

Министерство образования и науки Республики Казахстан
Костанайский государственный университет имени А.Байтурсынова
Кафедра машиностроения

Исинтаев Т.И.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ В МЕХАНИЧЕСКИХ
СИСТЕМАХ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Костанай, 2018

УДК 531.3 (7)
ББК 22.21
И85

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Баймухамедов М.Ф., д.т.н., профессор, проректор по НРиВС, Костанайский социально-технический университет имени академика З.Алдамжар

Гайфуллин Г.З., д.т.н., профессор, Костанайский государственный университет имени А. Байтурсынова

Нурушев С.З., к.т.н., доцент, Костанайский государственный университет имени А. Байтурсынова

И85 Исинтаев Т.И. Математические основы исследований динамических процессов в механических системах: Учебное пособие. – Костанай, 2018. – 155с.

В учебном пособии сжато и доступно изложены математические основы исследований динамических процессов в механических системах. Изложены основные понятия и аксиомы и теоремы этого раздела теоретической механики. В каждой главе приведены примеры, которые нужны для успешного овладения теорией и приобретения минимальных навыков в решении задач. В приложении приведены плакаты, в которых кратко представлены материалы, изложенные в учебном пособии.

Пособие предназначено для докторантов, обучающихся по специальности 6D072400- Технологические машины и оборудование и будет полезным для преподавателей технических дисциплин, докторантов, магистрантов и студентов инженерных специальностей.

Рассмотрено и рекомендовано к печати учебно-методическим Советом Костанайского государственного университета имени А. Байтурсынова Протокол №

«__» _____ 201__ г.

ISBN

© Исинтаев Т.И.

© КГУ им. А.Байтурсынова

Содержание

Глоссарий	4
Введение	12
МОДУЛЬ 1. Введение в динамику механических систем	15
1.1 Основные понятия, аксиомы и теоремы динамики механических систем	15
1.2 Степени свободы механических систем	20
1.3 Дифференциальные уравнения движения механических систем	23
1.4 Геометрия масс механических систем	31
1.5 Вопросы для самоподготовки	37
МОДУЛЬ 2. Теоремы об изменении количества движения и кинетической энергии механических систем	38
2.1 Теоремы о движении центра масс	38
2.2 Теория удара	43
2.3 Кинетический момент механической системы	48
2.4 Кинетическая энергия системы	50
2.5 Изменения количества движения и кинетической энергии механических систем	53
2.6 Работа сил, приложенных к механической системе	60
2.7 Вопросы для самоподготовки	70
МОДУЛЬ 3. Потенциальное поле сил	71
3.1 Потенциальная энергия механической системы	71
3.2 Принцип Д'Аламбера	75
3.3 Определение динамических реакций	85
3.4 Принцип возможных перемещений механической системы	89
3.5 Эквивалентность принципа возможных перемещений и условия равновесия механической системы	91
3.6 Применение принципа возможных перемещений для определения реакций балок и рам	93
3.7 Вопросы для самоподготовки	98
МОДУЛЬ 4. Принцип Д'Аламбера – Лагранжа	100
4.1 Обобщение координаты механической системы	100
4.2 Обобщение сил и скорости механической системы	101
4.3 Структура уравнений Лагранжа	102
4.4 Устойчивость механических систем	110
4.5 Вопросы для самоподготовки	113
МОДУЛЬ 5. Малые колебания механических систем	114
5.1 Свободные колебания механических систем	114
5.2 Вынужденные колебания механических систем	119
5.3 Кинетическая и потенциальная энергия механических систем	123
5.4 Дифференциальное уравнение колебаний механических систем	126
5.5 Собственные частоты и собственные колебания механических систем ..	128
5.6 Вопросы для самоподготовки	131
Заключение	133
Список использованных источников	134
Приложения	135

ГЛОССАРИЙ

Абсолютно твердым телом (недеформируемым) называется тело, у которого расстояния между двумя любыми точками остаются неизменными.

Бинормаль – ось естественной системы координат, проходящая перпендикулярно соприкасающейся плоскости.

Вектор:

- главный системы сил – геометрическая сумма векторов сил данной системы;

- скользящий – вектор, имеющий возможность переноса точки его приложения вдоль линии действия без нарушения состояния тела, к которому он приложен;

- свободный – вектор, имеющий возможность параллельного переноса без нарушения состояния тела, к которому он приложен;

- угловой скорости тела – вектор, модуль которого равен абсолютному значению угловой скорости, направленный вдоль вращения тела в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против движения часовой стрелки;

- углового ускорения тела – вектор, модуль которого равен абсолютному значению углового ускорения, направленный вдоль оси вращения тела в направлении вектора угловой скорости (случай ускоренного вращательного движения твердого тела) или в противоположном (случай замедленного вращательного движения тела).

Время абсолютное – время, не зависящее от движения тел, одинаковое во всех точках пространства и во всех системах отсчета.

Годограф – кривая линия, представляющая собой геометрическое место концов переменного (изменяющегося со временем) вектора, значения которого в разные моменты времени отложены от общего начала.

Движение:

- абсолютное – движение, рассматриваемое по отношению к инерциальной системе отсчета;

- вращательное твердого тела – движение, при котором все точки, лежащие на некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными;

- замедленное – движение, при котором материальное тело (точка) за каждый равный последующий промежуток времени имеет меньшие перемещения;

- механическое – изменение с течением времени относительного положения материальных объектов;

- переменное – движение, при котором материальное тело (точка) за равные промежутки времени имеет различные перемещения;

- плоское (плоскопараллельное) твердого тела – сложное движение твердого тела, при котором его точки движутся в плоскостях, параллельных какой-либо неподвижной плоскости;

- по инерции – свойство материального тела (точки) сохранять состояние своего движения при отсутствии действия сил или их равновесии;

- поступательное твердого тела – движение тела, при котором всякая прямая, неизменно связанная с этим телом, в любой момент его движения остается параллельной своему первоначальному положению;

- равномерное движение, при котором материальное тело (точка) за равные промежутки времени имеет одинаковые перемещения;

- сложное движение, при котором материальное тело (точка) совершает два или более одновременных движений; - ускоренное – движение, при котором материальное тело (точка) за каждый последующий равный промежуток времени имеет большее перемещение.

Динама — совокупность силы и пары сил, лежащей в плоскости, перпендикулярной силе.

Динамика –раздел теоретической механики, изучающий движения материальных тел (точек) под действием приложенных к ним сил.

Задача:

- основная (прямая) задача динамики, в которой по заданному закону движения материальной точки (тела) определяются силы, вызывающие данное движение;

- основная (обратная) задача динамики, в которой по заданным силам, действующим на материальную точку (тело) определяется закон движения данной точки (тела);

- статически неопределимая –задача, в которой число неизвестных величин, входящих в составленные независимые уравнения превышает количество этих уравнений;

- статически определимая – задача, в которой число составленных независимых уравнений не менее количества искомых неизвестных величин, входящих в эти уравнения.

Звено:

- входное звено, имеющее начальное движение, которое должно быть преобразовано механизмом в требуемые движения других звеньев;

- выходное звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм.

Инертность – свойство материальных тел быстро или медленно изменять скорости своего движения под действием приложенных к ним сил.

Импульс:

- силы - вектор, равный произведению вектора силы на время ее действия;

- элементарный – произведение силы на элементарный промежуток времени ее действия.

Количество движения материальной точки – одна из основных мер механического движения; векторная величина, равная по модулю произведению массы точки на ее скорость и направленная вдоль вектора скорости точки.

Конус трения - – геометрическое место прямых линий, проведенных из некоторой точки под соответствующими углами трения к нормали опорной поверхности. конус трения является характеристикой изменения направления и числового значения вектора силы трения скольжения от направления относительного перемещения тела.

Коэффициент:

- полезного действия машины – отношение полезной работы к работе, произведенной двигателем;

- трения скольжения — безразмерная величина, зависящая от материала и степени шероховатости соприкасающихся поверхностей тел при их относительном скольжении;

- трения качения — линейная величина, зависящая от физико-механических свойств материалов тел при их относительном качении.

Кривизна:

- кривой линии – предел, к которому стремится средняя кривизна некоторой дуги при неограниченном сближении ее крайних точек;

- средняя -- отношение угла между касательными, проведенными к дуге кривой в двух ее крайних точках, к длине этой дуги.

Линия:

- действия силы – направление перемещения, которое получит под действием силы точка ее приложения, вначале находившаяся в состоянии покоя;

- центров -- линия, проходящая через центры тяжести соударяющихся тел.

Масса - физическая величина, одна из основных характеристик материи, определяющая ее гравитационные и инерционные свойства;

Масса материальной системы -- алгебраическая сумма масс всех материальных точек (тел), входящих в данную, систему.

Метод кинестатики – метод, основанный на принципе Д Аламбера, позволяющий решать задачи динамики с помощью методов статики.

Механизм – система тел, предназначенная для преобразования механического движения его входного звена в требуемое движение звена выходного;

- передаточный механизм, у которого движение выходного звена является заданной функцией движения входного звена;

- плоский механизм, траектории всех точек звеньев которого лежат в параллельных плоскостях;

- пространственный механизм, траектории некоторых точек которого являются пространственными кривыми относительно неподвижной системы отсчета или лежат в пересекающихся плоскостях.

Многоугольник сил – геометрическое построение ломаной линии, образованной последовательным параллельным переносом и геометрическим сложением векторов сил, входящих в систему сил, для определения главного вектора данной системы.

Модуль – числовое значение векторной величины.

Момент:

- главный системы сил относительно центра;
- векторная сумма моментов всех сил системы относительно этого центра;
- главный количеств движения относительно центра (оси) векторная (алгебраическая) сумма моментов количеств движения материальных точек, входящих в систему, относительно центра (оси);

- инерции – мера инертности тела при его вращательном движении;

- кинетический (см. главный момент количеств движения);

- количества движения - относительно точки – вектор, равный по модулю произведению модуля количества движения на длину перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия вектора количества движения, и направленный перпендикулярно плоскости действия момента таким образом, чтобы с его конца видно стремление вектора количества движения производить вращение против движения часовой стрелки;

- относительно оси – вектор, равный по модулю скалярному произведению модуля проекции вектора количества движения на плоскость, перпендикулярную оси, на кратчайшее расстояние от точки пересечения оси с плоскостью до линий действия данной проекции и направленный вдоль оси в сторону, с которой видно стремление вектора количества движения производить вращение против движения часовой стрелки.

Мощность – положительная скалярная величина, характеризующая работу, совершаемую в единицу времени.

Нормаль:

- перпендикуляр к касательной плоскости, проведенный через точку касания с поверхностью;

- главная - ось естественной системы координат, являющаяся перпендикуляром к касательной оси, лежащей в соприкасающейся плоскости, и имеющая положительное направление в сторону вогнутости траектории движения точки.

Ось вращения тела:

- прямая линия, связанная с телом, точки которой при движения тела остаются неподвижными;

- касательная – ось естественной системы координат, проведенная через точку по касательной к ее траектории и имеющая положительное направление в сторону вектора скорости данной точки;

- центральная тела – ось, проходящая через центр масс данного тела.

Пара сил – система двух параллельных сил, равных по модулю, направленных в противоположные стороны и не имеющих общую линию действия.

Параллелограмм сил – геометрическое построение, выражающее закон сложения сил: вектор, изображающий силу, равную геометрической сумме двух сил, является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на его сторонах.

Перемещения:

- возможные механической системы –элементарные (бесконечно малые) перемещения, которые точки механической системы могут совершать из занимаемого ими в данный момент времени положения, не нарушая наложенных на систему связей;

- элементарные – перемещения точек за бесконечно малый промежуток времени.

Плечо:

- пары сил – линейная величина, определяемая кратчайшим расстоянием между линиями действия сил, входящих в данную пару;

- силы - линейная величина, определяемая кратчайшим расстоянием (перпендикуляром) от точки до линии действия силы.

Плоскость:

- действия момента силы относительно точки (полюса, центра) – плоскость, проходящая через вектор силы и точку (полюс), относительно которой рассматривается данный момент силы;

- действия пары сил – плоскость, в которой лежат векторы сил, образующих данную пару;

- нормальная – плоскость в естественной системе координат, проходящая через главную нормаль перпендикулярно соприкасающейся плоскости;

- соприкасающаяся– плоскость в естественной системе координат, проходящая через касательную ось и точку, лежащую на траектории движения и удаленную от центра данной системы на элементарно малое расстояние.

Принцип:

- возможных перемещений – один из вариационных принципов механики, устанавливающий общие условия равновесия механической системы;

- принцип Д Аламбера – принцип, согласно которому уравнения движения тел можно составлять в форме уравнений статики, если к действующим на тело силам и реакциям связей присоединить силы инерции;

- принцип Д Аламбера – Лагранжа – один из основных принципов механики, дающий общий метод решения задач динамики и статики; объединяет в себе принцип возможных перемещений и метод кинетостатики;

- отвердевания – аксиома статики, согласно которой, если тело деформируемое, находящееся под действием системы сил в состоянии равновесия, станет абсолютно твердым, то его равновесие не нарушится.

Работа:

- постоянной силы на прямолинейном отрезке – скалярная величина, равная произведению модуля силы на длину участка перемещения точки приложения силы и на косинус угла между направлениями вектора силы и перемещения;

- силы элементарная – работа силы на бесконечно малом перемещении точки приложения силы.

Равновесие – неизменное положение тела по отношению к выбранной системе отсчета.

Радиус:

- инерции – кратчайшее расстояние от оси какой-либо точки, в которой необходимо сосредоточить всю массу тела, чтобы момент инерции этой сосредоточенной массы был равен моменту инерции тела относительно данной оси;

- кривизны – величина, обратная кривизне кривой линии.

Реакция связи – сила взаимодействия между рассматриваемым материальным телом и телом, осуществляющим связь.

Связь – условие (тело), ограничивающее свободу движения рассматриваемого материального тела.

Сила:

- мера механического воздействия одного материального объекта на другой;

- внешняя сила взаимодействия между отдельными материальными точками (телами), входящими в различные системы;

- внутренняя сила взаимодействия между отдельными материальными точками телами), входящими в одну систему;

- восстанавливающая сила, стремящаяся вернуть материальную точку (тело) в положение равновесия;

- инерции – сила, равная по модулю произведению массы материальной точки на модуль ее ускорения и направленная в сторону, противоположную ускорению;

- равнодействующая – сила, эквивалентная системе сил;

- распределенная – совокупность сил, действующих на ряд точек материального тела по некоторому объему, площади или линии;

- сосредоточенная – сила, приложенная к материальному телу в какой-либо одной его точке;

- силовое поле – область (часть пространства), в каждой точке которой на помещенную в ней материальную точку действует сила, однозначно определенная по величине и направлению в любой момент времени.

Скорость:

- точки – векторная величина, характеризующая для каждого данного момента времени быстроту движения точки и направление этого движения;

- угловая тела – векторная величина, характеризующая изменение угла поворота тела с течением времени.

Система:

- гелиоцентрическая – инерциальная система отсчета (координат) с солнцем, принятым за центр, и координатными осями, направленными на неподвижные звезды;

- геоцентрическая – инерциальная система отсчета (координат) с землей, принятой за центр, и координатными осями, направленными на неподвижные звезды;

- механическая (материальных точек) – совокупность материальных точек, известным способом связанных между собой так, что каждая из них не может перемещаться независимо от остальных;
- сил - совокупность сил, приложенных к твердому телу (материальной точке);
- параллельных – система сил, линии действия которых, параллельны;
- плоская – система сил, векторы которых расположены в одной плоскости;
- произвольная – система сил с произвольным расположением их векторов;
- пространственная -- система сил, векторы которых не лежат в одной плоскости;
- сходящихся – система сил, линии действия которых, пересекаются в одной точке;
- уравновешенная – система сил, под действием которой твердое тело находится в состоянии равновесия;
- эквивалентная – система сил, которой можно заменить иную систему сил, приложенную к твердому телу, не нарушая при этом его состояния покоя или не изменяя его движения;
- отсчета -- система координат, неизменно связанная с каким-либо физическим телом, относительно которого определяется положение изучаемого объекта;
- отчета инерциальная – система отсчета, относительно которых материальная точка при отсутствии внешних воздействий сохраняет величину и направление своей скорости неограниченно долго

Состояние покоя -- (см. равновесие).

Тело:

- абсолютно твердое – тело, у которого расстояние между двумя точками не изменяются, независимо от действия других тел;
- несвободное – материальное тело, имеющее ограничение (ограничения) в свободе его перемещения;
- переменной массы – материальное тело, масса которого изменяется с течением времени;
- свободное – материальное тело, которое имеет возможность любого перемещения в пространстве.

Точка:

- материальная – материальное тело, обладающей массой, размерами которого можно пренебречь
- изолированная – материальная точка, находящаяся вне воздействия других материальных точек (тел);
- приложения силы – материальная частица тела, на которую действует сила.

Траектория движения точки – геометрическое место последовательных положений движущейся точки.

Трение:

- качения – сопротивление, возникающее при качении одного твердого тела по поверхности другого;
- скольжения – сопротивление, возникающее при скольжении одного твердого тела по поверхности другого.

Угол трения – характеристика трения скольжения; угол между равнодействующей сил трения скольжения и нормальной реакции нормали к опорной поверхности.

Ускорение:

- точки – векторная величина, характеризующая изменение числового значения и направления вектора скорости точки по времени;
- касательное – составляющая ускорения материальной точки при криволинейном движении с направлением вектора по касательной к траектории; характеризует изменение числового значения вектора скорости точки по времени;
- нормальное – составляющая ускорения материальной точки при криволинейном движении, направленная по главной нормали к траектории в сторону центра кривизны; характеризует изменение вектора скорости движения точки по направлению;
- угловое тела – векторная величина, характеризующая изменение вектора угловой скорости с течением времени.

Ферма – конструкция, состоящая из стержней, соединенных между собой по концам шарнирами, и образующих геометрически неизменяемую систему.

Фигура плоская – сечение тела плоскостью, параллельной той неподвижной плоскости, по отношению к которой рассматривается плоское (плоскопараллельное) движение данного тела.

Центр тяжести тела – неизменно связанная с материальным телом геометрическая точка, через которую проходит линия действия силы тяжести данного тела при любом его положении в пространстве.

Частота вращения тела – количество оборотов, совершаемых телом за 1 минуту;

Число:

- передаточное механизма – отношение угловых скоростей ведущего и ведомого звеньев механизма;
- степеней свободы твердого тела – число простейших (поступательных, вращательных) движений твердого тел относительно выбранной системы отсчета.

Энергия:

- одна из основных мер механического движения;
- кинетическая энергия – скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости;
- потенциальная энергия – сумма работ сил, действующих на точки системы при ее перемещении из одного положения в другое.

ВВЕДЕНИЕ

Подобно всем другим наукам механика возникла и развивалась под влиянием практических нужд человеческого общества. Она является одной из древнейших наук, и ее история насчитывает приблизительно 25 веков напряженных исканий. В примитивном виде первичные понятия механики, в частности, понятия силы и скорости, появились еще в античный период.

Чисто практическое применение катков, наклонной плоскости, рычага, блоков при постройке грандиозных сооружений древности (пирамиды, дворцы, храмы и т. п.) накапливало определенный опыт и, очевидно, должно было привести к обобщению этого опыта, к установлению некоторых законов механики (статики). Так, в трактате «Механические проблемы» Аристотель (384 – 322 до н. э.) рассматривает конкретные практические задачи при помощи метода, основанного на законе рычага.

Однако первые попытки установления динамических законов оказались неудачными. Аристотель ошибочно полагал, что скорости падающих тел пропорциональны их весам и что равномерное и прямолинейное движение является результатом действия постоянной силы. Потребовалось почти два тысячелетия, чтобы преодолеть эти ошибочные представления и заложить научные основы динамики.

К числу бесспорных достижений античной механики следует отнести работы Архимеда (287 – 212 до н. э.), который был не только выдающимся инженером своего времени, но и дал ряд научных обобщений, относящихся к гидростатике (закон Архимеда), учению о равновесии и центре тяжести.

В течение XIV – XVII столетий под влиянием торгового мореплавания и военного дела возник обширный комплекс задач, связанных с движением небесных тел, полетом снарядов, прочностью кораблей, ударом тел. Решение этих задач не могло быть осуществлено старыми методами и требовало, прежде всего, установления связи между движением и причинами, вызывающими его изменение.

Созданию основ динамики предшествовал сравнительно длительный период накопления опытных данных и их научного анализа. Здесь необходимо, прежде всего, отметить работы Н. Коперника (1473 – 1543), который на основе данных, установленных многовековыми наблюдениями, показал, что планеты обращаются не вокруг Земли, а вокруг Солнца.

Дальнейший шаг к изучению движения небесных тел сделал Иоганн Кеплер (1571 – 1630). Обработывая многочисленные наблюдения своего учителя Тихо Браге (1546- 1601), он установил три закона движения планет.

К этому же периоду относятся работы Галилео Галилея (1564 – 1642), который ввел понятия скорости, ускорения и сформулировал закон инерции.

Последователем Галилея в области механики был Христиан Гюйгенс (1629 – 1695), который сформулировал понятия центростремительной и центробежной сил, исследовал колебания физического маятника, заложил основы теории удара.

В 1687 г. вышла в свет книга Исаака Ньютона (1642 – 1727) «Математические начала натуральной философии» (в Англии натуральной философией называют физику). Прежде всего, в этой книге Ньютон, завершая работы своих предшественников, главным образом Галилея и Гюйгенса, создает стройную систему основных законов динамики. Он впервые вводит понятие массы, устанавливает основной закон динамики, связывающий массу точки, ее ускорение и действующую на нее силу, и закон равенства действия и противодействия.

Исходя из законов Кеплера, он математически установил закон всемирного тяготения, а затем доказал, что если этот закон справедлив, то планеты должны двигаться по законам Кеплера. Ньютон установил также тождественность природы сил взаимного тяготения и силы тяжести на Земле. Он показал, что Земля сплюснута у полюсов, объяснил явления приливов и отливов, заложил основы теории удара.

Период развития механики после Ньютона в значительной мере связан с именем Л. Эйлера (1707 – 1783), отдавшего большую часть своей исключительно плодотворной деятельности Петербургской Академии наук, членом которой он стал в 1727 г. Эйлер развил динамику точки (им была дана естественная форма дифференциальных уравнений движения материальной точки) и заложил основы динамики твердого тела, имеющего одну неподвижную точку («динамические уравнения Эйлера»), нашел решения этих уравнений при движении тела по инерции. Ему принадлежит заслуга создания первого курса механики в аналитическом изложении.

К этому же периоду относится глубокая разработка механики свободных и несвободных систем материальных точек. Развитие этого направления было дано работами Ж. Д'Аламбера (1717 – 1783), Ж. Лагранжа (1736 – 1813). Дальнейшее обоснование принципа возможных перемещений, сформулированного Лагранжем, было проведено П. Лапласом (1749 – 1827), который ввел реакции связей, действующие на каждую точку материальной системы, и сделал предположение об идеальности связей. М. Остроградский (1801 – 1861) обобщил принцип возможных перемещений, распространив его на неудерживающие связи.

Существенное развитие получила теория устойчивости равновесия и движения, начала которой были даны еще Лагранжем; наиболее крупные результаты здесь принадлежат Н. Е. Жуковскому (1847 – 1921), А. Пуанкаре (1854 – 1912) и в особенности А. М. Ляпунову (1857 – 1918).

Проблема борьбы с опасными вибрациями машин и сооружений вызвала к жизни углубленную разработку теории колебаний (исследования Рэлея (1842 – 1919), А. Пуанкаре, А. Н. Крылова).

В механике зародилась теория автоматического регулирования (работы И. А. Вышнеградского (1831 – 1895); в настоящее время эта теория представляет собой самостоятельную научную дисциплину, которую связывают с механикой, помимо исторических корней, теория устойчивости движения и теория колебаний.

В XIX веке сложилась теория упругости – наука о законах статического и динамического деформирования упругих тел (работы Эйлера, Навье (1785 – 1836), Коши (1789 – 1857), Сен-Венана (1797 – 1886)). В настоящее время ее начинают называть теорией твердого деформируемого тела в связи с расширением представления о законах деформирования и учетом вязких и пластичных свойств реальных тел.

В известных работах И. В. Мещерского (1859 – 1935) заложены основы механики тела переменной массы (переменного состава) – дисциплины, служащей фундаментом изучения реактивного полета. основополагающими работами в области ракетодинамики являются работы К. Э. Циолковского (1857 – 1935).

Общепризнанными в СНГ и в дальнем зарубежье являются результаты фундаментальных исследований в области динамики механических систем, проведенных У. Джолдасбековым (1931-1999), основателем казахстанской школы механиков и его учениками Ж. Байгунчевым, М. Молдабековым, Г. Уалиевым, Е. Рахимовым, К. Ивановым и др.

Ими были разработаны основы графоаналитической и аналитической теории плоских и пространственных механизмов и манипуляционных устройств высоких классов с одной и многими степенями свободы, с абсолютным и относительным законом движения входного звена, с учетом и без учета упругости звеньев, на базе которых спроектированы принципиально новые грузоподъемные, погрузочно-разгрузочные, грейферные, грузозахватные и манипуляционные устройства.

Целью предлагаемого учебного пособия является углубленное освоение законов и положений раздела «Динамика», изучаемой в бакалавриате дисциплины «Теоретическая механика».

Задачами учебного пособия являются способствовать докторантам в:

- изучении внутренних инертных свойства механических систем;
- освоении взаимодействия элементов механических систем при их взаимном перемещении в пространстве и времени;
- определении воздействия на механическую систему других материальных объектов.

В учебном пособии рассмотрены теоретические вопросы математических исследований динамических процессов в механических системах с применением метода сквозных задач, суть которого заключается в поиске логической взаимосвязи изучаемого теоретического материала с реальными инженерно-техническими решениями.

Учебное пособие предназначено для докторантов, обучающихся по специальности 6D072400 – Технологические машины и оборудование и будет полезным для преподавателей, докторантов, магистрантов и студентов инженерных специальностей.

МОДУЛЬ 1. Введение в динамику механических систем

1.1 Основные понятия, аксиомы и теоремы динамики механических систем

Законы, к рассмотрению которых мы переходим, были сформулированы Ньютоном для абсолютной неподвижной системы отсчета, но они справедливы также и для любых инерциальных – галилеевых систем отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно такой неподвижной системы координат.

