкі кедергілерін еске алмаймыз.



35 сурет – Электрлік тізбек

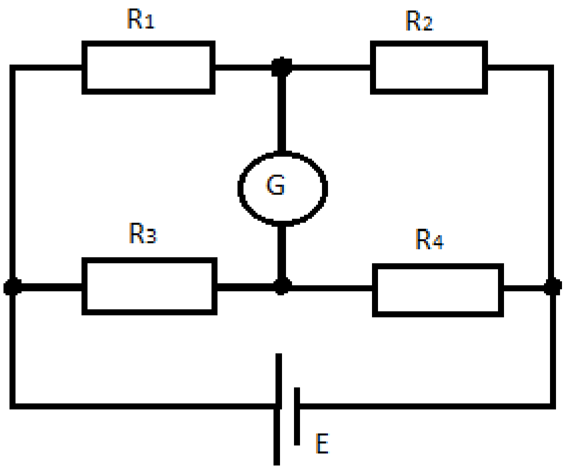
9 есеп. Өшпейтін тербелістің дифференциалдық теңдеуін жазыңыздар.

10 есеп. Тепе-теңдік қалпында гармониялық осциллятордың потенциалдық энергиясы неге тең?

11 есеп. Материалдық нүкте $S = 3t^4 - t^3 + 4t^2 + 6$ заңымен қозғалады. Нүкте қозғалысының t=2c сәтіндегі жылдамдығын және үдеуін табу керек.

12 есеп. Массасы 14 г материалық нүктенің тербеліс теңдеуі мынадай түрде: $x = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$ см берілген. Нүктенің кинетикалық, потенциалдық және толық энергияларының уақытқа (бір периодтың шегіндегі) тәуелділігінің графигін құру керек.

13 есеп. Суретте (36 сурет) ε=7 В, R_1=80 Ом, R_2=45 Ом, R_3=R_4=30 Ом және R_G=115 Ом. Токтың күші I_G анықтаңыздыр.



36 сурет – Кедергілер және гальванометр схемасы

14 есеп.Сутегінің 2,6 г энтропиясы қалай өзгере еді, егер ол 35 л көлемді 275 К, алған болса, егер қысымды тұрақты температурада екі есе арттырса, және сонан соң температурасын 300 К-ге дейін арттырса?

15 есеп. Кедергісі 20 Ом өткізгіштегі ток күші $\Delta t=2$ с ішінде сызықтық заң бойынша J_0=ОА-ден J=6А А-ге дейін өсіп отырады. Осы өткізгіште алғашқы бірінші секунд ішінде және екінші секунд ішінде бөлінген жылуларды (Q_1, Q_2), сонымен бірге Q_2/Q_1 қатынасын табыңыздар.

6 Нұсқа

1 есеп. Егер бөлшектердің радиусы векторы уақыт бойынша заңға сәйкес өзгерсе r = 4t2i - 7t j + 3k (m), онда 4 секунд уақыт үшін бөлшектердің жылдамдық модуліне тең болады.

2 есеп. Егер бөлшектердің координатасы x= $7t - 5t^2 - t^3$ (м) теңдеуімен берілсе, онда қозғалыс басталғаннан 2 секундтан кейін бөлшектің үдеуіне тең болады.

3 есеп. $\vec{F}$ (1, 2, -4) күші А (2, 1, 6) нүктесіне түседі.

а) $\vec{F}$ күшінің түсу нүктесі түзу сызықпен қозғала отырып, А орнынан В (0, 1, -2) орнына орын ауыстырғандағы жұмысын;

б) $\vec{F}$ күшінің В нүктемен салыстырғандағы моментінің модулін есептеу керек.

4 есеп. Дененің жүрген s жолының t уақытқа тәуелділігі теңдеу $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ арқылы беріледі, мұндағы C=0,09 м/с^2 және D=0,04 м/с^3 .

1) қозғалыс басталғаннан кейін қанша уақыттан соң дененің үдеуі 1 м/с^2 тең болады?

2) осы уақыттағы дененің орташа үдеуі неге тең болады?

5 есеп. Тепе-теңдік қалпында гармониялық осциллятордың кинетикалық энергиясы неге тең?