Вопрос о том, можно ту или иную систему считать инерциальной решается путем проведения физического эксперимента.

Например, для задач астрономии инерциальной можно считать гелиоцентрическую систему отсчета с осями координат, направленными на «неподвижные» звезды, а при решении технических задач – систему координат, связанную с Землей. Отметим, что эти законы были сформулированы для частного случая твердого тела – материальной точки.

Под *механической системой* понимают совокупность материальных точек, связанных друг с другом.

В зависимости от того, насколько прочно связаны точки системы, они могут образовать тот или иной материальный объект – от абсолютно твердого тела до системы точек вообще не связанных друг с другом.

Все силы, действующие на i -ую точку системы, делятся на два класса.

Внешними – $F_i^{(e)}$ называются силы, действующие со стороны тел, не входящих в систему.

Внутренними – $F_i^{(i)}$ называются силы, действующие со стороны других тел той же системы.

Например, для механической системы, состоящей из двух тел – Земли и Луны, силы их взаимного притяжения $F_{зл}$ и $F_{лз}$, приложенные к Земле и Луне соответственно будут внутренними силами системы, а силы притяжения, приложенные к ним со стороны Солнца – $F_{зс}$ и $F_{лс}$ – внешними. •

В общем случае, предполагается, что положение и движение каждой точки системы может влиять на положение и движение остальных.

Однако даже в том случае, когда точки системы не связаны друг с другом, i -ая точка системы не будет свободной, если она не может занимать в пространстве произвольное положение.

Определение. Условия, ограничивающие свободу перемещения точки системы, называются *связями*.

В простейшем случае связь – это линия или поверхность, по которой может перемещаться точка. Уравнение такой поверхности:

$$f(x, y, z) = 0 \quad (1.1)$$

называется *уравнением связи*. Этому уравнению должны удовлетворять координаты движущейся точки.

Однако понятие связи в динамике шире, чем в статике. Например, поверхность, представляющая собой связь, может меняться во времени. И в

общем случае уравнение связи имеет вид:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0. \quad (1.2)$$

Таким образом, движение точки, на которую действует сила сопротивления, пропорциональная скорости, также представляет пример точки с наложенной на нее связью.

Все силы, действующие на i -ую точку системы, делят, как и в статике, на активные и реакции связей.

Реакции связей в динамике, в отличие от статики, зависят не только от активных сил, но и от характера движения тела.

Классификацию связей можно проводить по различным признакам.

По зависимости от скорости связи делятся на:

– голономные или геометрические – уравнения таких связей не зависят от скорости точки;

– неголономные – это связи, которые зависят от скорости.

По зависимости от времени связи подразделяются на:

– стационарные связи, которые не зависят явно от времени;

– нестационарные, уравнения которых зависят от времени;

В зависимости от конструктивных особенностей различают:

– неудерживающие или односторонние;

– удерживающие или двусторонние связи.

Примером последней связи служит точка на конце стержня длиной l , закрепленного шарнирно в центре O и вращающегося в плоскости xOy .

Такая геометрическая, стационарная и двусторонняя связь описывается уравнением:

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0.$$

Если вместо стержня взять гибкую нить, получим пример односторонней связи:

$$x^2 + y^2 - l^2 \leq 0. \quad \bullet$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением голономных механических систем.

Аксиома 1. (Закон инерции). Под действием уравновешенной системы сил тело движется прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя.

Аксиома 2. (Основной закон динамики). Ускорение a , приобретаемое телом, пропорционально приложенной к нему силе F , и обратно пропорционально массе этого тела m .

Мы будем записывать этот закон в виде:

$$ma = -F. \quad (1.3)$$

Отметим, во-первых, что $a \uparrow F$, а, во-вторых, что закон и соответственно уравнение (1.3) называются основными потому, что связывают воедино кинематические характеристики – a , внешние воздействия – F и внутренние свойства носителя движения – m .

Аксиома 3. (Закон равенства действия и противодействия). Два тела взаимодействуют с силами, равными по величине, действующими вдоль одной прямой, соединяющей точки их приложения и направленными в противоположные стороны.

На основании аксиомы 3 внутренние силы системы попарно равны и противоположно направлены, поэтому *главный вектор и главный момент внутренних сил системы равны нулю*:

$$\mathbf{R}^{(i)} = \sum \mathbf{F}_i^{(i)} = \mathbf{0}; \quad (1.4)$$

$$\mathbf{M}_o^{(i)} = \sum \mathbf{M}_o(\mathbf{F}_i^{(i)}) = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(i)}) = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

Аксиома 4. (Закон независимости действия сил). Если на тело одновременно действует несколько сил, то ускорение, приобретаемое телом, равно геометрической сумме ускорений от каждой силы в отдельности.

Это обобщение аксиомы параллелограмма из статики на динамику, допускающее в соотношении (1.1) для i -ой силы:

$$m\mathbf{a}_i = -\mathbf{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.6)$$

провести операцию суммирования:

$$\sum m\mathbf{a}_i = \sum \mathbf{F}_i, \quad (1.7)$$

и получить в результате соотношение (1.6), где $\mathbf{a} = \sum \mathbf{a}_i$ и $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ соответственно – ускорение материальной точки и равнодействующая всех сил, приложенных к ней.

Аксиома 5. (Принцип освобождаемости от связей). Несвободное тело можно считать свободным, если вместе с активными силами приложить к нему реакции отброшенных связей. Эта аксиома отсутствует в оригинальной работе у И. Ньютона, который не рассматривал движение несвободных тел, и существенно отличается от принципа освобождаемости из статики, поскольку понятие связи в динамике гораздо шире, чем в статике. Впервые движение несвободных материальных тел было рассмотрено Д'Аламбером и Лагранжем.

Две задачи динамики. В динамике решают две основные задачи, которые мы и рассмотрим. Методика решения каждой из этих задач зависит от способа задания движения точки.

Первая задача динамики. Задача формулируется следующим образом: *найти силу, действующую на точку с массой m , движущуюся по известному закону.*

Решение задачи основано на умении находить вектор ускорения \mathbf{a} при различных способах задания движения.

- *Векторный способ задания движения* предполагает, что известна зависимость $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Чтобы решить поставленную задачу нужно определить ускорение $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$, а затем с помощью (1.6) – искомую силу $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = md^2\mathbf{r}/dt^2$.

- *Координатный способ задания движения* предполагает, что известны зависимости:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \quad (1.8)$$

Дифференцируя их дважды, найдем проекции вектора ускорения на оси координат:

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = f_1''(x), \\ a_y &= \ddot{y} = f_2''(x), \\ a_z &= \ddot{z} = f_3''(x), \end{aligned} \tag{1.9}$$

откуда с помощью (1.4) – проекции искомой силы: F_x , F_y и F_z , по которым легко найти ее модуль и направление:

$$\begin{aligned} F &= |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \\ \cos(\mathbf{F}, \mathbf{i}) &= F_x/F, \cos(\mathbf{F}, \mathbf{j}) = F_y/F, \cos(\mathbf{F}, \mathbf{k}) = F_z/F. \end{aligned}$$

Пример 1.1. Найти силу, под действием которой точка с массой m движется по закону:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega t), \\ y &= b \sin(\omega t). \end{aligned} \tag{a}$$

Решение: Исключив из этих соотношений время t , получим уравнение траектории движущейся точки:

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1.$$

Дифференцируя (a), получим:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos \omega t, \\ \ddot{y} &= -b\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Подставляя в (1.2), найдем:

$$\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} = -m\omega^2 x, \\ F_y &= m\ddot{y} = -m\omega^2 y, \end{aligned}$$

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2 r, \cos(\mathbf{F}, \mathbf{i}) = -x/r, \cos(\mathbf{F}, \mathbf{j}) = -y/r,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рисунок 1.1).

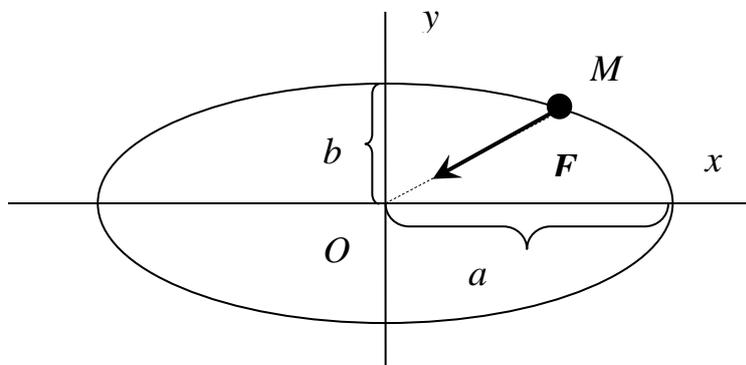


Рисунок 1.1

Ответ: точка движется в плоскости xOy под действием квазиупругой силы $\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}$.

• *Естественный способ задания движения* предполагает, что известна траектория и закон движения точки по траектории:

$$s = f(t) \quad (1.9)$$

Чтобы найти действующую на точку силу нужно вычислить проекцию вектора скорости на направление орта касательной:

$$v_\tau = ds/dt = \dot{s},$$

проекции касательного и нормального ускорений:

$$a_\tau = d^2s/dt^2 = \ddot{s}, \quad a_n = v^2/\rho,$$

а затем из уравнений (1.3) определить проекции вектора силы на эти направления:

$$F_\tau = ma_\tau \text{ и } F_n = ma_n.$$

После этого легко найти ее модуль и направление:

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad \cos(\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) = F_\tau/F, \quad \cos(\mathbf{F}, \mathbf{n}) = F_n/F.$$

Пример 1.2. Найти силу натяжения нити \mathbf{T} и скорость \mathbf{v} конического маятника весом \mathbf{P} , если нить длиной l образует с вертикалью угол α (рисунок 1.2).

Решение: Проектируя основное уравнение динамики для нашей задачи:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

на оси естественной системы координат $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} и \mathbf{b} , получим:

$$m dv/dt = 0; \quad (\text{а})$$

$$mv^2/\rho = T \sin \alpha; \quad (\text{б})$$

$$0 = T \cos \alpha - P, \quad (\text{в})$$

где $P = mg$.

Из (а) следует, что $v = \text{const}$, а из (в) получим:

$$T = P/\cos \alpha.$$

Подставляя последнее выражение в (б), получим:

$$mv^2/(l \sin \alpha) = mg \tan \alpha,$$

откуда найдем скорость конического маятника:

$$v = \sqrt{gl \sin \alpha \tan \alpha}.$$

Ответ: $T = P/\cos \alpha, v = \sqrt{gl \sin \alpha \tan \alpha}$

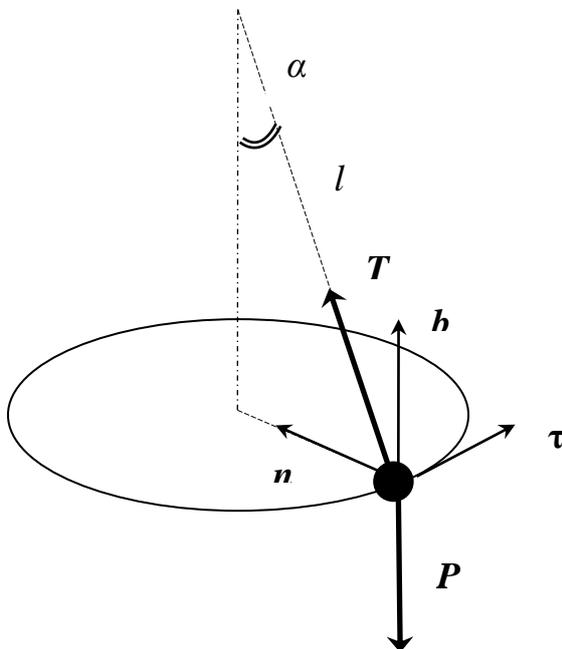


Рисунок 1.2

Вторая задача динамики. Задача формулируется следующим образом: *найти закон движения точки с массой m , движущейся под действием заданной силы при известных начальных условиях.*

Математически поставленная задача сводится к решению задачи Коши для системы ДУ второго порядка:

$$\begin{aligned} md^2x/dt^2 &= F_x, \\ md^2y/dt^2 &= F_y, \\ md^2z/dt^2 &= F_z, \end{aligned} \quad (1.10)$$

при заданных *начальных условиях*:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_{x0}, \\ y(0) &= y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_{y0}, \\ z(0) &= z_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0 = v_{z0}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

При этом F_x , F_y и F_z в общем случае являются функциями следующих переменных: $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Примечания:

1. Решение первой задачи динамики сводится к операциям дифференцирования известного закона движения либо заданного закона изменения скорости.

2. Решение второй задачи динамики сводится к операциям интегрирования и поэтому эта задача, во-первых, является более сложной, а во-вторых, она может допускать различные аналитические выражения одного результата.

3. При решении, как первой, так и второй задачи рекомендуется придерживаться следующего плана:

- выбрать тело, движение которого будем рассматривать;
- выбрать систему координат, направив оси в сторону движения;
- приложить к рассматриваемому телу активные силы и, отбросив связи, заменить их неизвестными реакциями;
- записать ДУ движения в координатной (1.8) или естественной (1.9) форме;
- определить действующие на тело силы или найти закон движения.

1.2 Степени свободы механической системы

Как уже было отмечено, точки системы с наложенными на них связями, являются несвободными.

Определение. Степенью свободы механической системы, называется минимальное число параметров – s , определяющих положение системы в пространстве.

Для точки на плоскости $s = 2$, и в качестве параметров можно выбрать ее декартовы координаты, а система N точек на плоскости будет иметь $2N$ степеней свободы.

Если две свободные точки на плоскости ($s = 4$) соединить стержнем, получим систему с тремя степенями свободы и естественно предположить, что

всякое наложение дополнительной связи уменьшает степень свободы системы на единицу.

Поэтому число степеней свободы плоской статически определимой фермы можно найти по формуле:

$$s = 2U - C - C_0, \quad (1.12)$$

где U – число узлов (шарниров) фермы, C – число ее стержней, а C_0 – число опорных связей.

Чтобы однозначно определить положение плоской фигуры нужно задать уже три параметра: координаты полюса A – x_A , y_A и угол ее поворота вокруг этого полюса – φ .

На практике бывает удобнее пользоваться другим определением, эквивалентным предыдущему:

Определение. Степень свободы системы s равна минимальному числу дополнительных связей, превращающих ее в неподвижную систему.

При определении числа степеней свободы системы необходимо проанализировать ее структуру, уточнить какие связи в явной или неявной форме уже наложены на систему и какие возможные перемещения системы они допускают. Эти условия надо соблюдать и при наложении дополнительных связей.

Пример 1.3. Определить число степеней свободы фермы (рисунок 1.3).

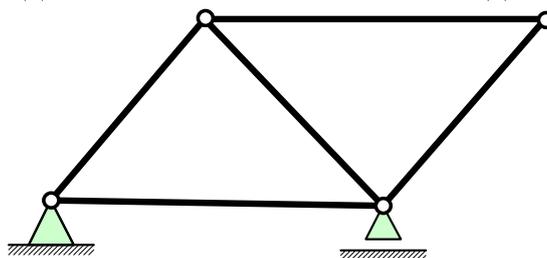


Рисунок 1.3

Решение: Число узлов фермы – 4, число ее стержней – 5, число опорных связей – 3. По формуле (1.12) получим:

$$s = 2 \cdot 4 - 5 - 3 = 0.$$

Ответ: число степеней свободы фермы $s = 0$.

Пример 1.4. Определить число степеней свободы системы, предполагая, что все грузы движутся прямолинейно (рисунок 1.4).

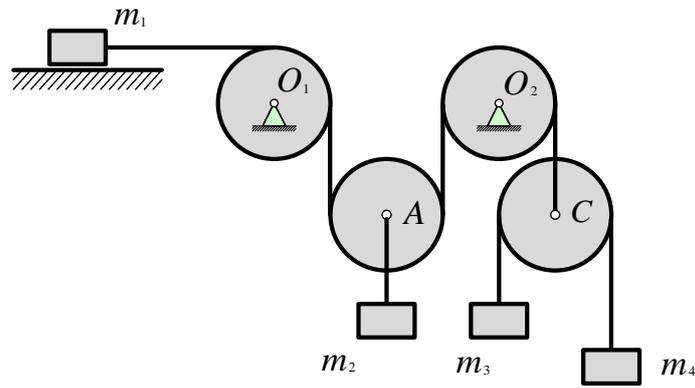


Рисунок 1.4

Решение: Закрепим тело с массой m_1 , то есть наложим на систему дополнительную – *линейную* связь, препятствующую смещению этого тела. Тогда диск A с прикрепленной к нему массой m_2 сможет перемещаться только вследствие вращения диска с центром O_2 .

Наложим на систему вторую дополнительную – *моментную* связь, препятствующую вращению этого диска. Тогда грузы с массами m_1 и m_2 будут оставаться неподвижными, а грузы с массами m_3 и m_4 смогут перемещаться вследствие вращения диска с центром C .

Наложим на систему третью дополнительную связь, препятствующую вращению этого диска. Теперь все четыре груза будут неподвижными. Таким образом, $s = 3$.

Ответ: число степеней свободы системы $s = 3$.

Пример 1.5. Определить число степеней свободы системы, состоящей из поступательно движущегося тела A , барабана B и дисков C и D с намотанными на них нитями, если центры последних движутся вертикально (рисунок 1.5, а).

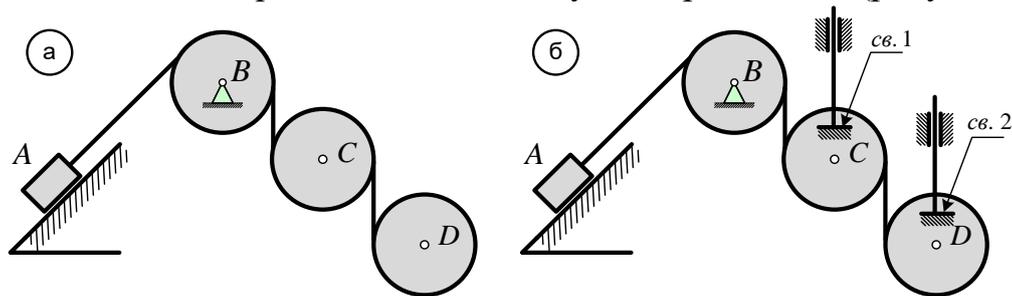


Рисунок 1.5

Решение: Закрепим тело A , наложив на систему дополнительную линейную связь, препятствующую его смещению. При этом барабан B также будет оставаться неподвижным, а перемещаться смогут только диски C и D .

Наложим на систему вторую дополнительную – *моментную* связь, препятствующую вращению диска C .

Фактически это означает, что на него наложена связь в виде скользящей заделки, поскольку по условию задачи этот диск может перемещаться только вертикально. При этом центр диска C также будет оставаться неподвижным, а нить между телами B и C – натянутой, и перемещаться сможет только диск D .

Вводя, наконец, третью дополнительную связь, препятствующую вращению диска D , мы получим систему, число степеней свободы которой равно нулю. Таким образом, $s = 3$. При этом с учетом условий задачи и дополнительно наложенных связей система примет вид, показанный на рисунке 1.5, б.

Отметим, что было бы неправильно вместо второй дополнительной *моментной* связи, препятствующей вращению диска C , ввести линейную связь, которая исключает линейное перемещение его центра, поскольку нить не препятствует вращению этого диска по ходу часовой стрелки.

Аналогичное замечание касается и диска D .

Ответ: число степеней свободы заданной системы равно трем: $s = 3$.

1.3 Дифференциальные уравнения движения материальной точки и системы

Под законом движения в кинематике понимают алгоритм, позволяющий определить положение движущейся точки в пространстве в любой момент времени.

Различают три способа задания движения: векторный, координатный и естественный. Первый из них представляет собой, главным образом, теоретический интерес, а два последних имеют непосредственное практическое значение.

Дифференциальные уравнения в декартовых координатах. Проектируя основное уравнение динамики (1.3) на оси декартовой прямоугольной системы координат, получим:

$$\begin{aligned} ma_x &= m\ddot{x} = F_x, \\ ma_y &= m\ddot{y} = F_y, \\ ma_z &= m\ddot{z} = F_z. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Полученная система трех дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих движение материальной точки, и называется дифференциальными уравнениями (ДУ) движения материальной точки в декартовых координатах.

Дифференциальные уравнения в естественных координатах. Проектируя основное уравнение динамики (1.3) на оси естественной системы координат, получим:

$$\begin{aligned} ma_\tau &= m \frac{dv}{dt} = F_\tau, \\ ma_n &= m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \\ 0 &= F_b. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Полученная система дифференциальных уравнений называется дифференциальными уравнениями (ДУ) движения материальной точки в

естественных координатах.

Напомним, что вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и проекция ускорения на бинормаль – a_b равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек M_i с массами m_i ($i = 1, 2, \dots, n$), на каждую из которых действует равнодействующая внешних $F_i^{(e)}$ и внутренних $F_i^{(i)}$ сил.

Для каждой точки системы можно записать основное уравнение динамики:

$$m_i a_i = F_i^{(e)} + F_i^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.15)$$

Проектируя каждое из уравнений (1.3) на оси координат, получим систему $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих движение системы ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{x_i}^{(e)} + F_{x_i}^{(i)}, \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{y_i}^{(e)} + F_{y_i}^{(i)}, \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{z_i}^{(e)} + F_{z_i}^{(i)}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

Эти уравнения и называются дифференциальными уравнениями движения системы. Вместе с соответствующими начальными условиями они образуют задачу Коши, решив которую, мы найдем закон движения механической системы.

О том, насколько сложной является поставленная задача можно судить хотя бы по тому, что к настоящему времени в общем виде она решена только для $n = 2$.

Как же изучать движение систем с большим числом степеней свободы и систем с *распределенными параметрами*, у которых число степеней свободы равно бесконечности?

Во-первых, для решения уравнений (1.16) остаются численные методы, и каждый раз, например, такую задачу решают при стыковке космического корабля с орбитальной станцией.

Во-вторых, очень часто нет необходимости в детальном исследовании движения каждой точки системы и достаточно знания некоторых его интегральных характеристик. Например, при изучении движения потока жидкости или газа.

Эффективным методом исследования движения механических систем является применение *общих теорем динамики*.

Для реализации этого подхода нужно уметь описывать:

- конфигурацию и распределение масс точек системы в пространстве, что носит условное название *геометрии масс*;
- движение центра масс системы;
- движение точек системы вокруг центра масс.

Ниже приведены наиболее часто встречающиеся задачи для решения которых применяются дифференциальные уравнения движения материальных точек и механических систем

Прямолинейное движение точки: Если точка движется вдоль оси Ox , задача примет следующий вид:

$$m\ddot{x} = F_x \quad (1.17)$$

при заданных начальных условиях:

$$x(0) = x_0 ; \dot{x}(0) = v_0 . \quad (1.18)$$

Отметим, что если в уравнении (1.17) $F_x = F = \text{const}$, то ускорение $\ddot{x} = a_x = a$ тоже постоянно и мы имеем случай равнопеременного движения, уже изученного в кинематике.

Тем не менее, мы остановимся на нем, чтобы рассмотреть два способа решения этой задачи (1.17) и (1.18).

Первый способ решения задачи (1.17) и (1.18). Дифференциальное уравнение (1.17) второго порядка с помощью *первой подстановки*:

$$a = dv/dt$$

сведем к системе двух ДУ первого порядка:

$$dv/dt = F/m , \quad (1.19)$$

$$dx/dt = v . \quad (1.20)$$

Интегрируя (1.19) с учетом (1.18), получим *закон изменения скорости* или, с точки зрения математики, *первый интеграл* ДУ (1.17):

$$v = v_0 + (F/m) t , \quad (1.21)$$

подставляя который в (1.20), получим *закон движения* или *второй интеграл*, то есть искомое решение задачи (1.17) и (1.18):

$$x = x_0 + v_0 t + (F/2m) t^2 . \quad (1.22)$$

Второй способ решения задачи (1.17) и (1.18).. С помощью *второй подстановки*:

$$a = (dv/dt)(dx/dx) = (dx/dt)(dv/dx) = v(dv/dx), \quad (1.22)$$

которая, в отличие от первой, *не зависит от времени t* , сведем уравнение (1.17) к системе двух ДУ первого порядка:

$$v(dv/dx) = F/m , \quad (1.23)$$

$$dx/dt = v . \quad (1.24)$$

Разделяя в (1.23) переменные, получим с учетом (1.18):

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x (F/m) dx$$

откуда

$$v^2 - v_0^2 = (2F/m)(x - x_0),$$

то есть

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2F}{m}(x - x_0)}. \quad (1.25)$$

Последняя зависимость $v = v(x)$ также является первым интегралом ДУ (1.17). Подставляя (1.25) в (1.24) и разделяя переменные, получим:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2F}{m}(x - x_0)}} = \int_0^t dt. \quad (1.26)$$

Это закон движения или второй интеграл ДУ (1.17).

• Например, для $x_0 = v_0 = 0$, $m = 2F$ из (1.18) получим: $x = t^2/4$. Вычисляя интеграл (1.26) приходим к выражению:

$$\int_0^x \frac{dx}{x} = \int_0^t dt,$$

откуда $2\sqrt{x} = t$ или $x = t^2/4$.

Пример 1.6: Найти максимальную высоту подъема тела с массой m , брошенного вверх со скоростью v_0 , пренебрегая сопротивлением воздуха.

Решение: Проектируя основное уравнение динамики

$$ma = P,$$

на ось Ox , направленную вверх – по движению точки, получим:

$$m\ddot{x} = -mg$$

или

$$\ddot{x} = -g. \quad (a)$$

Решим уравнение (a) при заданных начальных условиях:

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 \quad (б)$$

двумя рассмотренными выше способами.

Первый способ. Зависимости (1.21) – (1.22) для нашей задачи примут вид:

$$v = v_0 - gt, \quad (в)$$

$$x = v_0t + (1/2)gt^2. \quad (г)$$

Рассмотрим (в) и (г) в момент времени $t = T$, соответствующий достижению максимальной высоты подъема H :

$$\begin{cases} 0 = v_0 - gT; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ H = v_0 t + (1/2)gT^2. \end{array} \right.$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных T и H , найдем: $T = v_0/g$, $H = v_0^2/(2g)$.

Ответ: $H = v_0^2/(2g)$.

Второй способ. Уравнение (1.25) для нашей задачи примет вид:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gx}.$$

Подставляя $x = H$ и $v = 0$, получим: $H = v_0^2/(2g)$.

Ответ: $H = v_0^2/(2g)$.

ДУ движения для случая $F = F(t)$: Уравнение (1.17) задачи Коши с помощью первой подстановки $a = dv/dt$ приводится к системе двух ДУ, аналогичных (1.19) и (1.20). По аналогии с (1.21) и (1.22) получим первый интеграл – закон изменения скорости и второй интеграл – закон движения:

$$v = v_0 + (1/m); \quad \text{и} \quad x = x_0 + v_0 t + (1/m) \int_0^t \left(\int_0^t F(t) dt \right) dt .$$

ДУ движения для случая $F = F(x)$: Уравнение (1.17) задачи Коши с помощью второй подстановки $a = vdv/dx$ позволяет получить первый интеграл – аналогичный (1.25):

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x) dx}$$

и второй – аналогичный (1.25):

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x) dx}} = \int_0^t dt .$$

Пример 1.7: Найти закон движения точки массой m , упруго закрепленной на пружинке с жесткостью c , при начальных условиях: $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$.

Решение: Движение точки происходит под действием упругой силы пружины, направленной к положению равновесия и равной $F = -cr$ (рисунок 1.6).

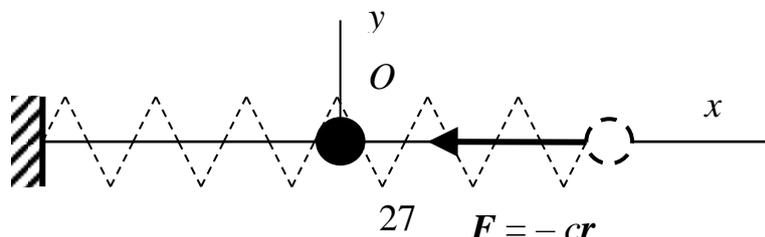


Рисунок 1.6

Проектируя основное уравнение динамики $ma = -cx$ на ось Ox , вдоль которой происходит движение, и выбирая начало отсчета на конце недеформированной пружины, получим ДУ движения точки:

$$ma = -cx.$$

Воспользовавшись второй подстановкой и умножив обе части уравнения на dx , найдем первый интеграл:

$$\int_0^v v dv = -(c/m) \int_a^x x dx$$

Или $v^2/2 = -(c/m)(x^2/2 - x_0^2/2)$, откуда $v = (c/m)(x_0^2 - x^2)$.

Подставляя $v = dx/dt$ и разделяя переменные, получим:

$$\int_{x_0=a}^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{c}{m}} \int_0^t dt,$$

$$\arcsin \frac{x}{x_0} \Big|_{x_0}^x = \sqrt{(c/m)} \cdot t,$$

$$\arcsin(x/x_0) - \pi/2 = \sqrt{(c/m)} \cdot t,$$

откуда

$$x = a \sin(\omega t + \pi/2) = a \cos \omega t,$$

где $a = x_0$, $\omega = \sqrt{(c/m)}$.

Ответ: $x = a \sin(\omega t + \pi/2) = a \cos \omega t$, где $a = x_0$, $\omega = \sqrt{(c/m)}$

Пример 1.8: Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить скорость падения тела на Землю с высоты H , если сила его притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра Земли, а начальная скорость тела равна нулю.

Решение: Проектируя основное уравнение динамики на ось Ox , направленную вниз – по движению тела и выбирая начало отсчета в центре Земли, получим:

$$ma = F_x = k^2/(x^2). \tag{a}$$

На поверхности Земли при $x = \pm R$ сила притяжения равна весу тела: $k^2/(R^2) = mg$, откуда

$$F_x = (mgR^2)/(x^2),$$

где R – радиус Земли.

Подставляя в (а) и применяя вторую подстановку $a = vdv/dx$, получим:

$$v dv/dx = (gR^2)/(x^2).$$

Разделяя переменные и интегрируя, придем к выражению:

$$\int_{v=0}^{v=V} v dv = (gR^2) \int_{-R-H}^{-R} \left(\frac{1}{x^2} \right) dx,$$

откуда

$$V^2 = (2gR^2) \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-R-H}^{-R} = (2gR^2) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H} \right) = \frac{2gRH}{(R+H)},$$

и искомая скорость падения тела будет равна:

$$V = \sqrt{(2gRH)/(R+H)}.$$

Отметим, что предел этого выражения:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} V = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6370000} = 11,2 \text{ км/сек}$$

равен *второй космической скорости*.

Нетрудно убедиться, что ньютоновское поле тяготения является потенциальным и для него выполняется закон сохранения механической энергии, а значит можно рассмотреть обратную задачу. То есть тело, которому у поверхности Земли будет сообщена такая скорость, покинет поле ее тяготения и станет искусственной планетой солнечной системы

$$\text{Ответ: } V = \sqrt{(2gRH)/(R+H)}.$$

ДУ движения для случая $F = F(v)$: В этом случае рекомендуется пользоваться следующим правилом:

1) Если в задаче дано или нужно найти время t , применять первую подстановку $a = dv/dt$.

2) Если в задаче можно обойтись без определения времени, следует применять вторую подстановку $a = vdv/dx$.

Пример 1.9: Найти максимальную высоту подъема тела массой m , брошенного вверх со скоростью v_0 , если сила сопротивления воздуха $R = \alpha mgv^2$.

Решение: Проектируя основное уравнение динамики:

$$ma = P + R,$$

на ось Ox , направленную вверх – по движению тела, и учитывая, что $R = -\alpha mgv^2$, получим ДУ:

$$ma = -mg - \alpha mgv^2,$$

которое с помощью второй подстановки $a = vdv/dx$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\int_{v_0}^{v=0} \frac{v dv}{1 + \alpha v^2} = -g \int_{x_0=0}^H dx,$$

или

$$\frac{1}{2\alpha} \int_{v_0}^0 \frac{d(\alpha v^2)}{1 + \alpha v^2} = \frac{\ln(1 + \alpha v^2)}{2\alpha} \Big|_{v_0}^0 = -\frac{\ln(1 + \alpha v_0^2)}{2\alpha} = -gH,$$

откуда искомая высота подъема тела будет равна:

$$H = \frac{1}{2\alpha g} \ln(1 + \alpha v_0^2). \quad (a)$$

Чтобы оценить правильность полученного результата, сравним его с решением, полученным ранее в примере 2.3. без учета сопротивления воздуха:

$$H = v_0^2/(2g). \quad (б)$$

Найдем с этой целью предел выражения (a) при стремлении параметра α , характеризующего силу сопротивления воздуха, к нулю:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha v_0^2)}{2\alpha g} = \frac{0}{0}.$$

Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталю, получим:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H = \frac{v_0^2}{2g(1 + \alpha v_0^2)} \Big|_{\alpha=0} = \frac{v_0^2}{2g},$$

что совпадает с результатом (б), найденным ранее.

$$\text{Ответ: } H = \frac{1}{2\alpha g} \ln(1 + \alpha v_0^2)$$

Примечания:

1. Можно сформулировать следующее правило, позволяющее выбрать способ решения второй задачи динамики:

– если в задаче дано $F = F(t)$, либо нужно найти время или закон движения, следует применять первую подстановку $a = dv/dt$;

– если задачу можно решить, не определяя времени или закона движения, следует применять вторую подстановку $a = vdv/dx$.

2. В приведенных примерах рассмотрены простейшие задачи интегрирования уравнений с разделяющимися переменными, но возможны и другие подходы. Например, общая теория решения ДУ с постоянными коэффициентами.

3. В соответствии с планом решения задач мы направляем ось Ox или Oz в сторону движения точки, то есть, считаем проекцию ускорения a_x или соответственно a_z на орт этой оси положительной. Если ускорение окажется отрицательным, то это будет означать, что наше предположение не оправдалось – все обстоит так же, как при определении опорных реакций в статике.

1.4 Геометрия масс механических систем

Как известно из курса сопромата, прочность балки зависит не только от материала, из которого она изготовлена и площади поперечного сечения, но и от формы этого сечения. Момент сопротивления – основная геометрическая характеристика прочности балки – зависит от момента инерции ее сечения.

Аналогично динамические характеристики механической системы могут определяться законом распределения масс этой системы в пространстве.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек M_i (рисунок 1.7) с массами m_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Определение. Центром масс системы называется точка C с радиус-вектором:

$$\mathbf{r}_c = (\sum m_i \mathbf{r}_i) / (\sum m_i). \quad (1.27)$$

Проектируя на оси $Oxyz$, получим координаты центра масс системы:

$$\begin{aligned} x_c &= (\sum m_i x_i) / M, \\ y_c &= (\sum m_i y_i) / M, \\ z_c &= (\sum m_i z_i) / M, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где $M = \sum m_i$ – масса системы.

Если точки системы сплошь заполняют некоторый объем V , образуя твердое тело, получим выражение радиус-вектора центра

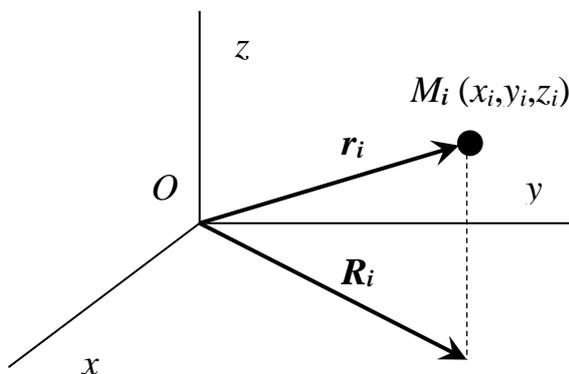


Рисунок 1.7

масс этого тела:

$$\mathbf{r}_c = (1/M) \int_V \mathbf{r} dm, \quad (1.29)$$

где $M = \int_V dm$ – масса тела.

Проектируя (1.28) на оси $Oxyz$, получим координаты центра масс этого тела:

$$\begin{aligned} x_c &= (1/M) \int_V x dm, \\ y_c &= (1/M) \int_V y dm, \\ z_c &= (1/M) \int_V z dm. \end{aligned} \quad (1.29')$$

При этом, очевидно, центр масс тела совпадает с его центром тяжести.

Важнейшим показателем геометрии масс твердого тела являются моменты инерции относительно центра и оси.

Определение. Момент инерции системы относительно центра (оси) равен сумме произведений масс точек системы на квадраты их расстояний до этого центра (оси).

В частности, момент инерции относительно центра O – полярный равен:

$$J_o = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2); \quad (1.30)$$

Осевые моменты инерции:

$$\begin{aligned} J_x &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad J_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2); \\ J_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2); \end{aligned} \quad (1.31)$$

Из формул (1.20) и (1.21) следует, что

$$J_x + J_y + J_z = 2J_o, \quad (1.32)$$

то есть полярный момент инерции равен полусумме осевых.

Если точки системы сплошь заполняют некоторый объем V , образуя твердое тело, формулы (1.30) и (1.31) примут вид:

$$\begin{aligned} J_o &= \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int_V r^2 dm; \\ J_x &= \int_V (y^2 + z^2) dm; \quad J_y = \int_V (x^2 + z^2) dm; \\ J_z &= \int_V (x^2 + y^2) dm = \int_V R^2 dm. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Отсюда следует, что:

1. Если все точки системы M_i лежат в плоскости xOy то $J_o = J_z$ и из (1.32) следует, что

$$J_x + J_y = J_o; \quad (1.34)$$

2. Радиусом инерции тела относительно центра O (оси Oz) называется величина i_o (i_z), определяемая зависимостью:

$$J_o = M i_o^2, \text{ соответственно } J_z = M i_z^2,$$

где M – масса тела.

3 Из (1.30) и (1.31) следует, что моменты инерции имеют размерность $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ и поэтому называются моментами второго порядка в отличие от

статических моментов, которые входят в числитель формулы (1.27), имеют размерность кг·м и называются моментами *первого порядка*.

4 В формуле (1.27) и далее мы традиционно обозначаем через $M = \sum m_i$ и $M = \int_V dm$ массу всего тела или системы вместо более последовательного обозначения m .

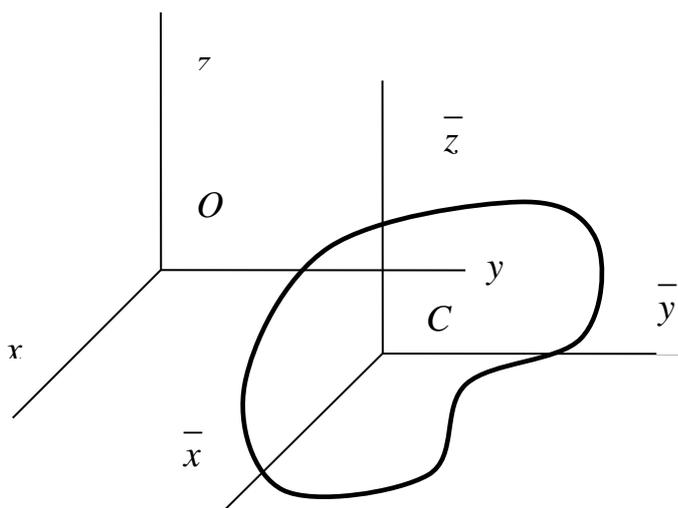
Другим показателем геометрии мас твердого тела являются моменты инерции относительно параллельной ей центральной оси

Теорема. Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной ей центральной оси плюс масса тела, умноженная на квадрат расстояния между осями:

$$J_z = J_{\bar{z}} + Md^2. \quad (1.35)$$

Доказательство. Пусть центр тяжести тела в системе $Oxyz$, определяется координатами:

$$\begin{aligned} x_c &= (1/M) \int_V x dm, \\ y_c &= (1/M) \int_V y dm, \\ z_c &= (1/M) \int_V z dm. \end{aligned} \quad (1.35')$$



Введем еще одну систему отсчета с началом в центре C , оси которой параллельны осям первой системы $Oxyz$ (рисунок 1.85), а координаты связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + x_c, \\ y &= \bar{y} + y_c, \\ z &= \bar{z} + z_c. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Рисунок 1.8

В системе $Cx\bar{y}\bar{z}$ координаты точки C равны нулю:

$$\bar{x}_c = (1/M) \int_V \bar{x} dm = 0, \quad \bar{y}_c = (1/M) \int_V \bar{y} dm = 0, \quad (1.37)$$

Подставляя (1.36) в (1.33), получим:

$$\begin{aligned} J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm &= \int_V (\bar{x} + x_c)^2 dm + \int_V (\bar{y} + y_c)^2 dm = \int_V (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) dm + \\ &+ 2x_c \int_V \bar{x} dm + 2y_c \int_V \bar{y} dm + (x_c^2 + y_c^2) \int_V dm = J_{\bar{z}} + 2x_c M \cdot \bar{x}_c + 2y_c M \cdot \bar{y}_c + Md^2, \end{aligned}$$

где $d^2 = (x_c^2 + y_c^2)$ – квадрат расстояния между осями z и \bar{z} .

С учетом (1.37) второе и третье слагаемые в последнем выражении равны нулю, откуда и следует соотношение (1.34). Теорема доказана.

Приведем моменты инерции простейших тел.

1) **Тонкий однородный стержень.** Рассмотрим прямолинейный стержень массой M и длиной l , расположенный в системе координат Oxz , где ось Ox совпадает с осью стержня (рисунок 1.9).

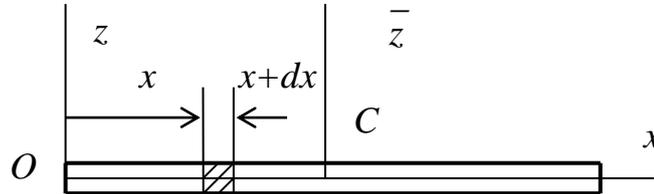


Рисунок 1.9

Под стержнем понимают тело, у которого один размер – длина значительно больше двух остальных. Соответственно поперечными размерами стержня можно пренебречь по сравнению с его длиной, и последнее выражение в (1.33) примет вид:

$$J_z = \int_V x^2 dm. \quad (1.37)$$

Выберем в качестве dm массу участка стержня, заключенного между двумя сечениями, проведенными на расстоянии x и $x + dx$ от его начала. Тогда $dm = \rho dx$, где $\rho = M/l$ – линейная плотность стержня и (1.27) примет вид:

$$J_z = \int_0^l \rho x^2 dx = \frac{M}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3}. \quad (1.38)$$

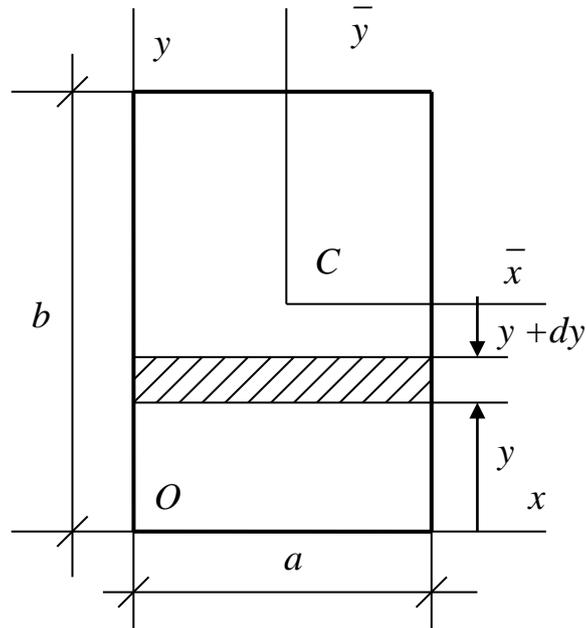
В силу того, что $J_z = J_{\bar{z}} + Md^2$, где $d = (l/2)$, откуда:

$$J_{\bar{z}} = (Ml^2)/3 - (Ml^2)/4 = (Ml^2)/12.$$

Отметим, что при этом $J_z = J_o$, $J_{\bar{z}} = J_c$.

2) **Тонкая прямоугольная пластинка.** Рассмотрим однородную пластинку массой M и размерами $a \times b$, лежащую в плоскости xOy (рисунок 1.10).

Выберем в качестве dm массу полоски, параллельной оси Ox с площадью $dF = a \times dy$. Тогда, пренебрегая толщиной пластинки, и учитывая, что $dm = \sigma dF$, где $\sigma = M/(ab)$ – поверхностная плотность пластинки, получим из (1.33):



Рисунок

$$J_x = \int_V y^2 dm = \int_0^b y^2 \sigma dF = \sigma a \int_0^b y^2 dy = \frac{Ma}{ab} \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{Mb^2}{3}. \quad (1.39)$$

Последнюю формулу можно вывести иначе, если разбить пластинку на узкие полоски, параллельные оси Oy с массой Δm . Принимая каждую за стержень, по формуле (1.28) найдем: $\Delta J_x = (\Delta m)b^2/3$. Суммируя, и получим (1.39), где $J_x = \sum \Delta J_x$, $M = \sum \Delta m$.

По аналогии с (1.39) можно найти $J_y = (Mb^3)/3$, а с учетом (1.33) вычислить момент инерции относительно оси, перпендикулярной к плоскости пластинки:

$$J_o = J_z = J_x + J_y = (M/3)(a^2 + b^2). \quad (1.40)$$

Далее, с помощью (1.34) можно вычислить моменты инерции относительно параллельных центральных осей:

$$J_{\bar{x}} = (Mb^2)/12; J_{\bar{y}} = (Ma^2)/12; J_c = J_{\bar{z}} = (M/12)(a^2 + b^2). \quad (1.41)$$

3) Тонкое однородное кольцо. Рассмотрим такое кольцо массой M и радиусом R (рисунок 1.11).

Каждая частица этого кольца с массой Δm , заключенная между двумя лучами, выходящими из центра C , удалена от него на расстояние R и имеет момент инерции $\Delta J_c = \Delta m R^2$, поэтому полярный момент инерции всего кольца равен:

$$J_c = \sum \Delta J_c = R^2 \sum \Delta m = MR^2.$$

Далее, воспользовавшись формулой (1.33), можно вычислить момент

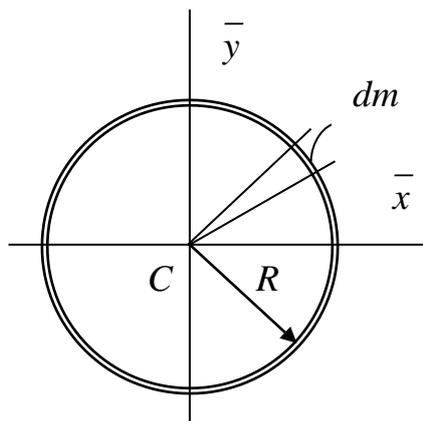


Рисунок 1.11

инерции кольца относительно его диаметра:

$$J_{\bar{x}} = J_{\bar{y}} = J_c/2 = MR^2/2.$$

Отсюда следует, что для кольца $J_c = J_{\bar{z}} = MR^2$, и формула $J_{\bar{z}} = MR^2$ справедлива также для тонкой однородной цилиндрической оболочки, все точки которой равноудалены от этой оси.

4) Тонкая круглая пластинка. Рассмотрим однородный диск массой M и радиусом R , лежащий в плоскости Oxy (рисунок 1.12).

Проще всего начать вычисление моментов инерции с полярного момента относительно центра C , совпадающего с центром тяжести пластинки. Пренебрегая толщиной пластинки и полагая в формуле (1.23) $z = 0$ получим:

$$J_o = \int_v (x^2 + y^2) dm = \int_v r^2 dm. \quad (1.33')$$

Для вычисления последнего интеграла выберем, в качестве элементарной, массу кольца, заключенного между двумя окружностями с радиусами r и $r + dr$.

При этом $dm = \sigma dF$, где $\sigma = M/F = M/(\pi R^2)$ – поверхностная плотность пластинки, а с точностью до бесконечно малых первого порядка элементарная площадь dF равна площади полоски, полученной из разрезанного кольца: $dF = 2\pi r dr$.

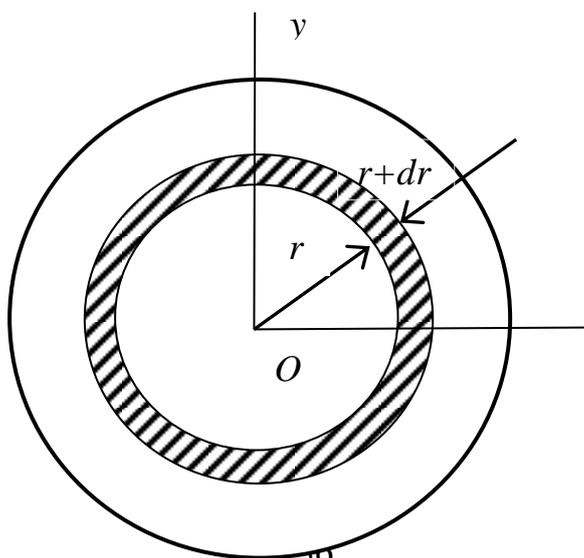


Рисунок 1.12

Подставляя в (1.33') получим:

$$J_o = \int_V r^2 dm = \sigma \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}. \quad (1.42)$$

Теперь, воспользовавшись формулой (1.34), можно вычислить момент инерции диска относительно его диаметра:

$$J_x = J_y = J_c/2 = MR^2/4.$$

Примечания:

1. Для диска в данной системе отсчета $J_o = J_c = J_z = J_z = MR^2/2$.
2. Формула $J_z = J_z = MR^2/2$ будет также справедлива для однородного цилиндра, который, очевидно, можно представить состоящим из таких дисков одинакового радиуса.
3. При вычислении моментов инерции плоских фигур можно с успехом применять соответствующие формулы из сопромата.

Отметим, что если в сопромате $J_x^{CM} = \int_F y^2 dF$, то в теоретической механике $J_x^{TM} = \int_F y^2 dm$, где $dm = (M/F)dF$, а M и F – соответственно масса и площадь пластинки. Таким образом, между этими моментами инерции существует зависимость:

$$J_x^{TM} = J_x^{CM}(M/F).$$

Например, для балки прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h для центральной горизонтальной оси $J_x^{CM} = (bh^3)/12$, откуда $J_x^{TM} = [(bh^3)/12](M/bh) = (Mh^2)/12$, что совпадает с результатом, подсчитанным по формуле (1.31).

4. Для тел сложной формы помимо моментов инерции относительно центра и осей приходится вводить определение *центробежных моментов инерции*:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_V xydm, \\ J_{xz} &= \int_V xzdm, \\ J_{yz} &= \int_V yzdm, \end{aligned} \quad (1.43)$$

которые, как и в сопромате, для *главных осей инерции* тела равны нулю. Если только ось Oz является главной осью инерции тела, то $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Эти вопросы будут рассмотрены позднее по мере необходимости.

5. Напомним, что если тело имеет ось симметрии, то эта ось будет главной центральной осью инерции тела, а если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось Oz , перпендикулярная этой оси будет главной осью инерции тела.

1.5 Вопросы для самоподготовки

- 1 Основные понятия, аксиомы и теоремы динамики механических систем
- 2 Что такое механическая система
- 3 Какие силы называются внешними?
- 4 Какие силы называются внутренними?
- 5 В чем выражаются связи?
- 6 Приведите классификацию связей
- 7 Приведите связи по зависимости от скорости
- 8 Приведите связи по зависимости от времени
- 9 Приведите связи в зависимости от конструктивных особенностей
- 10 Как выражается основной закон динамики?
- 11 В чем заключается первая задача динамики?
- 12 В чем заключается вторая задача динамики?
- 13 Что называется степенью свободы механической системы
- 14 Напишите дифференциальные уравнения в декартовых координатах
- 15 Напишите дифференциальные уравнения в естественных координатах
- 16 Что называется центром масс механической системы?
- 17 Как определяется момент инерции плоской механической системы?
- 18 Момент инерции пространственной механической системы
- 19 Как определяется осевой момент инерции?
- 20 Как определяется полярный момент инерции?

МОДУЛЬ 2. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКИХ систем

2.1 Теоремы о движении центра масс

2.1.1 Количество движения системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек M_i с массами m_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Определение. *Количеством движения точки называется произведение массы этой точки на ее скорость:*

$$\mathbf{q}_i = m_i \mathbf{v}_i .$$

Как следует из определения, количество движения – это вектор, приложенный в точке M_i и направленный по вектору скорости этой точки.