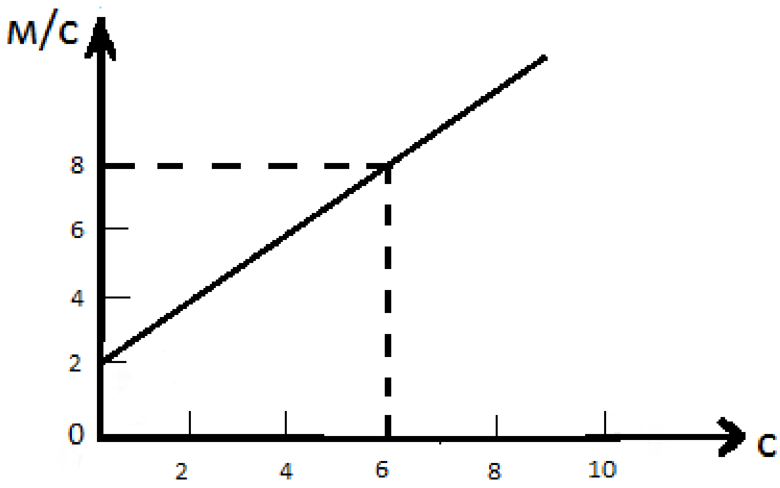
6 есеп. Төменде келтірілген дифференциалдық теңдеулердің қайсысы механикалық жүйенің өшпейтін тербелісін сипаттайды?

7 есеп. Егер салмағы 1 кг болатын бөлшек $x = A + 2Bt + Ct^2 - Dt^3$ заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда $B = 2$ м / с, $C = 4$ м / с^2, $D = 0,4$ м / с^3, онда бірінші бөлшектердің импульсті модулінің өзгеруі оның қозғалысының екіншісі тең болады

8 есеп. Егер салмағы 2 кг болатын бөлшек $x = A\ t + Bt + Ct^2 -2\ Dt^3$ заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда $B = -2$ м / с, $C = -1$ м / с^2, $D = 1$ м / с^3, онда бөлшектердің жылдамдығы модулі 1 секундта болады. қозғалыс тең болады. Осы бөлшектің кинетикалық энергиясын табыңыз

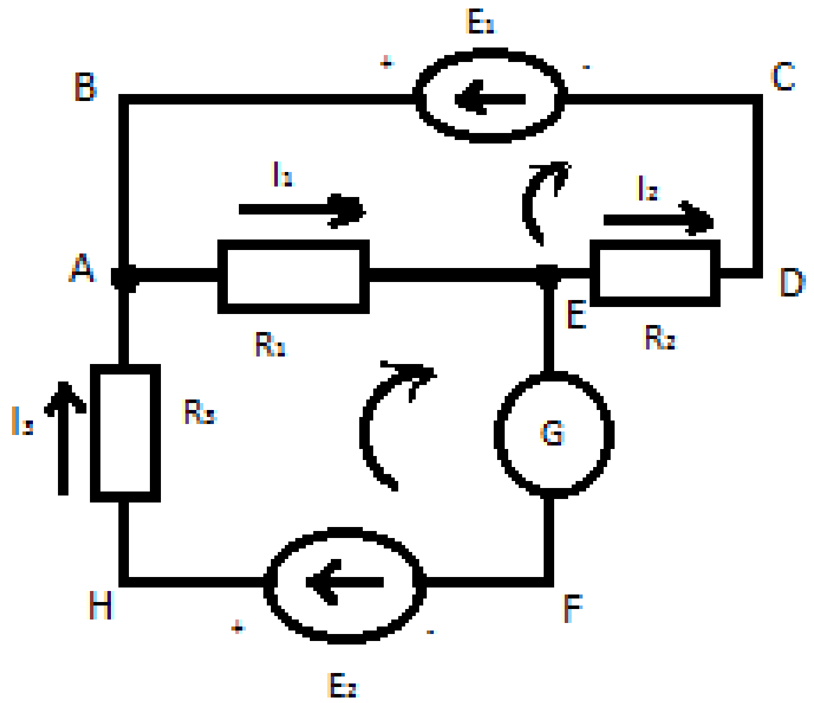
9 есеп. Дененің жүрген s жолының t уақытқа тәуелділігі теңдеу $s = A + Bt + Ct^2$ арқылы берілген, мұндағы A=2 м, B=-2 м/с және C=1 м/с^2. Дененің қозғалысының бірінші, екінші және үшінші секундтарындағы орташа жылдамдығы мен үдеуін табу керек.

10 есеп. Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі бойынша 6 секундтағы үдеуді табыңыздар (37 сурет).



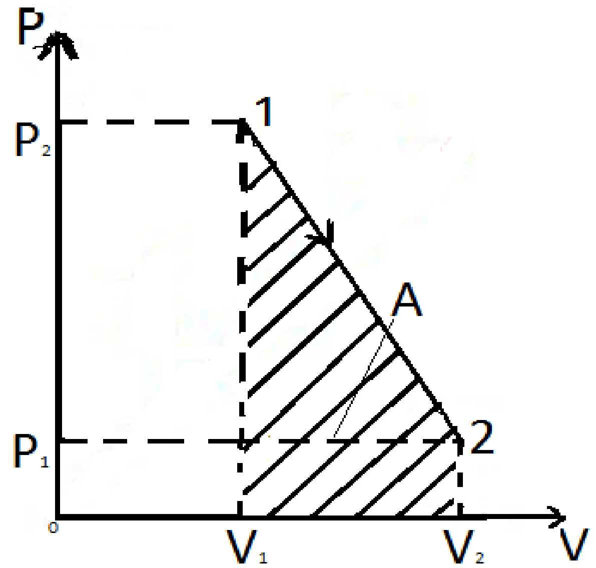
37 сурет - Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі

11 есеп. Электрлік тізбек екі гальваниялық элементерден, үш кедергілерден 115 Ом, 52 Ом, 20 Ом және гальванометрден тұрады (38 сурет). Бұл тізбекте гальванометр 50 мА токты анықтайды. Екінші элементінің ЭҚК-н, егер біріншінікі 4 В-қа тең болса табу керек. Гальванометр мен элементтердің ішкі кедергілерін еске алмаймыз.



38 сурет – Электрлік тізбек

12 есеп. 39 суретте көрсетілгендей газ 1-ші күйден 2-ші күйге өтті. Газ күйінде қандай өзгерістер болды және оның макроскопиялық параметрлері қалай өзгереді.



39 сурет – P, V графигі

13 есеп. Кедергісі 20 Ом өткізгіштегі ток күші Δt=2 с ішінде сызықтық заң бойынша J_0=OA-ден J=6A А-ге дейін өсіп отырады. Осы өткізгіште алғашқы бірінші секунд ішінде және екінші секунд ішінде бөлінген жылуларды (Q_1, Q_2), сонымен бірге Q_2/Q_1 қатынасын табыңыздар.

14 есеп. Нүкте радиусы R=20 см шеңбердің бойымен $a_т$=5 м/с^2 тұрақты тангенциаль үдеумен қозғалады. Қосғалыс басынан қанша уақыттан кейін нүктенің нормаль үдеуі a_n :
1) тангенциаль үдеуге тең болады,
2) тангенциаль үдеуден екі есе үлкен болады?

15 есеп. Сызықтық тығыздығы 20 нКл/м, біркелкі зарядталған, радиусы 1 см ұзын цилиндр электр өрісін тудырады. Цилиндрдің орта жерінде, оның бетінен a_1=0,5 см және a_2=2 см аралықта орналасқан өрістің екі нүктесінің потенциал айырымдарын анықтаңыздар.