Определение. *Количеством движения системы называется геометрическая сумма количеств движений всех точек этой системы:*

$$\mathbf{Q} = \sum m_i \mathbf{v}_i . \quad (2.1)$$

Чтобы выяснить, где приложен вектор \mathbf{Q} , воспользуемся формулой:

$$\mathbf{r}_c = (\sum m_i \mathbf{r}_i) / (\sum m_i) , \quad (2.1')$$

откуда следует, что:

$$(\sum m_i \mathbf{r}_i) = M \mathbf{r}_c , \quad (2.2)$$

где $M = \sum m_i$.

Представим вектор скорости в (2.1) как производную от радиус-вектора:

$$\mathbf{Q} = \sum m_i \mathbf{v}_i = \sum m_i (d\mathbf{r}_i/dt) = \frac{d}{dt} \sum m_i \mathbf{r}_i \stackrel{(5.2)}{=} \frac{d}{dt} (M \mathbf{r}_c) = M \mathbf{v}_c .$$

Итак, с учетом формулы (2.2) получим:

$$\mathbf{Q} = M \mathbf{v}_c , \quad (2.3)$$

то есть вектор количества движения системы приложен в центре масс этой системы и равен произведению массы системы на скорость центра масс.

2.1.2 Теорема для точки

Все общие теоремы динамики выводятся из основного уравнения динамики:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Воспользовавшись первой подстановкой $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, получим дифференциальную форму теоремы:

$$(d/dt)(m\mathbf{v}) = d\mathbf{q}/dt = \mathbf{F}, \quad (2.4)$$

то есть производная по времени от количества движения точки равна равнодействующей всех сил, действующих на эту точку.

Умножая обе части (2.4) на dt и интегрируя по времени в промежутке от t_1 до t_2 , получим интегральную форму теоремы об изменении количества движения точки:

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{S}(\mathbf{F}), \quad (2.5)$$

где $\mathbf{S}(\mathbf{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$ – импульс силы \mathbf{F} , действующей на точку за указанное время.

То есть изменение количества движения точки за промежуток времени от t_1 до t_2 равно импульсу всех сил, действующих на точку, за это время.

2.1.3 Теорема для системы

Записывая основное уравнение динамики для i -ой точки системы:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

с помощью первой подстановки $\mathbf{a}_i = d\mathbf{v}_i / dt$ придем к соотношениям, аналогичным (2.4):

$$(d/dt)(m_i \mathbf{v}_i) = d\mathbf{q}_i / dt = \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(i)},$$

суммируя которые по всем точкам системы:

$$(d/dt)(\sum m_i \mathbf{v}_i) = \sum \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum \mathbf{F}_i^{(i)}$$

получим по аналогии с (2.4) дифференциальную форму теоремы:

$$d\mathbf{Q}/dt = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{R}^{(e)} = \sum \mathbf{F}_i^{(e)}$ – главный вектор внешних сил системы. Напомним, что главный вектор внутренних сил системы равен нулю: $\mathbf{R}^{(i)} = \sum \mathbf{F}_i^{(i)} = 0$.

Итак, справедлива теорема.

Теорема. Производная по времени от количества движения системы равна главному вектору внешних сил.

Проектируя (2.6) на оси координат, получим:

$$dQ_x/dt = R_x^{(e)}, dQ_y/dt = R_y^{(e)}, dQ_z/dt = R_z^{(e)}, \quad (2.7)$$

то есть, производная по времени от проекции вектора количества движения системы на какую-либо ось равна проекции главного вектора на ту же ось.

Следствие. Из формул (2.6) и (2.7) следует:

- 1) если $\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{Q} = \text{const}$,
- 2) если $R_x^{(e)} = 0$, то $Q_x = \text{const}$,

то есть, если проекция главного вектора системы на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось остается постоянной.

Умножая обе части (2.6) на dt и интегрируя по времени в промежутке от t_1 до t_2 , получим интегральную форму теоремы об изменении количества движения системы:

$$\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R}^{(e)} dt = \mathbf{S}^{(e)}, \quad (2.8)$$

то есть изменение количества движения системы за промежуток времени от t_1 до t_2 равно главному импульсу всех сил, действующих на систему, за это время.

2.1.3 Теорема о движении центра масс

Подставляя формулу (2.3) в (2.6), получим:

$$d\mathbf{Q}/dt = d(M\mathbf{v}_c)/dt = M\mathbf{a}_c = \mathbf{R}^{(e)},$$

где \mathbf{a}_c – ускорение центра масс системы.

Полученное соотношение:

$$M\mathbf{a}_c = M (d\mathbf{v}_c/dt) = \mathbf{R}^{(e)} \quad (2.9)$$

по форме и с точки зрения математики не отличается от основного уравнения динамики для материальной точки: $ma = F$, откуда следует, что и законы движения этих двух объектов будут одинаковы, поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема. *Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, на которую действует главный вектор внешних сил.*

Проектируя (2.9) на оси координат, получим:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= M \frac{d\dot{x}_c}{dt} = R_x^{(e)}, \\ M\ddot{y}_c &= M \frac{d\dot{y}_c}{dt} = R_y^{(e)}, \\ M\ddot{z}_c &= M \frac{d\dot{z}_c}{dt} = R_z^{(e)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Следствие. Из формул (2.9) и (2.10) следует:

- 1) Внутренние силы не влияют на движение центра масс системы.
- 2) Если $R^{(e)} = \mathbf{0}$, то $dv_c/dt = 0$, откуда

$$v_c = v_{c0} = \mathbf{const},$$

то есть центр масс движется равномерно и прямолинейно. В частности, если $v_{c0} = \mathbf{0}$, то $dr_c/dt = 0$, откуда

$$r_c = r_{c0} = \mathbf{const},$$

следовательно, центр масс находится в состоянии покоя.

Таким образом, *если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то центр масс системы движется прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя.*

- 3) Если $R_x^{(e)} = 0$, то $v_{cx} = \dot{x}_c = \dot{x}_{c0} = \mathbf{const}$, то есть вдоль соответствующей оси центр масс системы движется прямолинейно и равномерно. В частности, если $\dot{x}_{c0} = 0$, то $dx_c/dt = 0$, откуда

$$x_c = x_{c0} = \mathbf{const},$$

то есть координаты центра масс системы вдоль соответствующей оси остаются неизменными.

Итак, если проекция главного вектора внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то вдоль этой оси центр масс системы движется прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя.

Пусть, например, ракета с массой корпуса M и массой горючего m находится в состоянии относительного покоя за пределами солнечной системы.

После запуска двигателя корпус ракеты улетает в одну, а сгоревшее топливо – в противоположную сторону на миллионы километров от точки старта, но центр масс системы остается в первоначальном положении в состоянии покоя.

Пример 2.1: По горизонтальной платформе, движущейся со скоростью v_0 , перемещается тележка с относительной скоростью u_0 . Найти скорость платформы при торможении тележки, если их массы равны M и m соответственно.

Решение: На систему, состоящую из платформы весом $P = Mg$ и тележки весом $p = mg$, помимо этих двух сил действует реакция дорожного полотна N , приложенная к основанию платформы (рисунок 2.1).

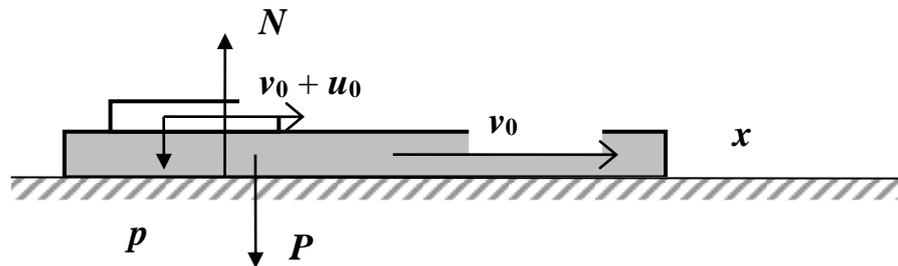


Рисунок 2.1

Главный вектор внешних сил системы: $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{p} + \mathbf{N}$ перпендикулярен оси Ox , поэтому $R_x^{(e)} = 0$ и справедливо следствие из теоремы об изменении количества движения системы (2.7):

$$dQ_x/dt = R_x^{(e)} \quad (2.7')$$

в соответствие, с которым

$$Q_{x0} = Q_{xt} . \quad (a)$$

В начальный момент времени абсолютная скорость тележки складывается из переносной, равной скорости платформы, и относительной – u_0 , поэтому при $t = 0$ количество движения системы равно:

$$Q_{x0} = Mv_0 + m(v_0 + u_0). \quad (б)$$

В момент времени t , соответствующий окончанию торможения тележки, количество движения системы равно:

$$Q_{xt} = (M + m)v, \quad (\text{в})$$

где v – искомая скорость платформы.

Приравнявая (б) и (в), получим:

$$v = [Mv_0 + m(v_0 + u_0)]/(M + m) = v_0 + mu_0/(M + m).$$

$$\text{Ответ: } v = v_0 + mu_0/(M + m)$$

Примечания:

1. То обстоятельство, что внутренние силы не влияют на движение центра масс, не означает, что они не могут вызвать появление внешних сил. Примером служит работа двигателя внутреннего сгорания автомобиля, который вызывает появление внешних движущих сил, – ими являются силы трения с дорожным покрытием, приложенные к его ведущим колесам.

2. В физике импульсом точки называется произведение массы точки на ее скорость, то есть то, что в ТМ называется количеством движения, а интегральная форма этой теоремы, то есть формулы (2.5) и (2.8) носит название *теоремы импульсов*.

3. Теорема об изменении количества движения системы основана на применении первой подстановки $a = dv/dt$.

4. Теорема об изменении количества движения системы позволяет:

- найти первый интеграл, то есть зависимость $v = v(t)$,
- описать движение центра масс системы.

5. Для описания движения системы вокруг центра масс необходимо рассмотрение видоизмененной формы этой теоремы.

2.2 Теория удара

2.2.1 Основные понятия. Коэффициент восстановления.

Под *ударом* понимают явление, при котором скорости точек тела изменяются на конечную величину в течение бесконечно малого промежутка времени.

Как следует из этого определения, удар сопровождается появлением бесконечно больших сил, которые называются *ударными*. Природа этих сил, связанных с процессом деформирования соударяющихся тел вблизи зоны контакта и распространением в них ударных волн, не является предметом рассмотрения теоретической механики, которая изучает лишь последствия удара.

Закон изменения ударной силы трудно зарегистрировать даже с помощью специальной аппаратуры: как из-за большого значения ее амплитуды, так и

вследствие ее малой продолжительности. Например, продолжительность соударения двух латунных шариков диаметром 26 мм при относительной скорости их сближения 74 мм/сек составляет $2 \cdot 10^{-4}$ сек.

Гораздо проще зафиксировать не силу, а импульс силы, являющийся интегральной характеристикой взаимодействия, который и входит в теорему об изменении количества движения точки или теорему импульсов:

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt = S(F). \quad (2.5')$$

Выясним, в чем состоит особенность применения этой теоремы к исследованию явления удара.

Пусть материальная точка в момент времени t_1 испытывает удар, сталкиваясь с неподвижной поверхностью либо с другой материальной точкой, и его продолжительность составляет τ .

Напомним, что в последней формуле под силой F мы понимали равнодействующую всех сил, приложенных к материальной точке. И при ударе на точку помимо бесконечно большой ударной силы, импульс которой конечен, действуют обычные силы, например, сила тяжести, трения и другие силы с бесконечно малыми импульсами, которыми во время удара можно пренебречь.

Таким образом, формула (2.5') примет вид:

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_1+\tau} F dt = S(F), \quad (2.11)$$

где $S(F)$ – импульс ударной силы.

Аналогичный вид примет формула (2.8) и теорема об изменении количества движения системы при ударе:

$$Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_1+\tau} R^{(e)} dt = S^{(e)}, \quad (2.12)$$

где $S^{(e)}$ – главный импульс внешних ударных сил, которая означает, что:

Изменение количества движения системы за время удара равно главному импульсу ударных сил.

Отметим, наконец, что поскольку скорости точек системы остаются конечными, а время удара бесконечно мало, то: *Перемещения точек системы за время удара равны нулю.*

Перейдем к рассмотрению удара материальной точки о неподвижную поверхность.

Пусть в момент времени t_1 точка массы m , имея скорость v_1 , направленную под углом α к нормали n , ударяется о поверхность, а спустя бесконечно малый промежуток времени τ отскакивает от нее со скоростью v_2 , направленной под углом β (рисунок 2.2).

Записывая соотношение (2.11) в проекциях на направление касательной τ и нормали n к этой поверхности, получим:

$$mv_{2\tau} - mv_{1\tau} = S_\tau = 0, \quad (2.13)$$

$$mv_{2n} - mv_{1n} = S_n . \quad (2.14)$$

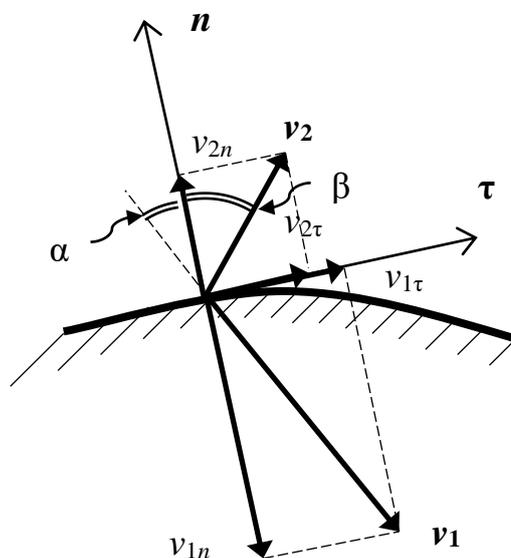


Рисунок 2.2

Два последних уравнения содержат три неизвестных: $v_{2\tau}$, v_{2n} и S_n , поэтому чтобы задача стала статически определенной, к ним необходимо добавить еще одно соотношение, отражающее ту или иную гипотезу удара.

Простейшей из них является предпосылка, высказанная И. Ньютоном, о том, что:

Отношение модулей нормальных проекций относительных скоростей тел после и до удара является постоянной величиной, зависящей только от материала соударяющихся тел.

Это отношение называется *коэффициентом восстановления*. В нашем случае он равен:

$$k = v_{2n} / |v_{1n}| \quad \text{или} \quad v_{2n} = -k v_{1n} . \quad (2.15)$$

Этот коэффициент характеризует упругие свойства системы и ее способность к восстановлению после удара.

При $k = 1$ удар называется *абсолютно упругим*, а при $k = 0$ – *абсолютно неупругим*. Для реальных физических тел

$$0 < k < 1.$$

Если вспомнить, что скорость падения материальной точки с высоты h без учета сопротивления воздуха находится по формуле:

$$v = \sqrt{2gh},$$

то нетрудно понять, что этот коэффициент можно определить экспериментально, воспользовавшись соотношением:

$$k = v_{2n}/v_{1n} = \sqrt{h_2/h_1} ,$$

где h_1 – высота, с которой шарик без начальной скорости падает на плиту, а h_2 – высота, на которую он поднимется, отскочив от плиты после удара.

С учетом (2.14) и (2.15) нормальная составляющая ударного импульса равна:

$$S_n = -mv_{1n} + mv_{2n} = -mv_{1n}(1 - v_{2n}/v_{1n}) = -mv_{1n}(1 + k), \quad (2.16)$$

где $v_{1n} < 0$, $S_n > 0$.

Из соотношения (2.13) следует, что

$$v_{1\tau} = v_{2\tau}, \quad (2.17)$$

а поскольку

$$\operatorname{tg} \alpha = -v_{1\tau}/v_{1n}, \operatorname{tg} \beta = v_{2\tau}/v_{2n},$$

то с учетом (2.17) получим:

$$\operatorname{tg} \beta = -v_{1\tau}/kv_{1n} = \operatorname{tg} \alpha / k .$$

2.2.2 Прямой центральный удар двух тел.

Прямым и центральным называется такой удар двух тел, при котором точка контакта этих тел лежит на одной прямой, соединяющей их центры масс, а скорости последних также направлены вдоль этой прямой.

Обозначим скорость центра масс – C_1 и массу первого тела через u и m , а второго тела – соответственно v и M (рисунок 2.3).

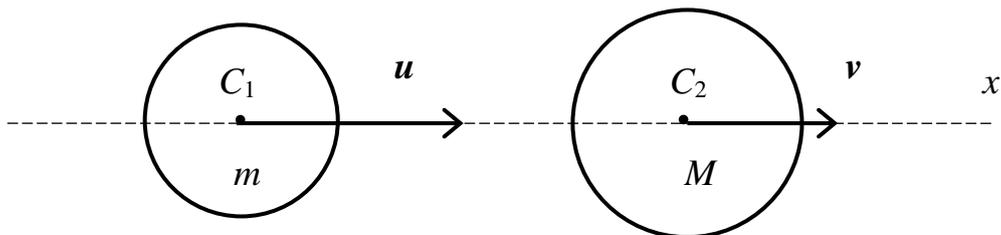


Рисунок 2.3

Направив ось Ox по направлению скорости первого тела, можно записать условие, при котором удар состоится, в виде:

$$u_{1x} > v_{1x} .$$

Для определения скоростей тел после удара воспользуемся теоремой импульсов (2.12), которая с учетом отсутствия ударных импульсов внешних сил в проекции на ось Ox примет вид:

$$mu_{1x} + Mv_{1x} = mu_{2x} + Mv_{2x}. \quad (2.18)$$

Дополняя последнее уравнение значением коэффициента восстановления, равным отношению относительных скоростей тел после и до удара:

$$k = (v_{2x} - u_{2x}) / (u_{1x} - v_{1x}), \quad (2.19)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} u_{2x} &= \frac{(m - kM)u_{1x} + M(1 + k)v_{1x}}{M + m}, \\ v_{2x} &= \frac{m(1 + k)u_{1x} + (M - km)v_{1x}}{M + m}. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Для определения ударного импульса применяем теорему импульсов к первому телу:

$$S_x = m(u_{2x} - u_{1x}),$$

откуда с учетом (2.20) получим:

$$S_x = -(1 + k) \frac{mM}{M + m} (u_{1x} - v_{1x}). \quad (2.21)$$

Рассмотрим частные случаи:

1) *Абсолютно упругий удар* ($k = 1$). Формулы (2.20) и (2.21) примут вид:

$$\begin{aligned} u_{2x} &= \frac{(m - M)u_{1x} + 2Mv_{1x}}{M + m}, \\ v_{2x} &= \frac{2mu_{1x} + (M - m)v_{1x}}{M + m}, \\ S_x &= -2 \frac{mM}{M + m} (u_{1x} - v_{1x}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

При этом в случае, если массы тел равны, то из (2.22) следует:

$$u_{2x} = v_{1x}, \quad v_{2x} = u_{1x},$$

то есть тела при ударе обмениваются скоростями и количествами движения.

2) *Абсолютно неупругий удар* ($k = 0$). Уравнения (2.20) принимают вид:

$$u_{2x} = v_{2x} = \frac{mu_{1x} + Mv_{1x}}{m + M}, \quad (2.23)$$

то есть после удара тела двигаются совместно с одной скоростью. Ударный импульс (2.21) равен:

$$S_x = - \frac{mM}{M + m} (u_{1x} - v_{1x}),$$

то есть будет вдвое меньше, чем при абсолютно упругом ударе.

2.3. Кинетический момент механической системы

Рассмотрим отрезок траектории точки M с радиус-вектором \mathbf{r} и массой m , которая движется со скоростью \mathbf{v} (рисунок 2.4).

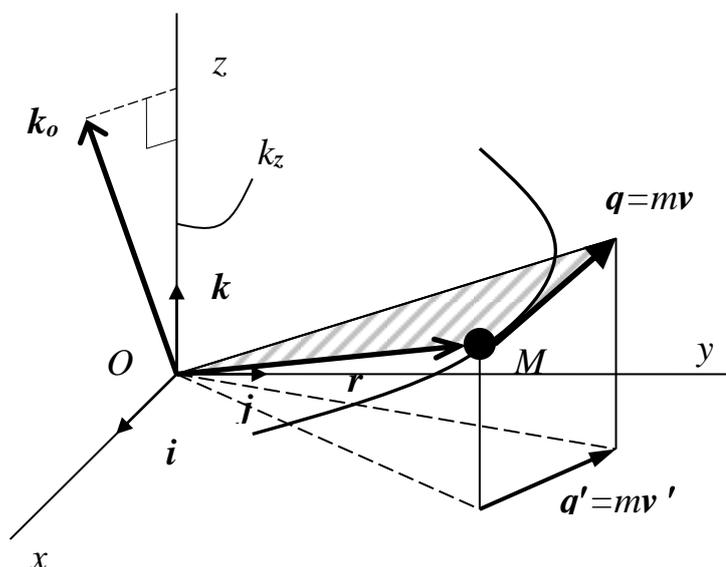


Рисунок 2.4

Определение. Вектор-моментом количества движения точки относительно центра O или, иначе кинетическим моментом называется вектор \mathbf{k}_o , который приложен в этом центре и равен векторному произведению радиус-вектора \mathbf{r} и вектора количества движения точки $m\mathbf{v}$:

$$\mathbf{k}_o = \text{mom}_o(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

Как видим, это определение аналогично определению вектор-момента вектора силы.

Определение. Чтобы найти кинетический момент k_z точки относительно оси нужно спроектировать вектор количества движения $m\mathbf{v}$ на плоскость, перпендикулярную этой оси, а затем вычислить момент этой проекции $m\mathbf{v}'$ относительно точки пересечения плоскости с осью.

Правило знаков: $k_z > 0$, если выполняется правило правого винта, то есть, смотря навстречу оси, мы видим вращение вектором $m\mathbf{v}'$ плоскости своего действия против хода часовой стрелки.

Напомним, что проекция кинетического момента \mathbf{k}_o относительно центра O на ось Oz равна кинетическому моменту точки относительно этой оси:

$$k_z = \text{пр}_z \mathbf{k}_o = \text{mom}_z(m\mathbf{v}) = \text{mom}_o(m\mathbf{v}') = \pm m\mathbf{v}' \cdot h,$$

где h – плечо проекции вектора количества движения точки на плоскость Oxy .

Определение. Кинетический момент системы относительно центра O равен геометрической сумме кинетических моментов всех точек этой системы относительно этого центра:

$$\mathbf{K}_o = \sum m \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i). \quad (2.24)$$

Определение. Кинетический момент системы относительно оси Oz равен алгебраической сумме кинетических моментов всех точек этой системы относительно этой оси:

$$K_z = \sum m \omega_z (m_i \mathbf{v}_i) = \sum (\pm m_i \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{h}_i). \quad (6.25)$$

При этом

$$\mathbf{K}_o = K_x \mathbf{i} + K_y \mathbf{j} + K_z \mathbf{k}.$$

Теорема для точки: Производная от кинетического момента точки относительно центра (оси) равна сумме моментов всех сил, действующих на точку относительно этого центра (оси):

$$(d/dt) (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \sum \mathbf{M}_o(\mathbf{F}_i), \quad (2.26)$$

$$(dk_x/dt) = \sum M_x(\mathbf{F}_i), (dk_y/dt) = \sum M_y(\mathbf{F}_i), (dk_z/dt) = \sum M_z(\mathbf{F}_i). \quad (2.27)$$

Доказательство. Основное уравнение динамики $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, умножим слева на радиус-вектор \mathbf{r} и воспользуемся подстановкой $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$:

$$\mathbf{r} \times (d/dt)(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (2.28)$$

Учитывая, что

$$(d/dt) (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = (d\mathbf{r}/dt) \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times (d/dt)(m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times (d/dt)(m\mathbf{v}) = \\ = \mathbf{r} \times (d/dt)(m\mathbf{v}),$$

поскольку $(\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) = 0$, а $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{M}_o(\mathbf{F})$, перепишем соотношение (2.28) в виде:

$$(d/dt) (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{M}_o(\mathbf{F}),$$

откуда и следует соотношение (2.26). Проектируя его на оси координат, получим (2.27).

Теорема для системы: Запишем соотношение (2.26) для i -ой точки системы:

$$(d/dt) (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(i)}).$$

Просуммировав по всем точкам системы, получим:

$$(d/dt) \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}) + \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(i)}),$$

откуда следует искомое соотношение:

$$d\mathbf{K}_o/dt = \mathbf{M}_o^{(e)}, \quad (2.29)$$

где $\mathbf{M}_o^{(e)} = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)})$ – главный вектор внешних сил.

Проектируя на оси координат, получим:

$$dK_x/dt = M_x^{(e)}, \quad dK_y/dt = M_y^{(e)}, \quad dK_z/dt = M_z^{(e)}. \quad (2.30)$$

Итак, справедлива теорема:

Теорема. Производная от кинетического момента системы относительно центра (оси) равна главному моменту внешних сил относительно этого центра (оси).

Следствие. Из формул (2.29) и (2.30) следует:

1) Если $\mathbf{M}_o^{(e)} = 0$, то $\mathbf{K}_o = \text{const}$.

2) Если $M_x^{(e)} = 0$, то $K_x = \text{const}$.

Таким образом, если главный момент внешних сил относительно некоторого центра (оси) равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра (оси) остается постоянным.

2.4 Кинетическая энергия системы

2.4.1 Общие положения

Из школьного курса физики известно, что кинетическая энергия точки равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = (1/2)mv^2.$$

Тогда кинетическая энергия механической системы будет равна арифметической сумме кинетических энергий всех точек этой системы:

$$T = (1/2)\sum m_i v_i^2. \quad (2.31)$$

Теорема Кёнига. Кинетическая энергия системы равна кинетической энергии поступательно движущегося центра масс плюс кинетическая энергия системы в ее движении относительно центра масс:

$$T = (1/2)Mv_c^2 + T_c^{(r)}, \quad (2.32)$$

где M – масса системы, v_c – скорость центра масс, а $T_c^{(r)}$ – кинетическая энергия системы в ее движении относительно центра масс.

Доказательство. Рассмотрим механическую систему в системе координат $Oxyz$. Введем еще одну подвижную систему отсчета с началом в центре масс нашей системы, оси которой при движении остаются параллельными осям $Oxyz$.

Положение любой i -ой точки системы можно определить радиус-вектором как в первой, так и во второй системе отсчета. При этом между ними будет зависимость:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \overline{\mathbf{r}}_i, \quad (2.33)$$

где \mathbf{r}_i и $\overline{\mathbf{r}}_i$ – радиус-векторы точки M_i в системах $Oxyz$ и \overline{Cxyz} , а \mathbf{r}_c – радиус-вектор центра масс.