7 Нұсқа

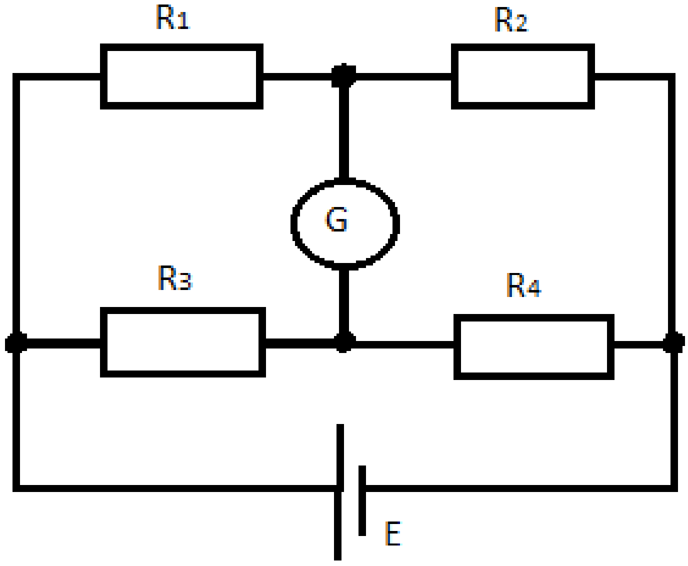
1 есеп. Егер бөлшектердің координатасы x= 1 +3t - 6t^2 - 2t^3 (м) , теңдеуімен берілсе, онда қозғалыс басталғаннан 3 секундтан кейін бөлшектің үдеуіне тең болады.

2 есеп. Егер диск тұрақты осьтің айналасында оның бұрыштық координатасы φ = 0,7 t^2 (рад / с2) теңдеуімен анықталатын болса, онда оның бұрыштық үдеуіне тең болады

3 есеп. Егер массасы 2 кг болатын бөлшектің жолы s = 7 cos (πt / 3) заңына сәйкес өзгерсе, онда бөлшектердің момент модулі максимум болған кезде қозғалыс басталған сәттен бастап ең жақын сәт болады.

4 есеп. Егер салмағы 1 кг болатын бөлшек x = A - Bt - Ct^2 - Dt^3 заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда C=4 м/с^2, D=0,9 м/с^3 , онда қозғалысының бірінші секундының соңында бөлшекке әсер ететін күш модулі, тең болады

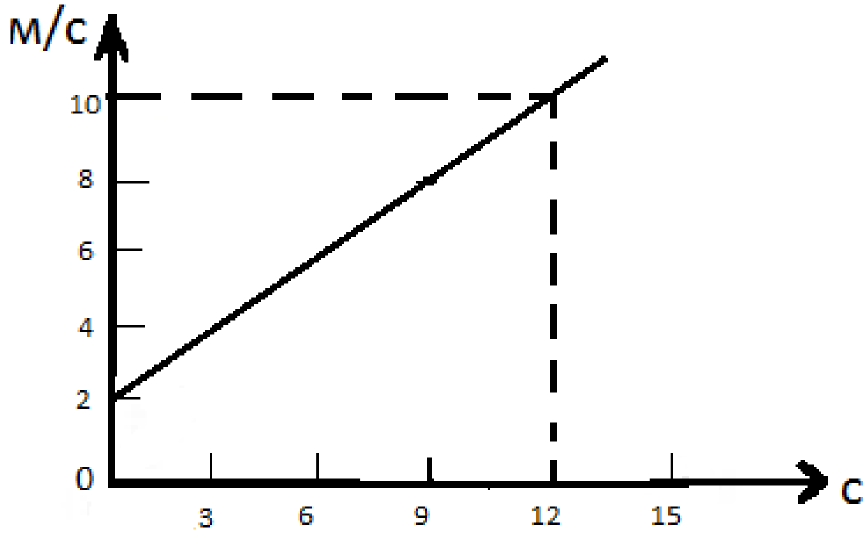
5 есеп. Суретте (40 сурет) ε=2 В, R_1=82 Ом, R_2=60 Ом, R_3=R_4=45 Ом және R_G=118 Ом. Токтың күші I_G анықтаңыздыр.



40 сурет – Кедергілер және гальванометр схемасы

6 есеп. Материалдық нүкте $S = t^4 - 3t^2 + 2t - 4$ заңымен қозғалады. Нүкте қозғалысының t=2c сәтіндегі жылдамдығын табу керек.

7 есеп. Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі бойынша 12 секундтағы үдеуді табыңыздар (41 сурет).

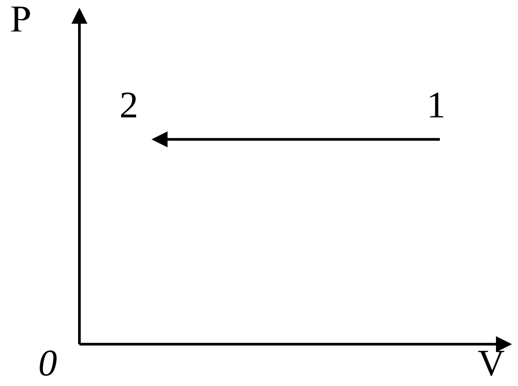


41 сурет - Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі

8 есеп. Жиілігі ν=500 гц және амплитудасы А=0,25 м дыбыс тербелісі ауада тарайды. Толқынның ұзындығы λ=70 см. Мыналарды:
1) тербелістің таралу жылдамдығын,
2) ауа бөлшегінің максимал жылдамдығын табу керек.

9 есеп. Массасы 0,18 кг материалық нүктенің тербеліс теңдеуі мынадай түрде: $x = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$ см берілген. Нүктенің кинетикалық, потенциалдық және толық энергияларының уақытқа (бір периодтың шегіндегі) тәуелділігінің графигін құру керек.

10 есеп. 42 суретте көрсетілгендей газ 1-ші күйден 2-ші күйге өтті. Газ күйінде қандай өзгерістер болды және оның макроскопиялық параметрлері қалай өзгереді.



42 сурет – P, V координат графикті

11 есеп. Егер бөлшектер координаты $x=3+2t+t^3$ (м)теңдеуімен берілсе, онда бөлшектердің бірінші секунд ішінде орташа үдеуі оның қозғалуына тең болады

12 есеп. Материалдық нүкте массамен m=5 г жиілігімен ν=0.5 Гц гармониялық тербелістер қозғалады . Анықтау:
1) жылдамдық V нүктесінің уақыттқа тәуілдігіне
2) максималды күші F_{max} нүктеге қозғалында
3) кинетикалық энергия E

13 есеп. Массасы 0,5 кг дене түзу сызықты қозғалады, оның s жүрген жолының t уақытқа тәуелділігі $s=A-Bt+Ct^2-Dt^3$ теңдеумен көрсетіледі, мұндағы C=5 м/с^2 және D=1 м/с^2. Қозғалыс уақытының бірінші секундының соңында денеге әсер ететін күштің шамасын табу керек.

14 есеп. Нүкте радиусы R=20 см шеңбердің бойымен $a_τ$=5 м/с^2 тұрақты тангенциаль үдеумен қозғалады. Қосғалыс басынан қанша уақыттан кейін нүктенің нормаль үдеуі a_n :
1) тангенциаль үдеуге тең болады,
2) тангенциаль үдеуден екі есе үлкен болады?

15 есеп. Көлемі 10 л баллонда 1 МПа қысымда 300 К мтемпературада гелий берілген. Баллоннан массасы 10 г гелий шығындалған соң, балондағы температура 290 К-ге дейін төмен түсті. Баллон ішіндегі қалған гелийдің қысымын анықтау керек.

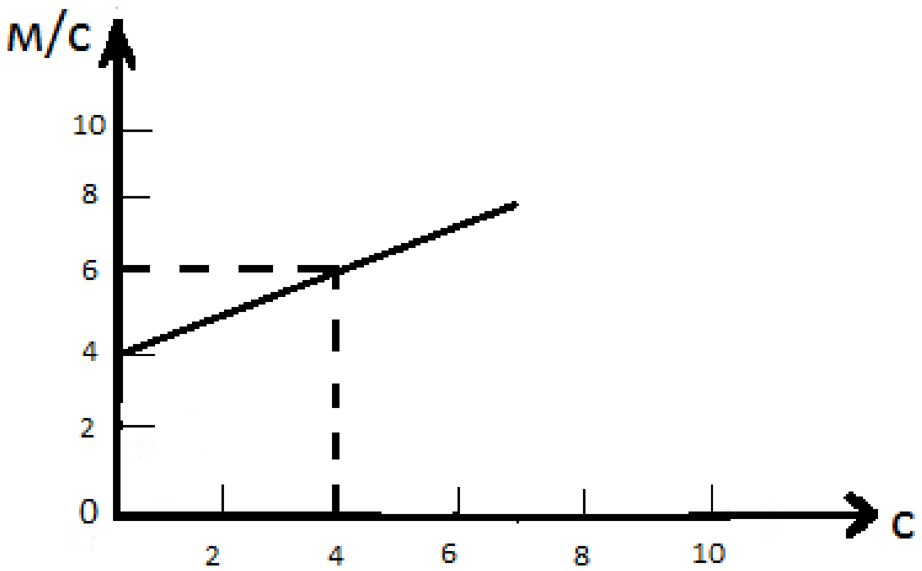
8 Нұсқа

1 есеп. Егер салмағы 1 кг болатын бөлшек x = A -2 Bt + 2Ct^2 - Dt^3 заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда B = 4 м / с, C = 2 м / с^2, D = 0,4 м / с^3, онда бірінші бөлшектердің импульсті модулінің өзгеруі оның қозғалысының екіншісі тең болады