Дифференцируя (2.33), найдем зависимость:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \overline{\mathbf{v}}_i^{(r)}, \quad (2.34)$$

где \mathbf{v}_i и \mathbf{v}_c – абсолютные скорости точек M_i и C в системе $Oxyz$, а $\overline{\mathbf{v}}_i^{(r)}$ – скорость точки M_i относительно подвижной системы отсчета.

Подставляя (2.34) в (2.31), получим:

$$\begin{aligned} T &= (1/2)\sum m_i (\mathbf{v}_c + \overline{\mathbf{v}}_i^{(r)})^2 = (1/2)\sum m_i v_c^2 + (1/2)\sum m_i (v_i^{(r)})^2 + \mathbf{v}_c \sum m_i \overline{\mathbf{v}}_i^{(r)} = \\ &= (1/2)Mv_c^2 + T_c^{(r)}, \end{aligned}$$

где $T_c^{(r)} = (1/2)\sum m_i (v_i^{(r)})^2$ – кинетическая энергия системы в ее движении относительно центра масс, а с учетом того, что:

$$\mathbf{v}_c \sum m_i \overline{\mathbf{v}}_i^{(r)} = \mathbf{v}_c (d/dt) (\sum m_i \overline{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{v}_c (d/dt)(M\mathbf{r}_c) = 0,$$

Получим при $\mathbf{r}_c = 0$. Теорема доказана.

2.4.2 Кинетическая энергия твердого тела

Определим кинетическую энергию твердого тела при различных видах его движения.

Поступательное движение. При поступательном движении все точки ТТ имеют геометрически равные скорости, равные скорости центра масс. Поэтому непосредственно по формуле (2.31) получим:

$$T = (1/2)\sum m_i v_i^2 = (1/2)Mv_c^2. \quad (2.35)$$

Вращательное движение. При вращении тела вокруг оси Oz точки M_i , удаленные от нее на расстояние R_i , имеют скорость $v_i = \omega R_i$, поэтому по формуле (2.31) получим:

$$T = (1/2)\sum m_i v_i^2 = (1/2)\sum (m_i R_i^2) \omega^2 = (1/2)J_z \omega^2, \quad (2.36)$$

где J_z – момент инерции относительно оси вращения.

Плоское движение тела. Такое движение представляют суммой двух – поступательного движения вместе с произвольно выбранным полюсом и вращения вокруг этого полюса.

Если в качестве последнего выбрать центр масс, можно воспользоваться формулой (2.32) по которой с учетом (2.35) и (2.36) получим:

$$T = (1/2)Mv_c^2 + (1/2)J_c \omega^2, \quad (2.37)$$

где J_c – момент инерции относительно центра масс.

Пример 2.2: Определить кинетическую энергию колеса с массой M , которое движется без проскальзывания со скоростью v_c , принимая его за однородный диск (рисунок 2.5).

Решение: По условию задачи колесо участвует в плоском движении, поэтому, подставляя в формулу (2.37) $\omega = (v_c / R)$ и с учетом, что $J_c = (MR^2/2)$, получим:

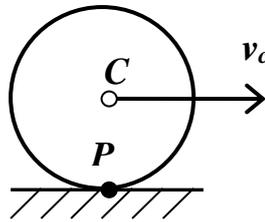


Рисунок 2.5

$$T = (1/2)Mv_c^2 + (1/2)(MR^2/2)(v_c/R)^2 = (3/4)Mv_c^2. \quad (2.38)$$

В дальнейшем можно пользоваться готовой формулой (2.38), не выводя каждый раз ее заново.

Приведем другой вывод формулы (2.38).

Как известно, используя понятие мгновенного центра скоростей (МЦС), можно в каждый момент времени свести плоское движение к вращательному.

В нашем примере МЦС колеса будет точка P , где оно контактирует с неподвижной поверхностью.

Момент инерции диска относительно этой точки равен:

$$J_p = J_c + M R^2 = MR^2/2 + MR^2 = (3/2) MR^2.$$

Воспользовавшись формулой (2.36) для кинетической энергии вращающегося тела, получим тот же результат:

$$T = (1/2)J_p \omega^2 = (3/4)Mv_c^2.$$

Ответ: $T = (3/4)Mv_c^2.$

Примечания:

1. Следует обратить внимание, что решение задачи не зависит от радиуса колеса.

2. Кинетическая энергия колеса за счет поступательного движения вдвое больше кинетической энергии, вызванной его вращением.

3. Кинетическая энергия вычисляется для определенного момента времени, поэтому формула (2.38) справедлива для диска, движущегося без проскальзывания по криволинейной поверхности, а также для диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр P и перпендикулярной к плоскости чертежа.

2.5. Изменение количества движения и кинетической энергии механической системы

2.5.1 Дифференциальное уравнение вращения твердого тела

Пусть твердое тело вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω против хода часовой стрелки.

При этом вектор ω направлен вверх, а его проекция на ось Oz положительна: $\omega_z = \text{пр}_z \omega > 0$.

Точка M_i этого тела, удаленная на расстояние R_i от оси вращения будет иметь линейную скорость $v_i = \omega R_i$, а проекция вектора скорости на направление касательной к траектории будет положительной: $v_{i\tau} = \text{пр}_\tau v_i > 0$.

Вычислим кинетический момент вращающегося тела, воспользовавшись формулой (2.25):

$$K_z = \sum m \omega_z (m_i v_i) = \sum (m_i v_{i\tau} R_i) = \sum (m_i \omega_z R_i^2) = \sum (m_i R_i^2) \omega_z = J_z \omega_z .$$

Итак, кинетический момент тела, вращающегося вокруг оси Oz , равен произведению момента инерции относительно оси вращения на проекцию вектора угловой скорости на эту ось:

$$K_z = J_z \omega_z . \tag{2.39}$$

Дифференциальное уравнение вращения ТТ. Подставляя формулу (2.39)

в последнее из соотношений (2.30) получим:

$$dK_z/dt = M_z^{(e)}, \quad (2.30')$$

Отсюда искомое ДУ вращения ТТ вокруг этой оси:

$$J_z(d\omega_z/dt) = J_z \varepsilon_z = M_z^{(e)}. \quad (2.40)$$

1. В таблице 2.1 приведены для сравнения основные зависимости теорем об изменении количества движения системы и кинетического момента системы.

Таблица 2.1 Основные зависимости изменений количества движения и кинетического момента механических систем

Теорема об изменении количества движения системы		Теорема об изменении кинетического момента системы	
$Q_x = M(dx_c/dt)$	(1)	$K_z = J_z(d\phi/dt)$	(4)
$(dQ_x/dt) = R_x^{(e)}$	(2)	$(dK_z/dt) = M_z^{(e)}$	(5)
$Ma_{cx} = R_x^{(e)}$	(3)	$J\varepsilon_z = M_z^{(e)}$	(6)

2. Математически соотношения (1)-(3) и (4)-(6) для ТТ эквивалентны, то есть закон движения центра масс системы вдоль оси Ox под действием $R_x^{(e)}$ аналогичен вращению ТТ вокруг оси Oz под действием $M_z^{(e)}$.

3. Если тело, вращающееся вокруг оси Oz , не является абсолютно твердым и может изменять свою конфигурацию и момент инерции относительно этой оси, системы не будут эквивалентными.

В самом деле, при $R_x^{(e)} = 0$ из (2) и (3) следует, что $\dot{x}_{c0} = \dot{x}_{ct}$, а из (5) и (6) при $M_z^{(e)} = 0$ следует только то, что $K_{z0} = K_{zt}$, откуда:

$$J_{z0}\omega_{z0} = J_{zt}\omega_{zt}. \quad (2.41)$$

Последнее соотношение объясняет поведение танцоров и спортсменов при выполнении пируэта, прыжка в воду или сальто-мортале: группируясь, они уменьшают свой момент инерции, что вызывает увеличение угловой скорости вращения и позволяет сделать максимальное число оборотов. Разгруппировавшись на заключительном этапе и уменьшив, тем самым угловую скорость вращения, они создают благоприятные условия для приземления или вхождения в воду.

4. Теорема об изменении кинетического момента системы дает ответы на такие вопросы как: почему у вертолета Ми-8 помимо основного несущего винта, расположенного над кабиной, на хвосте находится еще один винт, вращающийся в вертикальной плоскости, и почему такого винта нет у

вертолета Ка-32? Или, почему при падении на землю кошка, как правило, опускается на лапы, а не на спину?

Пример 2.2: Определить ускорение груза A , принимая барабан B за однородный цилиндр и полагая $m_A = m_B$ (рисунок 2.6, а).

Решение: Система состоит из двух тел: поступательно движущегося груза A и вращающегося барабана B .

Кинетический момент системы относительно оси Oz , перпендикулярной плоскости чертежа и совпадающей с осью вращения барабана будет складываться из кинетических моментов этих двух тел:

$$K_z = K_z^A + K_z^B = m_A v_A R + J_z \omega_z, \quad (a)$$

где R – радиус барабана, v_A – скорость тела A , J_z – момент инерции барабана, ω_z – его угловая скорость.

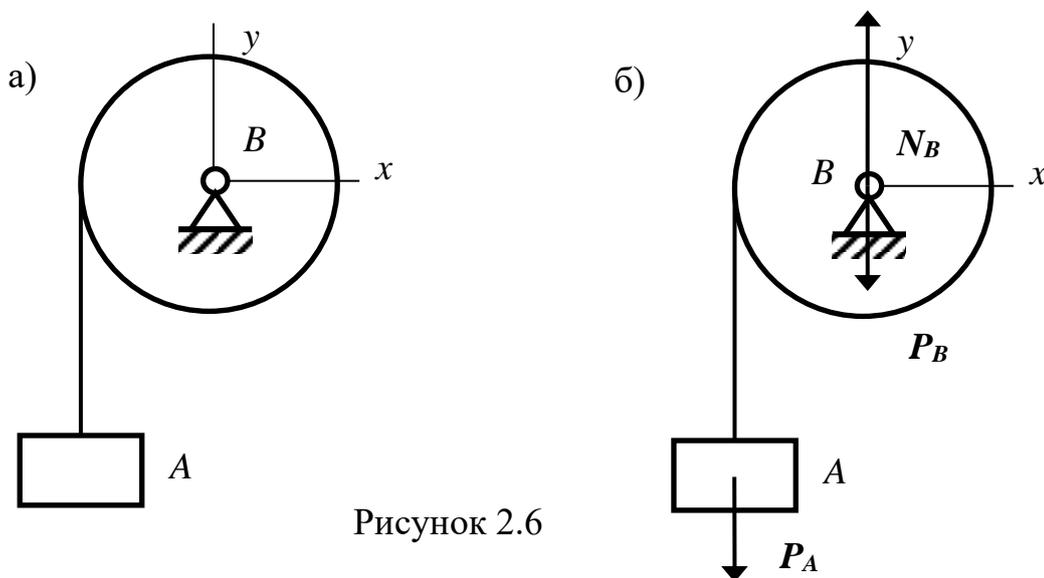


Рисунок 2.6

Подставляя в (а) $J_z = (m_B R^2/2)$, $\omega_z = v_A/R$ и полагая $m_A = m_B = m$, получим:

$$K_z = m_A v_A R + (m_B R^2/2)(v_A/R) = (3/2) m v_A R. \quad (б)$$

Внешними силами, действующими на систему, будут P_A – вес тела A , P_B – вес тела B и N_B – реакция подшипника барабана B , при этом момент двух последних относительно оси Oz равен нулю (рисунок 2.6, б), поэтому

$$M_z^{(e)} = P_A R = mgR. \quad (в)$$

Подставляя (б) и (в) в теорему об изменении кинетического момента системы

$$(dK_z/dt) = M_z^{(e)}, \quad (2.30')$$

получим: $a_A = (2/3) g$.

Ответ: $a_A = (2/3) g$.

2.5.2 Кинетический момент тела относительно произвольной оси

Рассмотрим точку M_i твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно произвольной неподвижной оси (рисунок 2.7).

Представим вектор $\boldsymbol{\omega}$ и радиус-вектор \mathbf{r}_i точки M_i в виде:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}.$$

Тогда вектор линейной скорости точки M_i , равный векторному произведению векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r}_i будет равен:

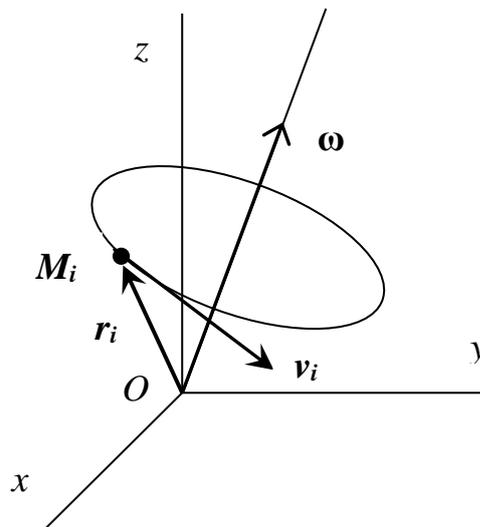


Рисунок 2.7

$$\mathbf{v}_i = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} (\omega_y z_i - y_i \omega_z) + \mathbf{j} (\omega_z x_i - z_i \omega_x) + \mathbf{k} (\omega_x y_i - x_i \omega_y).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых ортах в правой и левой частях последнего выражения, получим:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \omega_y z_i - \omega_z y_i, \\ v_y &= \dot{y} = \omega_z x_i - \omega_x z_i, \\ v_z &= \dot{z} = \omega_x y_i - \omega_y x_i. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Кинетический момент тела относительно центра O согласно (2.24) равен:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_O &= K_x \mathbf{i} + K_y \mathbf{j} + K_z \mathbf{k} = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \\ &= \sum m_i \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \\ &= \sum m_i (y_i v_z - v_y z_i) \mathbf{i} + \sum m_i (z_i v_x - v_z x_i) \mathbf{j} + \sum m_i (x_i v_y - v_x y_i) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых ортах в правой и левой частях последнего выражения, и подставляя в полученные соотношения (2.42), получим:

$$\begin{aligned} K_x &= \sum m_i (y_i v_z - v_y z_i) = \sum m_i [y_i (\omega_x y_i - x_i \omega_y) - z_i (\omega_z x_i - z_i \omega_x)] = \\ &= \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i (x_i y_i) - \omega_z \sum m_i (x_i z_i) = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z, \\ K_y &= -J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z, \\ K_z &= -J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Или, короче:

$$\{\mathbf{K}\} = [\mathbf{J}]\{\boldsymbol{\omega}\},$$

где $\{\mathbf{K}\}$ и $\{\boldsymbol{\omega}\}$ – вектор-столбцы кинетических моментов и угловых скоростей относительно координатных осей, а $[\mathbf{J}]$ – матричная форма *тензора инерции* тела.

Примечания:

1. Формулы (2.43) верны как для неподвижных осей x, y, z – тогда $J_x, J_{xy}, J_{xz}, \dots, J_z \neq \text{const}$, так и для подвижных осей, связанных с вращающимся телом – тогда все моменты инерции остаются постоянными.

2. Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz :

$$K_x = -J_{xz} \omega_z, K_y = -J_{yz} \omega_z, K_z = J_z \omega_z,$$

и если ось Oz – главная, то центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} равны нулю: $J_{xz} = J_{yz} = 0$, поэтому:

$$K_x = K_y = 0, K_z = J_z \omega_z.$$

2.5.3 Теорема об изменении кинетической энергии системы

Эта теорема является, пожалуй, самой удобной и важной из общих теорем динамики, позволяя решить большую часть задач, предлагаемых на экзамене.

При этом кинетическая энергия, в отличие от других мер механического движения является скалярной величиной.

2.5.3.1 Теорема для точки

Теорема. *Изменение кинетической энергии точки при ее перемещении из первого положения во второе равно сумме работ всех сил, действующих на нее, на этом перемещении:*

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A(F). \quad (2.44)$$

Доказательство. Запишем основное уравнение динамики для материальной точки M с массой m , движущейся под действием силы F :

$$ma = F.$$

Применив вторую подстановку $a = (v dv/dr)$, и умножив обе части на dr , получим:

$$m(v dv) = F dr,$$

откуда, внося v под знак дифференциала, получим теорему в форме дифференциалов:

$$d(mv^2/2) = \delta A(F). \quad (2.45)$$

Поделив последнее соотношение на dt , получим дифференциальную форму теоремы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{\delta A(F)}{dt} = N(F), \quad (2.46)$$

а, проинтегрировав (2.45), приходим к интегральной форме теоремы в виде соотношения (2.44).

2.5.3.2 Теорема для системы

Теорема. *Изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из первого положения во второе равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек их приложения:*

$$T_2 - T_1 = A_{12}^{(e)} + A_{12}^{(i)}. \quad (2.46)$$

Доказательство. Записывая формулы (2.45) и (2.46) для i -ой точки системы и суммируя, получим соотношения:

$$dT = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)}, \quad (2.48)$$

$$dT/dt = N^{(e)} + N^{(i)}, \quad (2.49)$$

а, интегрируя (2.48), приходим к (2.47). Теорема доказана.

Пример 2.3: Однородный стержень AB длиной l опускается под действием собственного веса, скользя концами по идеально гладким поверхностям. Найти скорость, которую будет иметь точка A стержня при его падении, если в данный момент времени она равняется v_A (рисунок 2.8).

Решение: Рассмотрим два состояния системы: первое – (1), где стержень находится под углом 30° к вертикали и второе – (2), которое горизонтально расположенный стержень занимает в момент падения.

Воспользуемся формулой (2.47):

$$T_2 - T_1 = A_{12}^{(e)}. \quad (a)$$

Кинетическую энергию системы в первом положении системы находим по формуле (2.37):

$$T = (1/2)Mv_c^2 + (1/2)J_c\omega^2. \quad (б)$$

Из треугольника ACP_{AB} находим: $CP_{AB} = AP_{AB}$, поэтому $v_C = v_A$.

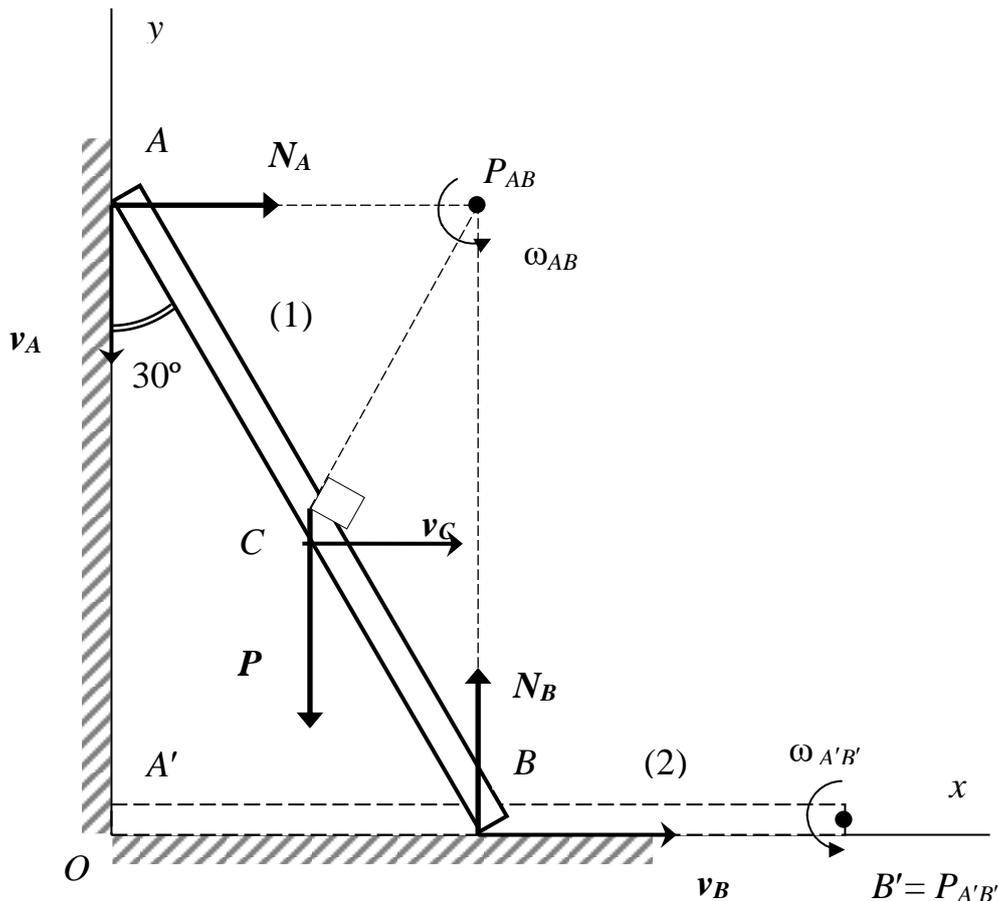


Рисунок 2.8

Подставляя в (б) $\omega_{AB} = v_A/AP_{AB} = 2v_A/l$ и $J_c = Ml^2/12$, получим:

$$T_1 = (1/2)Mv_A^2 + (1/2)(Ml^2/12)(2v_A/l)^2 = (2/3)Mv_A^2.$$

Во втором положении системы стержень участвует во вращательном движении относительно точки B' , совпадающей с МЦС, поэтому его кинетическую энергию можно найти по формуле (2.36), которая с учетом $\omega_{A'B'} = v_{A'}/l$ примет вид:

$$T_2 = (1/2)J_z \omega_{A'B'}^2 = (1/2) (Ml^2/3) (v_{A'}/l)^2 = (1/6)M v_{A'}^2. \quad (B)$$

При перемещении стержня из первого положения во второе реакции N_A и N_B остаются перпендикулярными к перемещениям точек A и B соответственно, поэтому работу совершит только вес стержня:

$$A_{12}^{(e)} = A_{12}^{(e)}(\mathbf{P}) = P(l/2)\cos 30^\circ = Mgl(\sqrt{3}/4).$$

Подставляя в (а), получим:

$$(1/6)M v_{A'}^2 - (2/3)Mv_A^2 = Mgl(\sqrt{3}/4),$$

$$v_{A'}^2 = 4v_A^2 + (3\sqrt{3}/2) gl,$$

откуда:

$$v_{A'} = \sqrt{4v_A^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} gl}.$$

$$\text{Ответ: } v_{A'} = \sqrt{4v_A^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} gl}.$$

Примечания:

1. Теорема об изменении кинетической энергии системы основана на применении второй подстановки при интегрировании ДУ движения: $\mathbf{a} = \mathbf{v}d\mathbf{v}/d\mathbf{r}$.

2. Теорема позволяет найти скорости точек системы, если известны их перемещения, и задана нагрузка.

3. Теорема позволяет определить потерю механической энергии системы, если известны скорости точек в двух состояниях системы.

4. Если на систему действует постоянная нагрузка, теорема позволяет определить зависимость $v_A = v_A(s_A)$ а также ускорение груза A .

2.6. Работа сил, приложенных к механической системе

2.6.1 Элементарная работа силы и ее мощность

Рассмотрим отрезок траектории точки M , в которой приложена сила \mathbf{F} .

Определение 1. Элементарная работа силы равна скалярному произведению вектора силы \mathbf{F} и вектора элементарного перемещения точки ее приложения $d\mathbf{r}$:

$$\delta A = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}). \quad (2.50)$$

Представив \mathbf{F} и $d\mathbf{r}$ в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \\ d\mathbf{r} &= dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}, \end{aligned}$$

получим *аналитическое* выражение элементарной работы силы, соответствующее не векторному, а *координатному* способу задания движения точки приложения силы:

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (2.50')$$

Наконец, если известен *естественный* способ задания движения точки M и дан закон изменения ее дуговой координаты $s = f(t)$, то формулу (7.9) можно записать в виде:

$$\delta A = |\mathbf{F}| \cdot |d\mathbf{r}| \cdot \cos(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = F_\tau \cdot ds, \quad (2.50'')$$

где F_τ – проекция силы \mathbf{F} на направление орта касательной $\boldsymbol{\tau}$.

Формулу (2.50) можно представить в следующем виде:

$$\delta A = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})(dt/dt) = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})(d\mathbf{r}/dt) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \cdot dt = N \cdot dt,$$

где мощность силы

$$N = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) = (\delta A/dt) \quad (2.51)$$

Таким образом, можно дать следующее определение.

Определение 2. *Мощность силы равна скалярному произведению вектора силы и вектора скорости точки ее приложения.*

Примечание:

1. В определении 1 речь идет не о материальной, а о геометрической точке M , и не утверждается, что точка M движется под действием этой силы.

2. Из формулы (2.51) следует, что мощность силы равна работе, совершаемой этой силой в единицу времени.

3. В системе СИ работы силы измеряется в Джоулях, а мощность – в Ваттах:

$$[A] = [\mathbf{F}] [s] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}, \\ [N] = [\mathbf{F}] [\mathbf{v}] = \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \text{Дж/с} = \text{Вт}.$$

4. Наглядным примером, поясняющим формулу $N = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$ будет следующий: автомобиль «Лада» и трактор «Беларусь» имеют приблизительно одинаковую мощность, но совершенно разный внешний вид, потому что выполняют различные функции. В первом случае – у автомобиля в этой формуле больше второй сомножитель – скорость, а во втором – первый – сила.

2.6.2 Работа сил, приложенных к твердому телу

2.6.2.1 Работа внутренних сил

Теорема. *Работа внутренних сил на любых перемещениях твердого тела равна нулю.*

Доказательство приведем для плоского движения тела. Пусть к фиксированным точкам A и B плоской фигуры, движущимся со скоростями \mathbf{v}_A и \mathbf{v}_B соответственно приложены внутренние силы $\mathbf{F}_1^{(i)}$ и $\mathbf{F}_2^{(i)}$, которые в силу

третьего закона Ньютона равны по модулю и противоположно направлены (рисунок 2.9):

$$\mathbf{F}_1^{(i)} = -\mathbf{F}_2^{(i)}. \quad (\text{a})$$

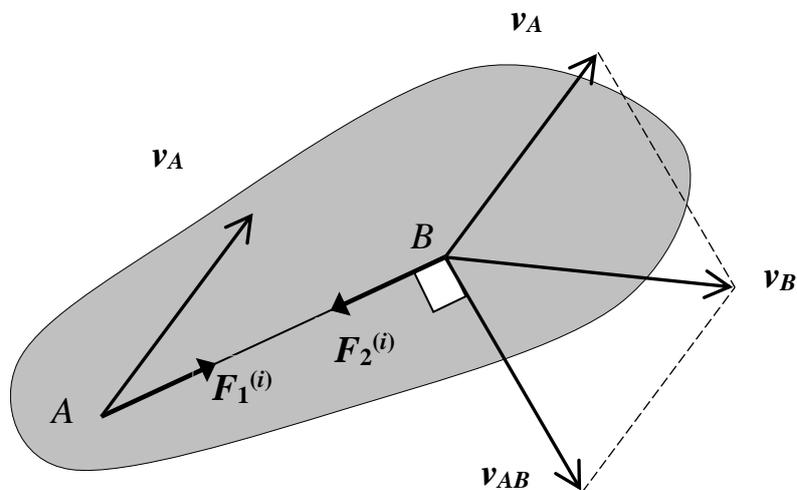


Рисунок 2.9

Выбрав в качестве полюса точку A , получим:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB}, \quad (\text{б})$$

где \mathbf{v}_{AB} – скорость точки B в ее вращении относительно полюса A , направленная перпендикулярно отрезку AB .