2 есеп. Егер салмағы 1,7 кг болатын бөлшек x = A t + 2Bt + Ct^2 + Dt^3 заңына сәйкес тік сызықпен қозғалса, онда B = 7 м / с, C = 8 м / с^2, D = 1 м / с^3, онда бөлшектердің жылдамдығы модулі 1 секундта болады. қозғалыс тең болады. Осы бөлшектің кинетикалық энергиясын табыңыз

3 есеп. Дененің жүрген s жолының t уақытқа тәуелділігі теңдеу $s = A + Bt + Ct^2$ арқылы берілген, мұндағы A=3 м, B=2 м/с және C=1 м/с^2. Дененің қозғалысының екінші және үшінші секундтарындағы орташа жылдамдығы мен үдеуін табу керек.

4 есеп. Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі бойынша 4 секундтағы үдеуді табыңыздар (43 сурет).



43 сурет - Дене жылдамдығының уақытқа тәуелділігінің графигі

5 есеп. $\vec{F}$ (1, -2, 1) күші A (1, 11, 2) нүктесіне түседі.
а) $\vec{F}$ күшінің түсу нүктесі түзу сызықпен қозғала отырып, A орнынан B (4, 4, 1) орнына орын ауыстырғандағы жұмысын;
б) $\vec{F}$ күшінің B нүктемен салыстырғандағы моментінің модулін есептеу керек.

6 есеп. Егер бөлшектердің радиусы векторы уақыт бойынша заңға сәйкес өзгерсе r = 2ti + 3t j + 6k (m), онда 2 секунд уақыт үшін бөлшектердің жылдамдық модуліне тең болады.

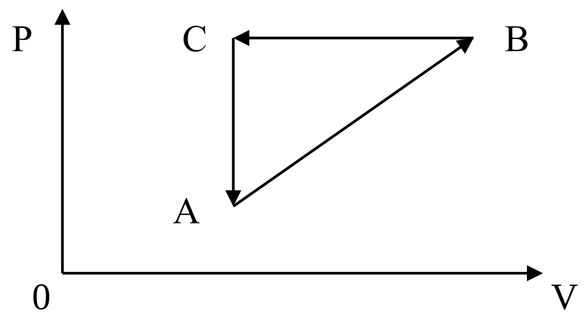
7 есеп. Егер бөлшектердің координатасы x= $3t - 2t^2 + t^3$ (м) теңдеуімен берілсе, онда қозғалыс басталғаннан 1 секундтан кейін бөлшектің үдеуіне тең болады.

8 есеп. Дененің жүрген s жолының t уақытқа тәуелділігі теңдеу $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ арқылы беріледі, мұндағы C=0,24 м/с^2 және D=0,08 м/с^3 .
1) қозғалыс басталғаннан кейін қанша уақыттан соң дененің үдеуі 1 м/с^2 тең болады?
2) осы уақыттағы дененің орташа үдеуі неге тең болады?

9 есеп. Тепе-теңдік қалпында гармониялық осциллятордың кинетикалық энергиясы неге тең?

10 есеп. Төменде келтірілген дифференциалдық теңдеулердің қайсысы механикалық жүйенің өшпейтін тербелісін сипаттайды?