Вычислим элементарную работу сил $\mathbf{F}_1^{(i)}$ и $\mathbf{F}_2^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \delta A(\mathbf{F}_1^{(i)}, \mathbf{F}_2^{(i)}) &= \mathbf{F}_1^{(i)} d\mathbf{r}_A + \mathbf{F}_2^{(i)} d\mathbf{r}_B = (\mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_A + \mathbf{F}_2^{(i)} \mathbf{v}_B) dt \stackrel{(a)}{=} (\mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_A - \mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_B) dt \stackrel{(б)}{=} \\ &= (\mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_A - \mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_A - \mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_{AB}) dt = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_{AB} = 0$ в силу ортогональности векторов $\mathbf{F}_1^{(i)}$ и \mathbf{v}_{AB} .

Теорема доказана.

2.6.2.2 Работа внешних сил

Рассмотрим, как определяется работа внешних сил, приложенных к твердому телу, при различных случаях его движения.

1) Поступательное движение тела. Элементарная работа сил, приложенных к поступательно движущемуся телу, равна элементарной работе главного вектора внешних сил:

$$\delta A^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)} d\mathbf{r}_c. \quad (2.52)$$

В самом деле, при поступательном движении твердого тела все его точки имеют геометрически равные скорости, равные скорости центра масс, $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_c$ и поэтому:

$$\delta A^{(e)} = \sum \mathbf{F}_i^{(e)} d\mathbf{r}_i = (\sum \mathbf{F}_i^{(e)}) d\mathbf{r}_c = \mathbf{R}^{(e)} d\mathbf{r}_c .$$

Работа сил на конечном перемещении будет равна интегралу от этого выражения:

$$A_{12}^{(e)} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{R}^{(e)} d\mathbf{r}_c .$$

2) Вращательное движение тела. Элементарная работа сил, приложенных к телу, вращающемуся вокруг оси Oz , равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на элементарный угол поворота тела:

$$\delta A^{(e)} = M_o^{(e)} d\varphi. \quad (2.53)$$

Действительно, при повороте тела вокруг оси Oz на угол $d\varphi$, точки M_i этого тела с приложенными в них силами \mathbf{F}_i получают перемещения $d\mathbf{r}_i$, равные по модулю: $dr_i = R_i d\varphi$, где R_i – расстояние от точки M_i до оси вращения, поэтому с учетом (2.50''):

$$\begin{aligned} \delta A^{(e)} &= \sum \mathbf{F}_i^{(e)} d\mathbf{r}_i = \sum |F_i^{(e)}| \cos(\mathbf{F}_i^{(e)}, d\mathbf{r}_i) |dr_i| = \sum |F_i^{(e)}| \cos(\mathbf{F}_i^{(e)}, d\mathbf{r}_i) R_i d\varphi = \\ &= \sum M_o(\mathbf{F}_i^{(e)}) d\varphi = M_o^{(e)} d\varphi. \end{aligned}$$

Работа сил на конечном перемещении будет равна интегралу от этого выражения:

$$A_{12}^{(e)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_o^{(e)} d\varphi.$$

3) Плоское движение тела. Элементарная работа сил, приложенных к телу, совершающему плоское движение, определяется выражением:

$$\delta A^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)} d\mathbf{r}_c + M_c^{(e)} d\varphi, \quad (2.54)$$

где $\mathbf{R}^{(e)}$ – главный вектор внешних сил, приложенных к телу, а $M_c^{(e)}$ – главный момент внешних сил, приложенных к телу относительно центра C .

В самом деле, произвольную плоскую систему сил, приложенных к телу, можно привести к центру, то есть заменить главным вектором $\mathbf{R}^{(e)}$ и главным моментом $M_c^{(e)}$. При этом в качестве центра приведения можно выбрать центр масс.

Плоское движение, как известно, можно представить совокупностью двух движений: поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Работа главного момента на линейных перемещениях поступательного движения равна нулю и отлична от нуля только на угловых перемещениях, откуда и следует эта формула.

2.6.2.3 Работа силы на конечном перемещении

Пусть точка приложения силы \mathbf{F} перемещается по кривой из первого положения – (1), которое определяется точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$ во второе – (2) с точкой $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Определение. Работа силы на конечном перемещении определяется как криволинейный интеграл второго рода от элементарной работы:

$$A_{12}(\mathbf{F}) = \int_{(1)}^{(2)} \delta A = \int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}). \quad (2.55)$$

При координатном и естественном способах задания движения формула (2.55) примет соответственно вид:

$$A_{12}(\mathbf{F}) = \int_{(1)}^{(2)} (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{x_1}^{x_2} Xdx + \int_{y_1}^{y_2} Ydy + \int_{z_1}^{z_2} Zdz. \quad (2.55')$$

$$A_{12}(\mathbf{F}) = \int_{(1)}^{(2)} |\mathbf{F}| \cos(\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) ds = \int_{(1)}^{(2)} F_{\boldsymbol{\tau}} \cdot ds. \quad (2.55'')$$

Примечание:

При вычислении работы силы в соответствии со свойствами криволинейного интеграла второго рода:

$$\int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = - \int_{(2)}^{(1)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}); \quad \int_{(1)}^{(2)} \sum (F_i) \cdot d\mathbf{r} = \sum \int_{(1)}^{(2)} (F_i \cdot d\mathbf{r}); \quad \int_{(1)}^{(3)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = \int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) + \int_{(2)}^{(3)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}).$$

Пример 2.4: Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении. Пусть точка приложения силы \mathbf{F} перемещается по прямой M_1M_2 на расстояние S и при этом сила остается постоянной по модулю и направлению (рисунок 2.10):

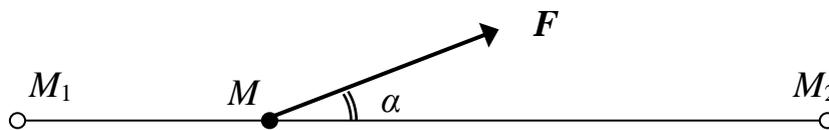


Рисунок 2.10

Решение: По формуле (2.55'') имеем:

$$A_{12}(\mathbf{F}) = \int_{(1)}^{(2)} |\mathbf{F}| \cos(\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) ds = \int_{(1)}^{(2)} F_{\boldsymbol{\tau}} \cdot ds = \int_0^S F \cos \alpha ds = F \cos \alpha \cdot S. \quad (2.56)$$

Таким образом, *работа постоянной силы на прямолинейном перемещении равна произведению модуля силы на модуль перемещения и на косинус угла между направлением силы и перемещением*. При этом:

$$A(\mathbf{F}) > 0, \text{ если } 0 < \alpha < \pi/2,$$

$$A(\mathbf{F}) = 0, \text{ если } \alpha = \pi/2,$$

$$A(\mathbf{F}) < 0, \text{ если } \pi/2 < \alpha < \pi.$$

Пример 2.5: *Работа силы тяжести*. Пусть точка приложения силы тяжести перемещается по кривой из положения M_1 в положение M_2 (рисунок 2.11).

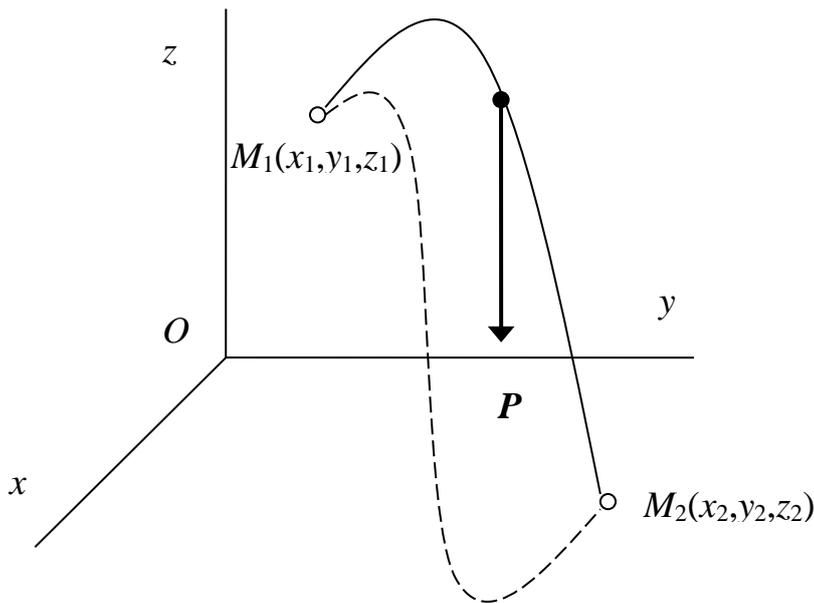


Рисунок 2.11

Решение: В выбранной системе отсчета

$$\mathbf{P} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$

где $X = Y = 0$, а $Z = -mg$.

Подставляя в (7.11'), получим:

$$A_{12}(\mathbf{P}) = \int_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = mg(z_1 - z_2). \quad (2.57)$$

Таким образом, *работа силы тяжести равна произведению веса тела на разность высот начального и конечного положения груза*.

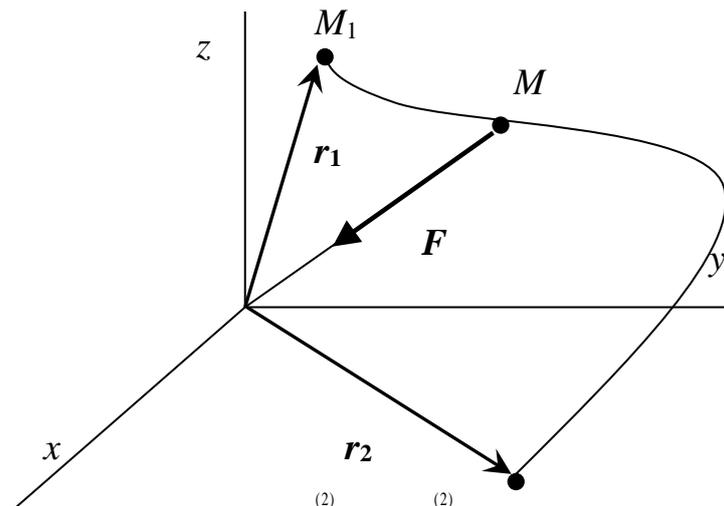
При этом работа силы тяжести не зависит от вида траектории точки ее приложения.

То есть, работа силы на траектории, показанной сплошной линией, равна работе той же силы на траектории, показанной пунктиром.

Пример 2.6: Работа упругой силы. Упругой называют силу, которая пропорциональна по модулю и обратна по направлению радиус-вектору, определяющему точку ее приложения $\mathbf{F} = -c\mathbf{r}$ (рисунок 2.12).

Такой силой является, например, упругая сила растянутой пружины и в этом случае коэффициент c – это жесткость пружины. В общем случае такая сила может иметь другую природу и называться *квазиупругой* или *восстанавливающей*.

Решение: Определим работу упругой силы при перемещении точки ее приложения M по кривой M_1M_2 .



$$A_{12}(\mathbf{F}) = \int_{(1)}^{(2)} \delta A = \int_{(1)}^{(2)} M_2 \cdot r_1. \quad (7.11)$$

Рисунок 2.12

По формуле (2.55):

$$\begin{aligned} A_{12}(\mathbf{F}) &= \int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = \int_{M_1}^{M_2} (-c\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = (-c) \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (-c/2) \int_{r_1}^{r_2} d(r^2) = \\ &= -\frac{cr^2}{2} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{c}{2} (r_1^2 - r_2^2). \end{aligned}$$

Итак, *работа упругой силы равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного радиус-вектора*. При этом работа упругой силы так же не зависит от вида траектории.

Вернемся к рассмотрению упругой силы растянутой пружины, выбрав, как и прежде, начало отсчета на конце недеформированной пружины.

Работа упругой силы пружины при ее растяжении из недеформированного состояния будет равна:

$$A_{12}(\mathbf{F}) = \int_0^x (-cx) dx = -(cx^2)/2 = -(F \cdot x)/2. \quad (2.58)$$

Последнее выражение означает, что *работа упругой силы равна половине произведения максимального значения силы на величину соответствующего ей удлинения пружины*.

Пример 2.7: Определить работу сил трения при торможении тележки в примере 2.1 (раздел 2.1.3).

Решение: Рассмотрим два состояния системы: первое – до начала торможения тележки, второе – после его окончания:

$$T_1 = T_1^{(\text{пл})} + T_1^{(\text{тел})} = (1/2) Mv_0^2 + (1/2) m(v_0 + u_0)^2,$$

$$T_2 = T_2^{(\text{пл})} + T_2^{(\text{тел})} = (1/2) (M + m) v^2,$$

где

$$v = v_0 + mu_0/(M + m) \quad (\text{a})$$

– скорость платформы после торможения тележки, найденная в примере 2.1 с помощью теоремы об изменении количества движения системы.

Работа внешних сил, приложенных к системе, равна нулю, поэтому из (2.47) следует, что работа сил трения равна изменению кинетической энергии системы:

$$A_{12}^{(i)} = T_2 - T_1 = (1/2)(M + m)v^2 - (1/2)Mv_0^2 - (1/2)m(v_0 + u_0)^2,$$

откуда, подставляя (a), получим:

$$\begin{aligned} A_{12}^{(i)} &= (1/2)(M + m)[v_0 + mu_0/(M + m)]^2 - (1/2)Mv_0^2 - (1/2)mv_0^2 - (1/2)mu_0^2 - mv_0u_0 = \\ &= - (mM)u_0^2/2(M + m). \end{aligned}$$

Ответ: $A_{12}^{(i)} = - (mM)u_0^2/2(M + m).$

Пример 2.8: Найти ускорение тела A, принимая барабан B за однородный цилиндр и полагая $m_A = m_B$ (рисунок 2.13, а).

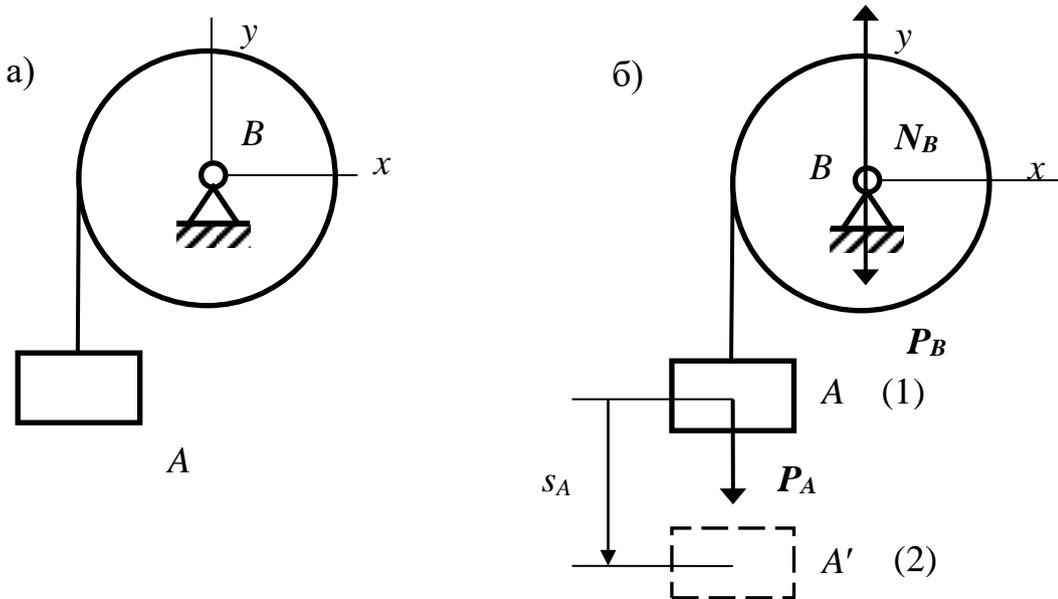


Рисунок 2.13

Решение: Груз A движется под действием постоянной силы P_A с постоянным ускорением, которое не зависит от начальной скорости, и которую можно считать равной нулю.

Рассмотрим два состояния системы: первое – в состоянии покоя, для которого $T_1 = 0$, и второе – текущее, соответствующее смещению груза A на величину s_A от первоначального положения (рисунок 2.13, б), для которого

$$T_2 = T = T^A + T^B = (1/2)m_A v_A^2 + (1/2)(m_B R^2/2)(v_A/R)^2 = (3/4)m v_A^2.$$

Подставляя T_2 в (2.47) вместе с работой силы P_A , придем к соотношению:

$$(3/4)m v_A^2 = m g s_A,$$

продифференцировав которое, получим:

$$(3/2)v_A a_A = v_A g,$$

откуда $a_A = (2/3)g$.

Ответ: $a_A = (2/3)g$.

Пример 2.9: Система, состоящая из трех тел A , B и C одинаковой массы приходит в движение из состояния покоя. Принимая B и C за однородные цилиндры, определить:

- какую скорость приобретет груз A , пройдя расстояние s_A ,
- ускорение тела A (рисунок 2.14).

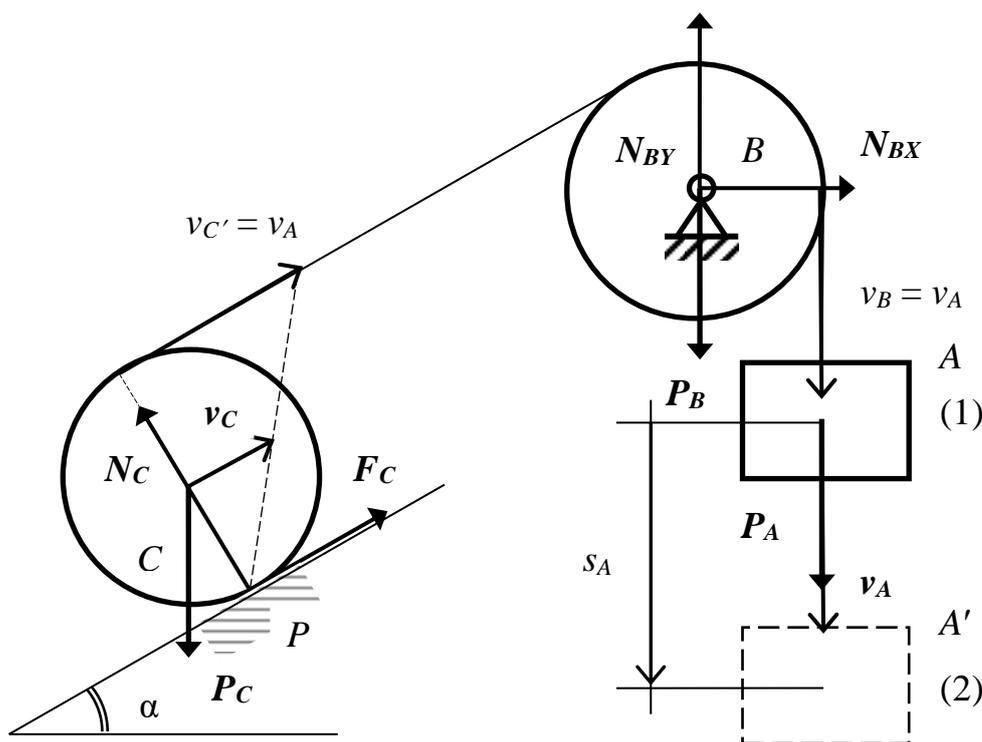


Рисунок 2.14

Решение: Прикладываем к системе внешние активные силы (P_A, P_B, P_C) и реакции отброшенных связей (N_{Bx}, N_{By}, N_C, F_C), где F_C – сила трения, приложенная к катушке C .

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы (2.47):

$$T_2 - T_1 = A_{12}^{(e)} + A_{12}^{(i)}, \quad (a)$$

выбрав в качестве первого состояния – состояние покоя, а в качестве второго – текущее состояние, соответствующее смещению груза A на расстояние s_A .

По условию задачи $T_1 = 0$, а

$$T_2 = T_A + T_B + T_C = (1/2)m_A v_A^2 + (1/2)J_B \omega_B^2 + (3/4)m_C v_C^2.$$

Подставляя сюда

$$\begin{aligned} \omega_B &= (v_B / R_B) = (v_A / R_B), \\ J_B &= (m_B R_B^2) / 2 \text{ и} \\ v_C &= v_C' / 2 = v_A / 2, \end{aligned} \quad (б)$$

и обозначая $m_A = m_B = m_C = m$, получим:

$$T_2 = (15/16) m v_A^2. \quad (в)$$

Переходя к вычислению работы сил, отметим, что

$$A_{12}^{(e)}(N_C, F_C) = 0. \quad (г)$$

В самом деле, точка P , в которой приложены силы N_C и F_C является мгновенным центром скоростей диска C , то есть

$$\delta A_{12}^{(e)}(N_C, F_C) = N_C \delta r_P + F_C \delta r_P = (N_C + F_C) v_P dt = 0,$$

откуда и следует (г). Итак, справедливо следующее утверждение: *Работа сил, приложенных в точке, являющейся мгновенным центром скоростей, равна нулю.*

Работа сил P_B , N_{BY} и N_{BX} равна нулю, поскольку перемещения точек их приложения равны нулю, и таким образом, работу будут совершать только силы P_A и P_C :

$$A_{12}^{(e)} = A_{12}^{(e)}(P_A, P_C) = P_A s_A - P_C s_C \sin \alpha. \quad (д)$$

Чтобы выразить s_C через s_A , воспользуемся соотношением (б), проинтегрировав которое, получим:

$$s_C = s_C' / 2 = s_A / 2,$$

откуда (д) примет вид:

$$A_{12}^{(e)} = A_{12}^{(e)}(P_A, P_C) = P_A s_A - P_C s_C \sin \alpha = m g s_A (1 - 0,5 \sin \alpha). \quad (е)$$

Подставляя (в) и (е) в (а), получим:

$$(15/16) v_A^2 = g s_A (1 - 0,5 \sin \alpha), \quad (ж)$$

откуда придем к искомой зависимости:

$$v_A = \sqrt{(16/15) g s_A (1 - 0,5 \sin \alpha)},$$

и чтобы найти ответ, остается положить в последнем выражении $s_A = S_A$.

Дифференцируя (ж), получим:

$$(15/8) v_A a_A = g v_A (1 - 0,5 \sin \alpha),$$
$$a_A = (8/15)(1 - 0,5 \sin \alpha)g.$$

$$\text{Ответ: } v_A = \sqrt{(16/15) g S_A (1 - 0,5 \sin \alpha)},$$
$$a_A = (8/15)(1 - 0,5 \sin \alpha)g.$$

2.7 Вопросы для самоподготовки

- 1 Какая точка понимается под центром масс механической системы?
- 2 Какой вид имеют формулы для определения положения центра масс?
- 3 Какие силы в механической системе считаются ее внутренними силами?
- 4 Как формулируются законы сохранения движения или положения центра масс механической системы? Приведите примеры действия закона.
- 5 Какой вид имеет и как выводится теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме?
- 6 Какой вид имеет и как формулируется теорема об изменении количества движения механической системы в интегральной форме?
- 7 Как формулируются законы сохранения количества движения механической системы?
- 8 Какое явление называется ударом?
- 9 Назовите виды удара
- 10 Какой вид имеет и как формулируется основное уравнение теории удара?
- 11 Что понимается под коэффициентом восстановления при ударе?
- 12 Как формулируется теорема об изменении количества движения механической системы
- 13 Что понимается под моментом количества движения механической системы относительно неподвижного центра O?
- 14 Что понимается под кинетическим моментом механической системы относительно неподвижного центра O?
- 15 Что понимается под моментом инерции тела относительно произвольной оси?
- 16 Какой вид имеет и как формулируется теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра и оси?
- 17 Какой вид имеют дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела?
- 18 Что понимается под кинетической энергией механической системы?
- 19 Как формулируется и записывается теорема об изменении кинетической энергии механической системы в общем случае и для системы твердых тел?
- 20 Как формулируется теорема Кенига?
- 21 Как определяется работа сил, приложенных к механической системе
- 22 Приведите примеры определения работы сил в частных случаях

МОДУЛЬ 3 Потенциальное поле сил

3.1 Потенциальная энергия системы

3.1.1. Общие положения

Рассмотрим область Ω , принадлежащую трехмерному евклидову пространству.

Определение 1. В области Ω задано скалярное поле, если каждой точке $M(x, y, z)$ этой области поставлено в соответствие число $U(x, y, z)$.

Примерами скалярного поля являются поле температур или поле освещенности.

Определение 2. В области Ω задано векторное поле, если каждой точке $M(x, y, z)$ этой области поставлен в соответствие вектор $F(x, y, z)$, зависящий от координат этой точки.

Если эта зависимость не меняется со временем, поле называется *стационарным*. Примером такого поля будет поле скоростей стационарного потока жидкости.

Важным примером векторных полей являются *силовые поля*. Например – гравитационное или электростатическое.

Определение 3. Стационарное силовое поле $F(x, y, z)$ называется *потенциальным*, если работа сил этого поля не зависит от вида траектории и определяется начальным и конечным положением точек их приложения.

Силы такого поля называются *потенциальными* или *консервативными*, которые мы будем рассматривать.

3.1.2 Потенциальная энергия системы

Рассмотрим систему материальных точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$ в потенциальном силовом поле $F(x, y, z)$, где на каждую точку действует сила $F_i(x_i, y_i, z_i)$.

Примем некоторое положение нашей системы за *начальное* или иначе *нулевое*: $M_i^{(0)}(x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, z_i^{(0)})$.

Определение. Потенциальной энергией системы $\Pi(x, y, z) = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$ называется *сумма работ сил потенциального поля, действующих на точки системы при ее перемещении из данного положения в нулевое*.

Теорема. Силовое поле $F(x, y, z)$ будет потенциальным, если его можно представить в виде градиента скалярного поля:

$$F(x, y, z) = -\text{grad } \Pi = -[(d\Pi/dx)\mathbf{i} + [(d\Pi/dy)\mathbf{j} + [(d\Pi/dz)\mathbf{k}], \quad (3.1)$$

где $\Pi(x, y, z)$ – *потенциальная энергия системы*.

Доказательство. Элементарная работа сил поля, действующих на точки системы, с учетом (3.1) будет равна:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = - \sum_{i=1}^n [(\partial \Pi / \partial x_i) dx_i + (\partial \Pi / \partial y_i) dy_i + (\partial \Pi / \partial z_i) dz_i] = - d\Pi.$$

Тогда на конечном перемещении

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \delta A = - \int_{(1)}^{(2)} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2, \quad (3.2)$$

а это согласно определению 3 означает, что поле $\mathbf{F}(x, y, z)$ потенциально. Теорема доказана.

Следствия:

- 1) Потенциальная энергия системы определяется с точностью до константы.
- 2) Силы потенциального поля направлены по нормали к эквипотенциальным поверхностям $\Pi(x, y, z) = \text{const}$ в сторону уменьшения значения потенциальной энергии.
- 3) Работа сил потенциального поля на замкнутых траекториях равна нулю.
- 4) Для потенциального поля сил:

$$\delta A = dA = - d\Pi.$$

3.1.3 Примеры потенциальных силовых полей

Вернемся к примерам вычисления работы сил, приведенным в предыдущем разделе, и выясним, какие из рассмотренных там полей будут потенциальными.

В соответствии с теоремой и следствиями из предыдущего параграфа для этого достаточно убедиться, в том, что выполняются соотношения (3.1) или (3.2), либо в том, что $dA = - d\Pi$.

1) Поле силы тяжести. Элементарная работа силы этого поля будет равна:

$$\delta A = (-mg) dz = - d(mgz) = - d\Pi,$$

то есть поле потенциально. Его потенциальная энергия описывается с точностью до константы функцией:

$$\Pi = mgz + \text{const},$$

а эквипотенциальными поверхностями будут плоскости: $z = \text{const}$ (рисунок 3.1).

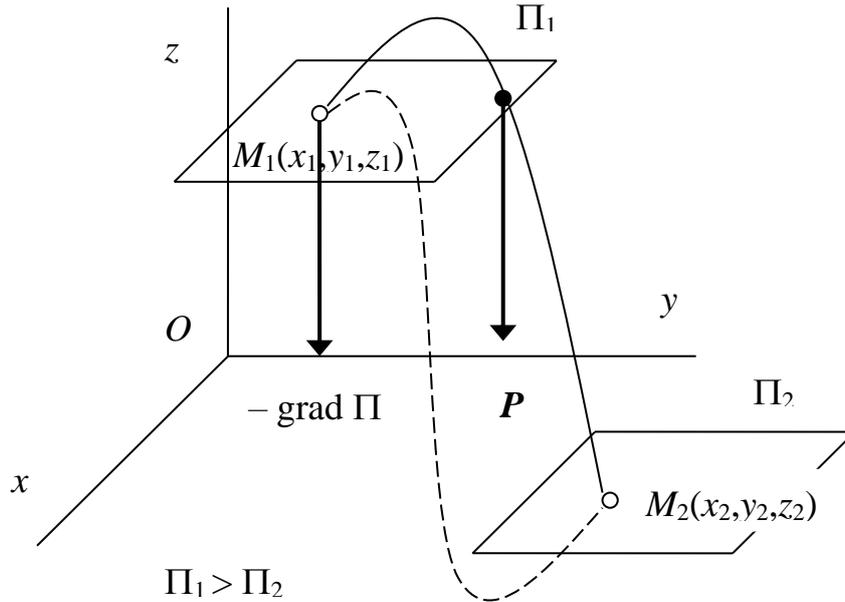


Рисунок 3.1

При этом

$$\mathbf{P} = -\text{grad } \Pi = -(\partial\Pi/\partial z)\mathbf{k},$$

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2.$$

2) *Поле упругой силы.* Элементарная работа силы этого поля будет равна:

$$\delta A = \mathbf{F}d\mathbf{r} = -c\mathbf{r}d\mathbf{r} = -d(cr^2/2) = -d\Pi,$$

то есть поле потенциально, его потенциальная энергия имеет вид:

$$\Pi = cr^2/2 + \text{const} = (c/2)(x^2 + y^2 + z^2) + \text{const},$$

а эквипотенциальными поверхностями будут сферы: $r = \text{const}$ (рисунок 3.2).

При этом

$$\mathbf{F} = -c\mathbf{r} = -\text{grad}(cr^2/2),$$

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2.$$

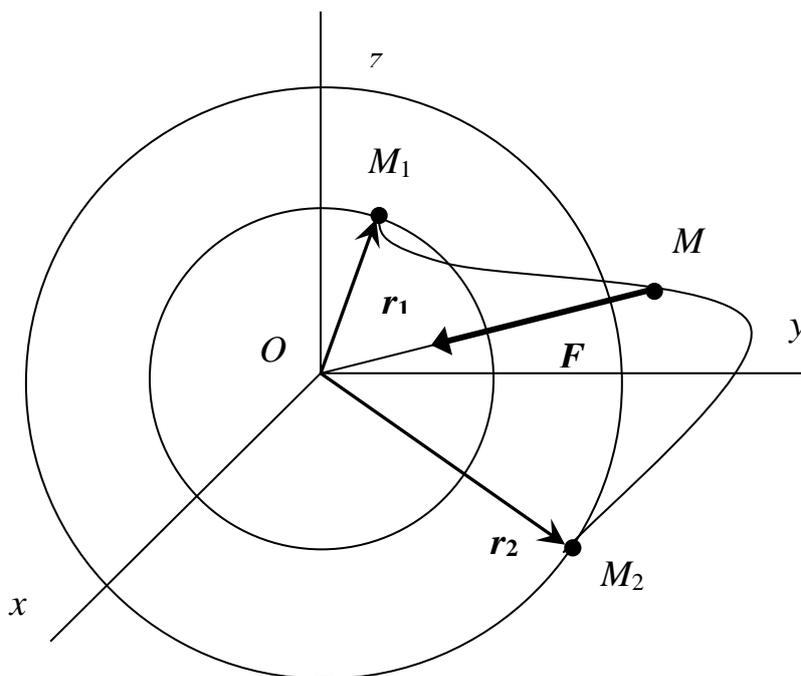


Рисунок 3.2

3.1.3 Закон сохранения механической энергии

Теорема. При движении системы в потенциальном поле сил ее полная механическая энергия остается постоянной:

$$T + \Pi = \text{const.} \quad (3.3)$$

Доказательство. Теорема об изменении кинетической энергии системы:

$$T_2 - T_1 = A_{12}$$

для потенциального поля сил примет вид:

$$T_2 - T_1 = \Pi_1 - \Pi_2,$$

или

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2$$

откуда и следует (3.3).

3.2 Принцип Д Аламбера

Принцип Д Аламбера, к рассмотрению которого мы приступаем, существенно отличается от общих теорем динамики. Если последние позволяют получить первый интеграл и продвинуться на один шаг в решении задачи Коши для дифференциального уравнения движения, то принцип Д Аламбера в математическом аспекте ничем не отличается от основного уравнения динамики.

Однако этот принцип имеет важное методологическое значение, позволяя свести по форме решение первой задачи динамики к задаче статики, что особенно привлекательно для студентов строительных специальностей.

Кроме того, этот принцип находит эффективное применение совместно с принципом возможных перемещений, рассмотренным в следующей главе.

3.2.1 Принцип Д Аламбера для точки

Рассмотрим точку M с массой m , движущуюся под действием силы F . Основное уравнение динамики для этой точки:

$$ma = F \quad (3.4)$$

можно записать в виде:

$$F + \Phi = 0, \quad (3.5)$$

где Φ – сила инерции или *Д Аламберова* сила. Таким образом:

В каждый момент времени сумма всех сил, действующих на точку и силы инерции равна нулю.

Уравнение (3.5) по форме совпадает с уравнением статики и его применение нередко оказывается более удобным, чем использование уравнения (3.4).

3.2.2 Динамика относительного движения точки

Принцип Д Аламбера удобен при рассмотрении сложного движения точки, когда последняя перемещается относительно тела, с которым связана локальная система отсчета, и одновременно передвигается вместе с этим телом, участвуя в переносном движении.

Уже отмечалось, что если система отсчета не является инерциальной, в ней не выполняется основное уравнение динамики, а законы движения точки в локальной и глобальной системах будут различными.

Напомним, что в соответствии с теоремой об ускорениях точки в сложном движении ее абсолютное ускорение равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и кориолисова:

$$\mathbf{a}^a = \mathbf{a}^r + \mathbf{a}^e + \mathbf{a}^k,$$

поэтому соотношения (3.4) и (3.5) примут вид:

$$m\mathbf{a}^r = \mathbf{F} + \Phi^e + \Phi^k, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{F} + \Phi^r + \Phi^e + \Phi^k, \quad (3.7)$$

где \mathbf{F} – равнодействующая всех активных сил и реакций связей, приложенных к точке, а $\Phi^r = -m\mathbf{a}^r$, $\Phi^e = -m\mathbf{a}^e$ и $\Phi^k = -m\mathbf{a}^k$ – соответственно: *относительная*, *переносная* и *кориолисова* силы инерции.

При этом зависимость (3.6) – представляет собой дифференциальное уравнение относительного движения точки в локальной системе координат, связанной с движущимся телом:

$$m(d^2\mathbf{r})/(dt^2) = \mathbf{F} + \Phi^e - 2m[\boldsymbol{\omega}^e \times (d\mathbf{r})/(dt)],$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки в локальной системе отсчета, а $\boldsymbol{\omega}^e$ – угловая скорость вращения связанного с ней тела.

Таким образом, относительное движение точки под действием силы \mathbf{F} в неинерциальной системе отсчета не отличается от движения той же точки в инерциальной системе отсчета, на которую помимо силы \mathbf{F} действуют дополнительно силы Φ^e и Φ^k . Аналогичное замечание можно сделать и в отношении формулы (3.7).

При решении большинства технических проблем систему координат, связанную с Землей считают инерциальной, пренебрегая тем самым двумя последними слагаемыми в выражении (3.6). Однако в некоторых случаях, например – при больших значениях относительной скорости $\mathbf{v}^r = (d\mathbf{r})/(dt)$, их учет становится необходимым, поскольку вместе с \mathbf{v}^r возрастает ускорение Кориолиса $\mathbf{a}^k = 2[\boldsymbol{\omega}^e \times \mathbf{v}^r]$, а значит и Φ^k .

Пример 3.1. Определить величину ускорения Кориолиса для спутника, выведенного на круговую полярную орбиту на высоте $H = 100$ км.

Решение. На спутник с массой m действует сила притяжения, обратно пропорциональная квадрату расстояния от центра Земли:

$$F = (mgR^2)/(x^2),$$

где R – радиус Земли.

Определим вначале, следуя условиям задачи, скорость движения спутника, рассматривая его движение как абсолютное. Проектируя основное уравнение динамики на направление нормали к заданной траектории, получим:

$$m(v^r)^2/(R + H) = (mgR^2)/(R + H)^2,$$

откуда

$$v = \sqrt{(gR^2)/(R + H)} = R \sqrt{g/(R + H)} = 6370 \cdot 10^3 \sqrt{(9,81)/(6470 \cdot 10^3)} = 6370 \cdot 10^3 \cdot$$

$$\sqrt{(9,81)/(6,470 \cdot 10^6)} = 6370 \cdot \sqrt{(9,81)/6,470} = 7840 \text{ (м/с)}.$$

Искомое ускорение Кориолиса будет достигать максимального значения на полюсе, где абсолютная скорость спутника совпадает с относительной v^r :

$$a^k = 2|\omega^e| \cdot |v^r| = 2 \cdot 0,726 \cdot 10^{-4} \cdot 0,784 \cdot 10^4 = 1,13 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

где

$$\omega^e = (2\pi)/(24 \cdot 60 \cdot 60) = [(6,28)/(2,4 \cdot 3,6)] \cdot 10^{-4} = 0,726 \cdot 10^{-4} \text{ (с}^{-1}\text{)}$$

– угловая скорость вращения Земли.

Соответствующая этому ускорению кориолисова сила инерции Φ^k в северном полушарии направлена вправо и вызывает уход спутника с полярной орбиты.

Ответ: $a^k = 1,13 \text{ (м/с}^2\text{)}$

Ускорение Кориолиса оказывает влияние на возникновение и особенности протекания многих природных процессов, включая морские и воздушные течения. Им, в частности, объясняется то обстоятельство, что у рек, текущих в северном полушарии высоким бывает правый, а в южном – левый берег.

Примечания:

1. Можно привести еще один пример, когда система отсчета, связанная с Землей не может считаться инерционной и необходимо учитывать ускорение Кориолиса.

Во время конфликта между Аргентиной и Великобританией по поводу Фолклендских островов эскадра ВМС последней перебазировалась из северного полушария в южное и приступила к боевым операциям. Для пристрелянных по месту постоянной дислокации корабельных орудий при дальности стрельбы в 10 километров и начальной скорости снаряда, равной 500 м/сек, его отклонение от цели из-за изменения направления ускорения Кориолиса составляло 25 метров.

2. Груз, подвешенный на нити и находящийся в состоянии относительного покоя, демонстрирует разницу между силой притяжения Земли F и весом тела P , равным силе натяжения нити:

$$P = |\mathbf{P}| = |\mathbf{F} + \Phi^e|.$$

3.2.2 Принцип Д Аламбера для системы

Рассмотрим систему n материальных точек M_i с массами m_i . Записывая уравнение (3.5) для каждой i -ой точки:

$$\mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(i)} + \Phi_i = 0, \quad (3.8)$$

а затем, суммируя по всем точкам системы, получим:

$$\mathbf{R}^{(e)} + \Phi_o = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

где $\mathbf{R}^{(e)} = \Sigma \mathbf{F}_i^{(e)}$ – главный вектор внешних сил, а $\Phi_o = \Sigma \Phi_i$ – главный вектор сил инерции системы.

Умножив (3.6) векторно слева на радиус-вектор \mathbf{r}_i , а затем, просуммировав по всем точкам системы, получим:

$$\mathbf{M}_o^{(e)} + \mathbf{M}_o^{\text{ин}} = \mathbf{0}, \quad (3.10)$$

где $\mathbf{M}_o^{(e)} = \Sigma (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)})$ – главный момент внешних сил, а $\mathbf{M}_o^{\text{ин}} = \Sigma (\mathbf{r}_i \times \Phi_i)$ – главный момент сил инерции системы относительно центра приведения O . Таким образом:

В каждый момент времени сумма главного вектора внешних сил и главного вектора сил инерции, а также сумма главного момента внешних сил и главного момента сил инерции равны нулю.

Главный вектор и главный момент сил инерции можно выразить через кинематические параметры системы, если сначала с помощью (3.9) и (3.10) выразить их через приложенную к системе нагрузку, а затем воспользоваться теоремой об изменении количества движения системы получим:

$$d\mathbf{Q}/dt = \mathbf{R}^{(e)} \quad (3.11)$$

и теоремой об изменении кинетического момента системы имеем:

$$d\mathbf{K}_o/dt = \mathbf{M}_o^{(e)} \quad (3.12)$$

Тогда, соответствующие формулы примут вид:

$$\Phi_o = -d\mathbf{Q}/dt = -M\mathbf{a}_c, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{M}_o^{\text{ин}} = -d\mathbf{K}_o/dt, \quad (3.14)$$

где в (3.13) M – масса системы, \mathbf{a}_c – ускорение центра масс.

Примечания:

1. Главный вектор Φ_o не зависит, а главный момент M_o^{mn} зависит от выбора центра приведения.
2. Два векторных уравнения (3.11) и (3.12) эквивалентны трем скалярным на плоскости и шести скалярным в пространстве.

3.2.3 Приведение сил инерции твердого тела

В общем случае силы инерции, приложенные к каждой точке твердого тела, можно заменить главным вектором Φ_o и главным моментом M_o^{mn} , которые определяются выражениями (3.13) и (3.14).

Рассмотрим приведения сил инерции твердого тела в зависимости от вида его движения.

1) Поступательное движение тела.

Теорема. При поступательном движении ТТ силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной в центре масс и равной:

$$\Phi = -Ma_c, \quad (3.15)$$

где M – масса тела, a_c – ускорение центра масс.

Доказательство. Выбирая в качестве центра приведения центр масс и учитывая, что при поступательном движении ускорения всех точек тела равны: $a_i = a_c$, получим:

$$\begin{aligned} \Phi_c &= -Ma_c, \\ M_c^{mn} &= \sum(\bar{r}_i \times \Phi_i) = -\sum(\bar{r}_i \times m_i a_i) = -\sum(m_i \bar{r}_i) \times a_c = -M \bar{r}_c \times a_c = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\bar{r}_c = 0$. Таким образом, $\Phi_c \neq 0$, $M_c^{mn} = 0$, откуда следует, что главный вектор эквивалентен равнодействующей сил инерции: $\Phi_c \sim \Phi$.

Теорема доказана.

2) Вращение тела вокруг неподвижной главной центральной оси.

Теорема. При вращении тела вокруг неподвижной главной центральной оси силы инерции приводятся к паре сил с моментом, равным произведению момента инерции относительно оси вращения на угловое ускорение:

$$M_c^{mn} = -J_z \varepsilon. \quad (3.16)$$

Доказательство. Пусть тело вращается вокруг главной центральной оси O_z с угловым ускорением ε $(0, 0, \varepsilon_z)$.

Выбирая в качестве центра приведения центр масс, лежащий на этой оси, согласно формулам (3.13) и (3.14) получим:

$$\begin{aligned}\Phi_c &= -Ma_c = 0, \\ M_c^{\text{ин}} &= -dK_c/dt,\end{aligned}$$

где

$$K_c = K_x i + K_y j + K_z k,$$

а с учетом формул моментов инерций (2.40):

$$M_c^{\text{ин}} = J_{xz} \varepsilon_z i + J_{yz} \varepsilon_z j - J_z \varepsilon_z k = -J_z \varepsilon_z k = -J_z \varepsilon,$$

поскольку для главной оси инерции Oz :

$$J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Итак, $\Phi_c = 0$, $M_c^{\text{ин}} \neq 0$, откуда следует, что система эквивалентна паре сил. Теорема доказана.

Примечание:

Если ось, вокруг которой вращается тело, не является центральной, то главный вектор сил инерции $\Phi_c \neq 0$, при этом

$$\Phi_c = \Phi_c^{\omega} + \Phi_c^{\varepsilon},$$

где $\Phi_c^{\omega} = -Ma_c^{\omega}$ и $\Phi_c^{\varepsilon} = -Ma_c^{\varepsilon}$ соответственно являются *центробежной* и *вращательной* силами инерции, приложенными в центре масс этого тела.

3.2.4 Плоское движение тела с плоскостью симметрии

Теорема. При плоском движении тела с плоскостью симметрии силы инерции приводятся к главному вектору и главному моменту:

$$\Phi_c = -Ma_c, \tag{3.17}$$

$$M_c^{\text{ин}} = -J_z \varepsilon.$$

Доказательство. Поскольку тело имеет плоскость симметрии, его центр масс лежит в этой плоскости, а ось, проходящая через него и перпендикулярная этой плоскости, будет главной центральной осью инерции тела.

Выбирая в качестве центра приведения центр масс, лежащий на этой оси, согласно формулам (3.11) и (3.12) получим (3.17).

Теорема доказана.

Пример 3.2: Определить ускорение груза A – a_A и реакцию подшипника N_B , принимая барабан B за однородный цилиндр и полагая $m_A = m_B$ (рисунок 3.3, а).

Решение: Система состоит из двух тел: поступательно движущегося груза A и вращающегося барабана B .

В соответствии с принципом Д'Аламбера прикладываем к системе активные силы P_A и P_B , и реакцию подшипника N_B (рисунок 3.3, б).

Силы инерции поступательно движущегося тела A заменяем согласно (3.15) равнодействующей

$$|\Phi_A| = \Phi_A = m_A a_A,$$

а силы инерции барабана B – согласно (3.12) моментом

$$M_B^{\text{ин}} = J_B \varepsilon_B = (m_B R^2 / 2) (a_A / R) = (m_B R / 2) a_A.$$

Определение неизвестных a_A и N_B по форме не отличается от определения

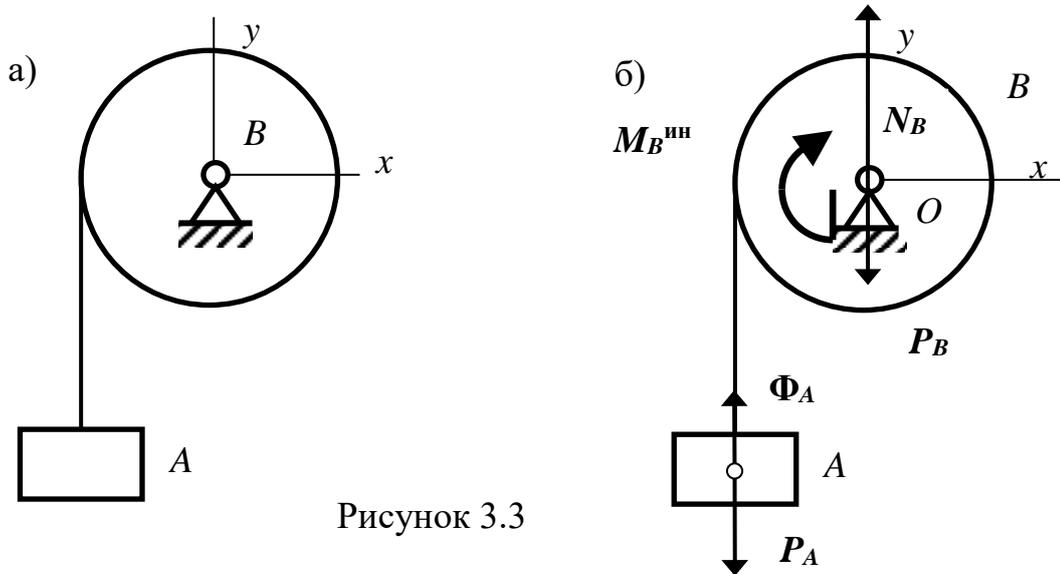


Рисунок 3.3

опорных реакций балок. Чтобы найти a_A , составим уравнение, которое не содержит N_B :

$$\begin{aligned} \Sigma M_O = 0; \quad (P_A - \Phi_A) R - M_B^{\text{ин}} &= 0; \\ (m_A g - m_A a_A) R - (m_B R / 2) a_A &= 0, \end{aligned}$$

откуда $a_A = (2/3) g$.

Реакцию N_B найдем из условия:

$$\Sigma Y = 0; \quad -P_A + \Phi_A + N_B - P_B = 0,$$

откуда

$$N_B = P_A - \Phi_A + P_B = mg - ma_A + mg = mg - (2/3)mg + mg = (4/3)mg.$$

Для проверки решения можно воспользоваться уравнением:

$$\Sigma M_A = -M_B^{\text{ин}} + N_B R - P_B R = -(mR/2)(2/3)g + (4/3)mgR - mgR = 0.$$

Ответ: $a_A = (2/3) g$, $N_B = (4/3)mg$.

Пример 3.3: В примере на рисунке 3.4а определить силу натяжения нитей T_{AB} и T_{BC} , принимая B и C за однородные цилиндры, и полагая угол $\alpha = 30^\circ$, а массы всех тел одинаковыми и равными m .

Решение. Будем считать найденное ранее ускорение тела A – a_A известным и для указанных данных равным:

$$a_A = (8/15)(1 - 0,5\sin\alpha)g = (8/15)(3/4)g = (2/5)g.$$

Тогда для определения T_{AB} и T_{BC} достаточно рассмотреть динамическое равновесие тела A и барабана B .

В первом случае прикладываем к поступательно движущемуся телу A активную силу P_A , силу натяжения нити T_{AB} и силу инерции Φ_A (рисунок 3.4, б).