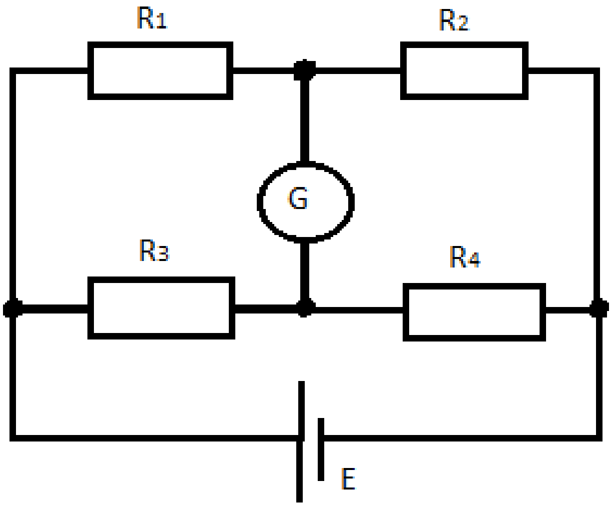
11 есеп. 44 суретте P, V координат осінде, тұйық циклде газ күйінің өзгеруі көрсетілген. Осы тұйық контурдағы газ күйінің өзгеруін T, V осінде көрсет.



44 сурет – P, V координат графикті

12 есеп.Сутегінің 2,6 г энтропиясы қалай өзгере еді, егер ол 35 л көлемді 275 К, алған болса, егер қысымды тұрақты температурада екі есе арттырса, және сонан соң температурасын 300 К-ге дейін арттырса?

13 есеп. Суретте (45 сурет) ε=4 В, R_1=80 Ом, R_2=400 Ом, R_3=R_4=20 Ом және R_G=100 Ом. Токтың күші I_G анықтаңыздыр.



45 сурет – Кедергілер және гальванометр схемасы

14 есеп. Нүкте радиусы R=20 см шеңбердің бойымен $a_т$=5 м/с^2 тұрақты тангенциаль үдеумен қозғалады. Қосғалыс басынан қанша уақыттан кейін нүктенің нормаль үдеуі a_n :

1) тангенциаль үдеуге тең болады,

2) тангенциаль үдеуден екі есе үлкен болады?

15 есеп. Идеал газ Карно циклі бойынша жұмыс жасады. Қыздырғыштың температурасы суытқыштың температурасынан төрт есе артық. Циклдің термиялық пайдалы әсер коэффициентін анықтау керек.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1 Демидович Б.П. Математикалық талдау бойынша тапсырмалар мен есептер жинағы.- Москва: Наука, 1997.- 428 б.
2 Виленкин Н.Я. Математикалық талдау курсы боынша есептеу жинағы. - Москва: Просвещение, 1971. - 1 Б.- 467 б.
3 Савельев И.В. Жалпы физика курсы.- Алматы: Мектеп, 1977.- Т. 1. – 448 б.
4 Абдулаев Ж. Физика курсы.- Алматы: Білім, 1994. Б. 130-133.
5 Ахметов А.Қ. Физика.– Алматы: Ы.Алтынсарин атындағы Қазақтың білім академиясының Республикалық баспа кабинеті, 2000. Б. 16-18.
6 Фриш С.Э., Тиморева А.В. Физика курсы.- Алматы: Мектеп, 1970.-Т. 2. Б. 147-149.
7 Н.Қойшыбаев, А.О. Шарықбаев Физика.- Алматы: Мектеп, 1970.- Т. 1. – 225 б.
8 Волькенштейн В.С. Жалпы физика курсының есептер жинағы бас. 7-ші.- Москва: Наука, 1976. – 486 б.
9 Арызханов Б. Физика.- Алматы: Мектеп, 1987. – 245 б.
10 Трофимова Т.И. Курс физики.–Москва: Высшая школа, 2001. – 498 б.
11 Жұбанов М. Физиканың негізгі заңдары.–Алматы: Мектеп, 1989. – 362 б.
12 Авторлар ұжымы. Инженерлік мамандығы студенттері үшін жалпы физика курсы бойынша зертханалық жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар.- Қостанай: А. Байтұрсынұлы атындағы ҚМУ, 2007. - 128 б.
13 Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. -Москва: Наука, 1999.- Т. 1.- 607 б.
14 Никольский С. М. Курс математического анализа. Учебник для вузов. 6-е изд., стереотип. 2001. - 592 б.
15 Открытая физика 2.6. Часть 1. - Режим доступа: http://www//physics.ru. 10.09.2010
16 Физика в колледже. – Режим доступа: http://college.ru/fizika. 16.11.2014