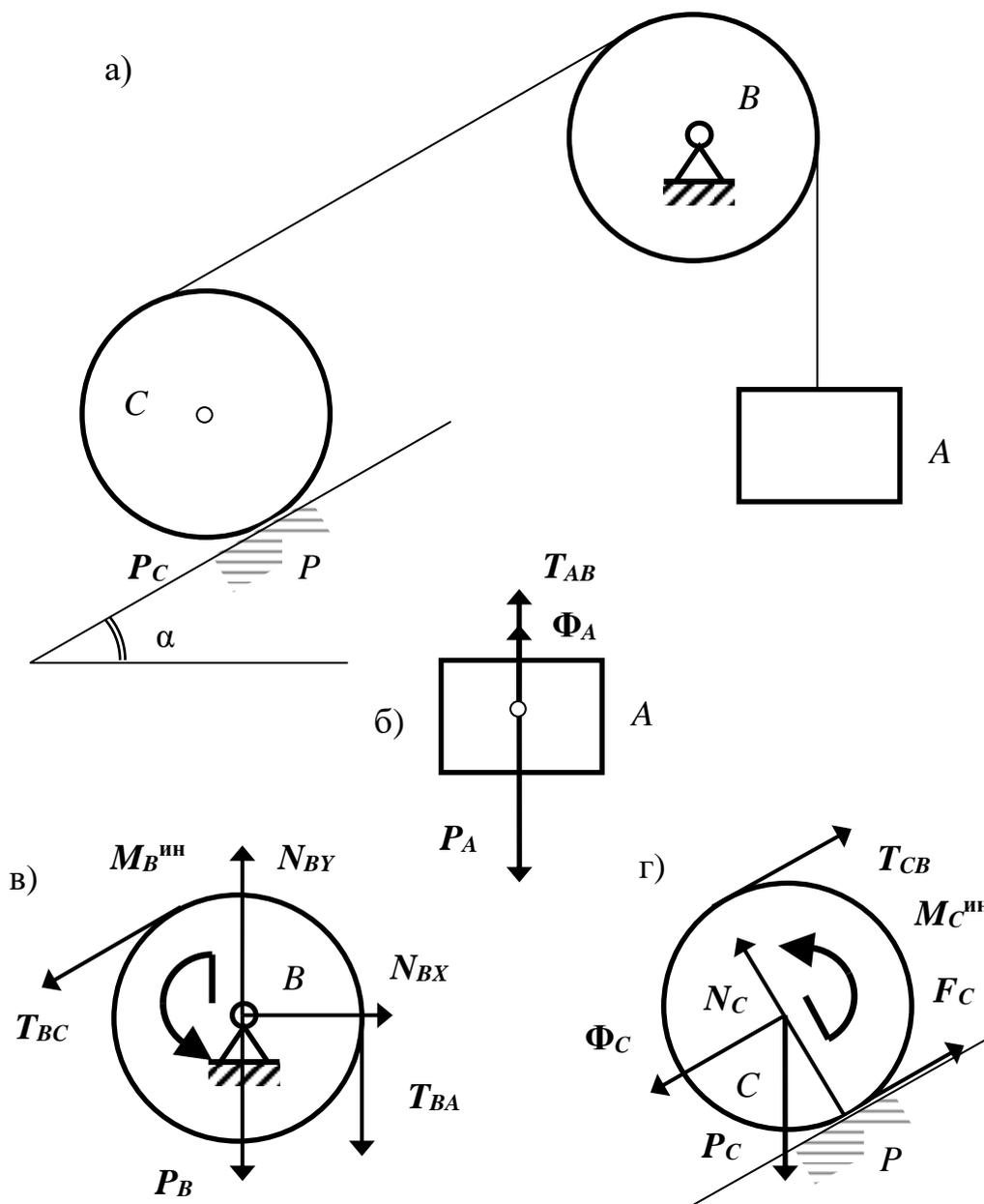


Рисунок 3.4

Проектируя векторное равенство:

$$P_A + T_{AB} + \Phi_A = 0$$

на направление вектора P_A , получим:

$$P_A - T_{AB} - \Phi_A = 0,$$

откуда:

$$T_{AB} = P_A - \Phi_A = m(g - a_A) = (3/5) mg.$$

Для нахождения T_{BC} рассмотрим динамическое равновесие барабана B , приложив к нему активную силу – вес P_B , реакции связей N_{BX} , N_{BY} , T_{BA} , T_{BC} и главный момент сил инерции $M_B^{\text{ин}}$ (рисунок 3.4, в).

Условие равенств нулю суммы моментов всех сил относительно оси его вращения – $\Sigma M_B = 0$ примет вид:

$$(T_{BC} - T_{BA})R + M_B^{\text{ин}} = 0,$$

откуда:

$$\begin{aligned} T_{BC} &= -M_B^{\text{ин}}/R + T_{BA} = -(mR^2/2)(a_A/R^2) + (3/5) mg = \\ &= -(m/2)(2/5) g + (3/5) mg = (2/5) mg. \end{aligned}$$

Проверим правильность найденного решения с помощью уравнения: $\Sigma M_{P^{(C)}} = 0$, где P – мгновенный центр скоростей диска C (рисунок 3.4, г), рассматривая его динамическое равновесие под действием силы веса P_C , реакций связей: N_C , F_C , T_{CB} , а также главного вектора Φ_C и главного момента $M_C^{\text{ин}}$ сил инерции:

$$\begin{aligned} (\Phi_C + P_C \sin \alpha)R + M_C^{\text{ин}} - T_{CB} 2R &= (m_C a_C + m_C g \sin 30^\circ) R + (m_C R^2/2)\varepsilon_C - T_{BC} 2R = \\ &= [m_C (a_A/2) + m_C g/2] R + (m_C R^2/2)(a_A/2R) - (4/5) mgR = \\ &= mR [(1/5) g + (1/2)g + (1/10)g - (4/5)g] = (mgR/20)(4 + 10 + 2 - 16) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } T_{AB} = T_{BA} = (3/5) mg, T_{BC} = T_{CB} = (2/5) mg.$$

Примечания:

1. Отметим, что в последнем примере было бы нерационально одновременно определять ускорение a_A и натяжение нитей T_{BA} и T_{BC} с помощью принципа Д Аламбера, поскольку, во-первых, пришлось бы решать систему трех уравнений с тремя неизвестными, а, во-вторых, мы не смогли бы эффективно проверить правильность найденного решения.

2. Рассматривая динамическое равновесие диска C , можно найти динамическую силу трения F_C .

Пример 3.4: Однородный стержень OA весом P и длиной l опускается без начальной скорости из положения неустойчивого равновесия ($\varphi = 0$). Найти реакции шарнира O при $\varphi = \pi/2$ (рисунок 3.5).

Решение. Рассмотрим динамическое равновесие стержня в тот момент времени, когда он занимает горизонтальное положение, прикладывая к нему активную силу веса P , составляющие реакции шарнира N_x , N_y и силы

инерции. Последние, поскольку стержень вращается вокруг оси, не являющейся центральной, приводятся к главному вектору и главному моменту – как в общем случае плоского движения тела:

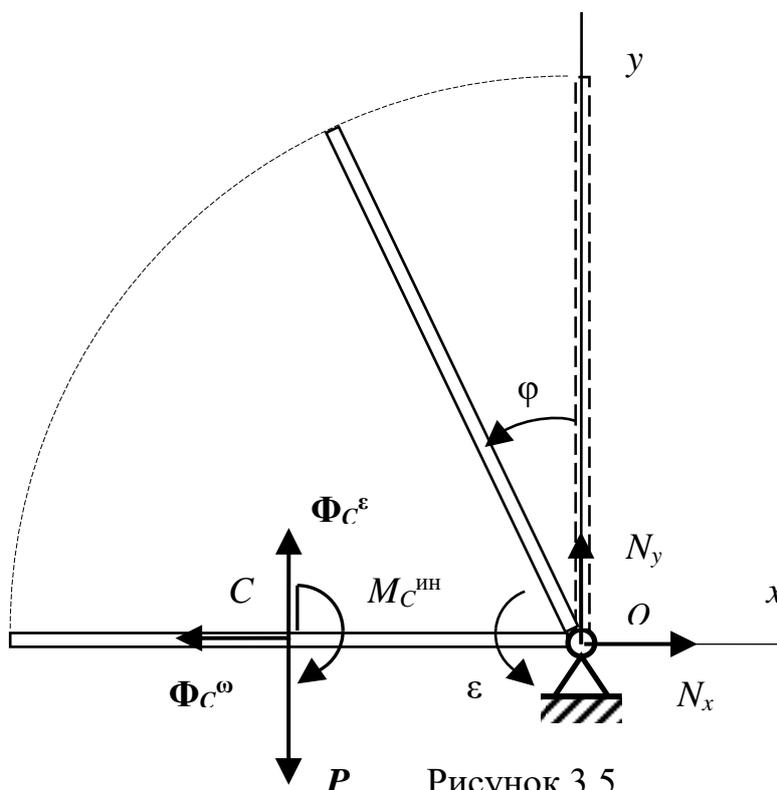
$$\Phi_C = mac;$$

$$M_C^{\text{ин}} = J_C \varepsilon = (ml^2/12)\varepsilon, \quad (\text{а})$$

где $m = (P/g)$ – масса стержня.

Центр масс стержня движется по окружности радиуса $l/2$, поэтому его ускорение имеет центростремительную и вращательную составляющие:

$$ac = ac^\omega + ac^\varepsilon,$$



которым соответствуют центробежная и вращательная силы инерции, равные по модулю:

$$\Phi_C^\omega = mac^\omega = (1/2)(m\omega^2 l); \quad (\text{б})$$

$$\Phi_C^\varepsilon = mac^\varepsilon = (1/2)(m\varepsilon l). \quad (\text{в})$$

Неизвестными в данной задаче будут: N_x , N_y , ε и ω , а поскольку число неизвестных превышает число уравнений принципа Д'Аламбера, найдем предварительно угловую скорость стержня с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы:

$$T_2 - T_1 = A_{12} \quad (\text{г})$$

где $T_2 = (1/2)J_O\omega^2 = (1/2)(ml^2/3)\omega^2$, $T_1 = 0$ – по условию задачи, а работа силы тяжести стержня $A_{12} = mg(l/2)$.

Подставляя в (г), получим:

$$(1/2)(ml^2/3)\omega^2 = mg(l/2),$$

откуда найдем искомую скорость стержня в горизонтальном положении:

$$\omega = \sqrt{3g/l}.$$

Чтобы найти угловое ускорение ε , составим уравнение $\Sigma M_O = 0$, которое не содержит N_x и N_y :

$$(P - \Phi_C^\varepsilon)(l/2) - M_C^{\text{ин}} = 0.$$

Подставляя сюда (а) и (в), получим:

$$[mg - m(\varepsilon l/2)](l/2) - (ml^2/12)\varepsilon = 0,$$

откуда

$$6g = \varepsilon l(3 + 1)$$

или

$$\varepsilon = (3g/2l).$$

Теперь, зная ω и ε , легко найти искомые реакции N_x и N_y , воспользовавшись уравнениями $\Sigma X_i = 0$ и $\Sigma Y_i = 0$:

$$N_x = \Phi_C^\omega = (1/2)(m\omega^2 l) = (3/2) mg = (3/2) P;$$

$$N_y = P - \Phi_C^\varepsilon = P - (1/2)(m\varepsilon l) = P - (1/2)(P/g)(3g/2) = P/4.$$

Ответ: $N_x = (3/2) P$; $N_y = P/4$.

3.3 Определение динамических реакций

Известно, что ось, вокруг которой вращается тело, должна быть центральной – с этой целью проводят балансировку колес, маховиков и других вращающихся деталей. Однако это условие является недостаточным, и если ось вращения является центральной, но не *главной*, появляются *динамические опорные реакции*, которые отсутствовали в состоянии покоя.

Рассмотрим это явление на следующем примере. Пусть стержень DE массой M и длиной l закреплен в

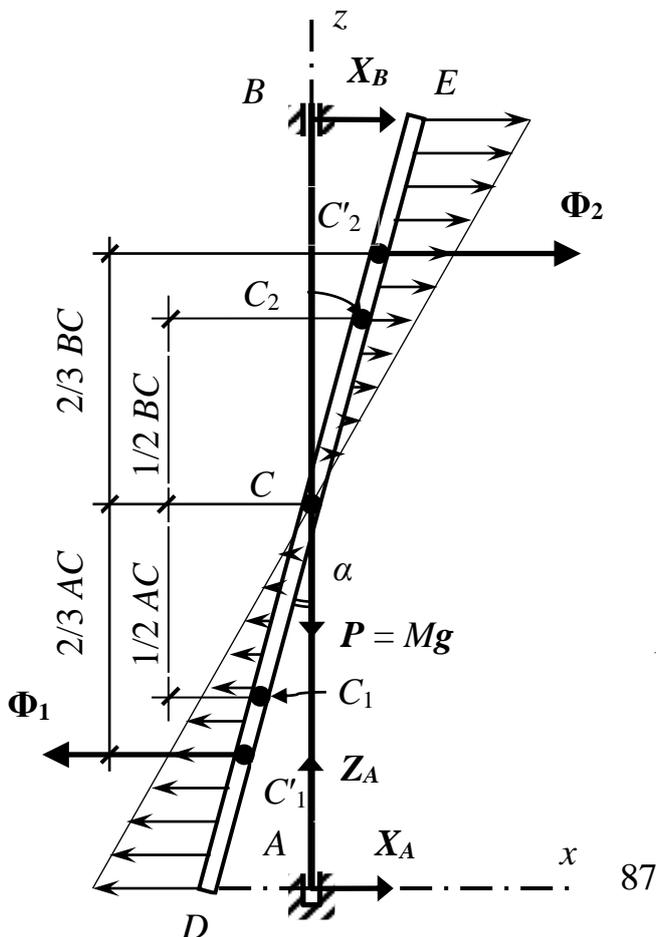


Рисунок 3.6

подшипниках A и B под углом α к вертикальной оси Oz и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω (рисунок 3.6).

Отметим, что в состоянии покоя горизонтальные опорные реакции в подшипниках A и B , расположенных на одной горизонтали с точками D и E , будут равны нулю, а реакция Z_A будет равна весу стержня $P = Mg$.

При вращении стержня на каждую его точку будет действовать центростремительное ускорение $a^\omega = \omega^2 R$, где R – расстояние точки от оси вращения, а в соответствии с принципом Д Аламбера – *центробежная сила инерции*.

Будем анализировать движение стержня в системе координат xAz , связанной со стержнем и расположенной с ним в одной плоскости.

Рассмотрим динамическое равновесие вращающегося стержня, приложив к нему активную силу $P = Mg$, реакции связей X_A , Z_A , X_B и центробежные силы инерции, изменяющиеся по линейному закону.

Выбирая центр масс C в качестве центра приведения сил инерции, получим, что в соответствии с формулой (9.6) главный вектор сил инерции равен нулю:

$$\Phi_C = -Ma_c = 0,$$

поскольку точка C остается неподвижной, а главный момент сил инерции $M_C^{\text{ин}}$ будет равен моменту пары сил (Φ_1, Φ_2) , где Φ_1 – равнодействующая сил инерции, приложенных к нижней, а Φ_2 – к верхней части стержня.

При этом по модулю силы Φ_1 и Φ_2 равны главным векторам сил инерции соответствующих частей стержня, которые по формуле (3.9) равны:

$$|\Phi_{C1}| = (M/2) a_{C1} = (M/2) \omega^2 |x_{C1}| = (M \omega^2 / 2)(l/4) \sin \alpha = (M \omega^2 l / 8) \sin \alpha,$$

$$|\Phi_{C2}| = (M/2) a_{C2} = (M \omega^2 l / 8) \sin \alpha,$$

и отличаются от главных векторов только точками приложения – равнодействующие Φ_1 и Φ_2 будут приложены в точках C'_1 и C'_2 соответственно. Эти точки расположены против центров тяжести треугольников, представляющих распределенную нагрузку.

Итак, силы инерции всего стержня приводятся к паре сил (Φ_1, Φ_2) с моментом:

$$M_C^{\text{ин}} = \Phi_1 (2/3) AB = (M \omega^2 l / 8) \sin \alpha (2/3) l \cos \alpha = (M \omega^2 l^2 / 12) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Теперь составив уравнение равновесия $\Sigma M_A = 0$, получим:

$$-X_B \cdot l \cos \alpha - M_C^{\text{ин}} = 0,$$

откуда найдем искомые динамические реакции:

$$X_B = -X_A = -M_C^{\text{ин}} / l \cos \alpha = -(M \omega^2 l^2 / 12) \sin \alpha.$$

$$\text{Ответ: } X_A = (M \omega^2 l^2 / 12) \sin \alpha, X_B = -(M \omega^2 l^2 / 12) \sin \alpha.$$

3.4 Принцип возможных перемещений

3.4.1 Возможные перемещения системы

Принцип возможных перемещений (ПВП) является основополагающим в механике. Он успешно используется при решении статических и динамических задач теоретической механики, сопротивления материалов, теории упругости и строительной механики.

Основной вклад в обоснование и внедрение в практику ПВП был внесен Ж. Лагранжем.

Определение. Возможными перемещениями точки называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в каждый момент времени наложенными на нее связями.

Под *возможными перемещениями системы* мы будем понимать множество возможных перемещений всех ее точек.

● Рассмотрим систему двух материальных точек A и B , помещенных на концах рычага, закрепленного в центре O , и удаленных от этого центра на расстояния l_A и l_B соответственно (рисунок 3.7).

Такая система имеет, очевидно, одну степень свободы, и ее положение однозначно определяется заданием угла поворота стержня φ .

Конечное перемещение точки A изображается вектором $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{AA}'$, проекции которого на оси координат равны *приращениям* координат точки A :

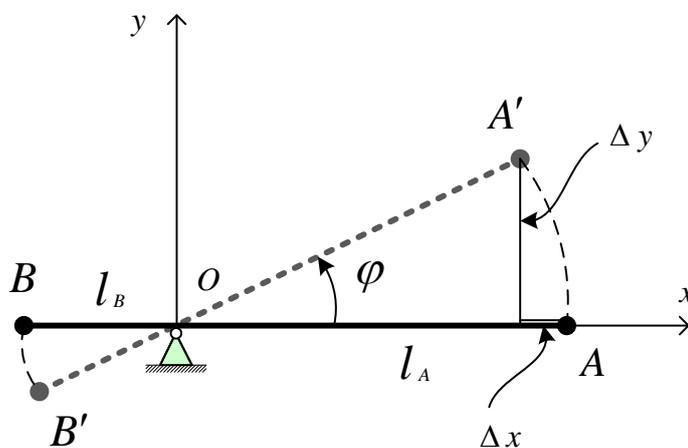


Рисунок 3.7

$$\Delta x = x_{A'} - x_A = -l_A(1 - \cos\varphi);$$

$$\Delta y = y_{A'} - y_A = l_A \sin\varphi.$$

Элементарное перемещение точки A определяется вектором $d\mathbf{r}$, проекции которого на оси координат равны *дифференциалам* координат точки A :

$$dx = [\partial(\Delta x)/\partial\varphi]_{\varphi=0} d\varphi = -l_A \sin\varphi|_{\varphi=0} d\varphi = 0;$$

$$dy = [\partial(\Delta y)/\partial\varphi]_{\varphi=0} d\varphi = l_A \cos\varphi|_{\varphi=0} d\varphi = l_A d\varphi.$$

Возможным перемещением точки A будет вектор $\delta\mathbf{r}(\delta x, \delta y)$, который отличается от вектора $d\mathbf{r}(dx, dy)$ только тем, что является не действительным, а воображаемым и его проекции на оси координат называются не дифференциалами, а вариациями координат.

$$\begin{aligned}\delta x &= [\partial(\Delta x)/\partial\varphi]_{\varphi=0} \delta\varphi = 0; \\ \delta y &= [\partial(\Delta y)/\partial\varphi]_{\varphi=0} \delta\varphi = l_A \delta\varphi.\end{aligned}$$

Переход от конечных к элементарным или возможным перемещениям точки A имеет наглядную геометрическую интерпретацию и в данном случае означает, что перемещение по дуге окружности радиуса l_A заменяется перемещением по касательной к этой окружности.

Отметим, что в рассматриваемом примере система подчинена геометрическим, стационарным и двусторонним связям.

Выясним, какие условия в общем случае налагают связи на возможные перемещения точек системы.

Теорема 1. В каждый момент времени возможные перемещения точки лежат в плоскости, касательной к поверхности связи.

В самом деле, возможное перемещение точки:

$$\delta\mathbf{r} = \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k},$$

где $\delta x, \delta y, \delta z$ – вариации ее координат, должно удовлетворять уравнению связи:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

то есть

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = 0.$$

Раскладывая последнее выражение в ряд, получим с точностью до бесконечно малых первого порядка:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = f(x, y, z, t) + (\partial f/\partial x)\delta x + (\partial f/\partial y)\delta y + (\partial f/\partial z)\delta z = 0,$$

откуда следует, что

$$(\partial f/\partial x)\delta x + (\partial f/\partial y)\delta y + (\partial f/\partial z)\delta z = (\text{grad } f \cdot \delta\mathbf{r}) = 0,$$

где вектор $\text{grad } f = (\partial f/\partial x)\mathbf{i} + (\partial f/\partial y)\mathbf{j} + (\partial f/\partial z)\mathbf{k}$ направлен по нормали к поверхности связи. Теорема доказана.

Теорема 2. Для стационарных связей элементарные действительные перемещения точки принадлежат к числу возможных: $d\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}$, для нестационарных связей $d\mathbf{r} \neq \delta\mathbf{r}$.

Действительно, траектория точки, подчиненной стационарной связи, принадлежит поверхности этой связи $f(x, y, z) = 0$, поэтому из множества возможных перемещений, лежащих в плоскости, касающейся поверхности связи всегда найдется $\delta\mathbf{r}$, которое совпадает с элементарным действительным перемещением $d\mathbf{r}$, направленным по касательной к траектории.

Точка, на которую наложена нестационарная связь $f(x, y, z, t) = 0$, участвует в сложном движении. В каждый момент времени $t = t_1$ она перемещается в

относительном движении по поверхности связи $f(x, y, z, t_1) = 0$ и одновременно в переносном движении перемещается вместе со связью $f(x, y, z, t) = 0$.

При этом абсолютная траектория точки в общем случае не принадлежит поверхности $f(x, y, z, t_1) = 0$, а значит $dr \neq \delta r$. Теорема доказана.

Элементарная работа сил, приложенных к точкам системы на ее возможных перемещениях равна $\delta A = \sum F_i \delta r_i$, и зависит от выбора δr_i .

Обозначим через N_i реакции связей, приложенных к точкам системы.

Определение. Связи, приложенные к точкам системы, называются *идеальными*, если для любого возможного перемещения системы выполняется соотношение:

$$\sum N_i \delta r_i = 0. \quad (3.18)$$

Примером системы, подчиненной идеальным связям, является цилиндр с намотанной на него нитью, который поднимается без проскальзывания по наклонной плоскости (рисунок 3.4г).

Реакциями такой связи, приложенными к телу, будут: N_1 – сила нормального давления поверхности, и N_2 – сила трения.

Поскольку эти силы приложены в точке контакта, являющейся мгновенным центром скоростей, то для них выполняется соотношение (3.18).

3.4 Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений (ПВП) эквивалентен уравнениям равновесия элементарной статики. Он формулируется следующим образом.

Для равновесия системы, подчиненной идеальным, стационарным и двухсторонним связям, необходимо и достаточно равенства нулю суммы работ всех активных сил на любых возможных перемещениях системы:

$$\sum F_i \delta r_i = 0. \quad (3.19)$$

Принцип можно применять также для систем с неидеальными и односторонними связями. При этом надо включить реакции таких связей в число активных сил и убедиться, что на возможных перемещениях системы они сохраняют свой знак.

Учитывая, что $v_i = dr_i / dt$, а для стационарных связей действительные перемещения принадлежат к числу возможных, уравнению (3.19) можно придать форму *принципа возможных скоростей*:

$$\sum (F_i v_i) = 0. \quad (3.20)$$

Он означает, что **для равновесия системы, подчиненной идеальным, стационарным и двухсторонним связям, необходимо и достаточно равенства нулю суммы мощностей всех активных сил на любых возможных перемещениях системы.**

С помощью этого принципа можно определять соотношение между силами и моментами, приложенными к подвижной механической системе – механизму, а также находить опорные реакции неподвижных систем.

Чтобы найти зависимость между силами и моментами, приложенными к подвижной механической системе, надо непосредственно применить соотношения (3.19) или (3.20), при этом в первом случае решение сводится к формальным математическим операциям, а во втором – опирается на положения кинематики твердого тела.

Для того чтобы определить опорные реакции неподвижной системы, предварительно надо воспользоваться принципом освобождения от связей.

Пример 3.5: В кулисном механизме при качании рычага OC вокруг шарнира O ползун A , перемещаясь вдоль OC , приводит в движение стержень AB , движущийся в направляющих K . Найти зависимость между Q и P , если $OC = R$, $OK = l$ (рисунок 3.8).

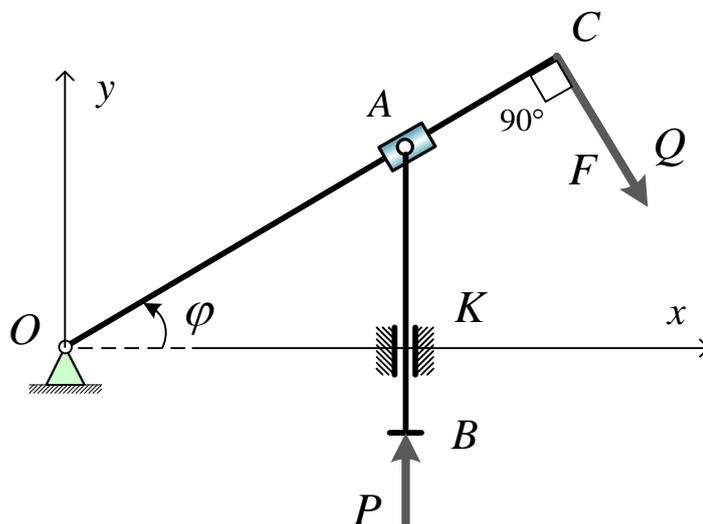


Рисунок 3.8

Решение. Для нашей системы соотношение (3.19) примет вид:

$$P \delta r_A + Q \delta r_C = 0,$$

или, в координатной форме:

$$P_x \delta x_A + P_y \delta y_A + Q_x \delta x_C + Q_y \delta y_C = 0, \quad (a)$$

где

$$P_x = 0, P_y = P, Q_x = Q \sin \varphi, Q_y = -Q \cos \varphi. \quad (b)$$

Учитывая, что $y_A = l \cdot \operatorname{tg} \varphi$, $x_C = R \cdot \cos \varphi$, а $y_C = R \cdot \sin \varphi$, с помощью обычных правил дифференцирования найдем вариации координат для этих точек системы:

$$\delta y_A = (\partial y_A / \partial \varphi) \delta \varphi = (l / \cos^2 \varphi) \delta \varphi; \delta x_C = -R \cdot \sin \varphi \delta \varphi; \delta y_C = R \cdot \cos \varphi \delta \varphi. \quad (b)$$

Подставляя (b) и (b) в (a), придем к соотношению:

$$[(Pl)/(\cos^2\varphi) - QR(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)] \delta\varphi = 0,$$

откуда получим искомую зависимость:

$$Q = (Pl)/(R \cos^2\varphi). \quad \bullet$$

Пример 3.6: Определить соотношение между силой F и моментом M , при котором механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии, если $OA = r$ (рисунок 3.9, а).

Решение: Воспользуемся для решения задачи соотношением (10.3). С этой целью сообщим звену OA возможную угловую скорость ω_0 . Поскольку данный механизм имеет одну степень свободы, точки A и B также получат возможные линейные скорости v_A и v_B (рисунок 3.9, б). При этом $v_A \perp OA$ и $v_A = \omega_0 \cdot r$, а скорость точки B , принадлежащей звену AB , $-v_B \perp CB$, и ее можно найти с помощью мгновенного центра скоростей или по теореме о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры, согласно которой $\text{пр}_{AB}v_A = \text{пр}_{AB}v_B$, откуда $v_B = v_A \cos 30^\circ = \omega_0 r(\sqrt{3}/2)$.

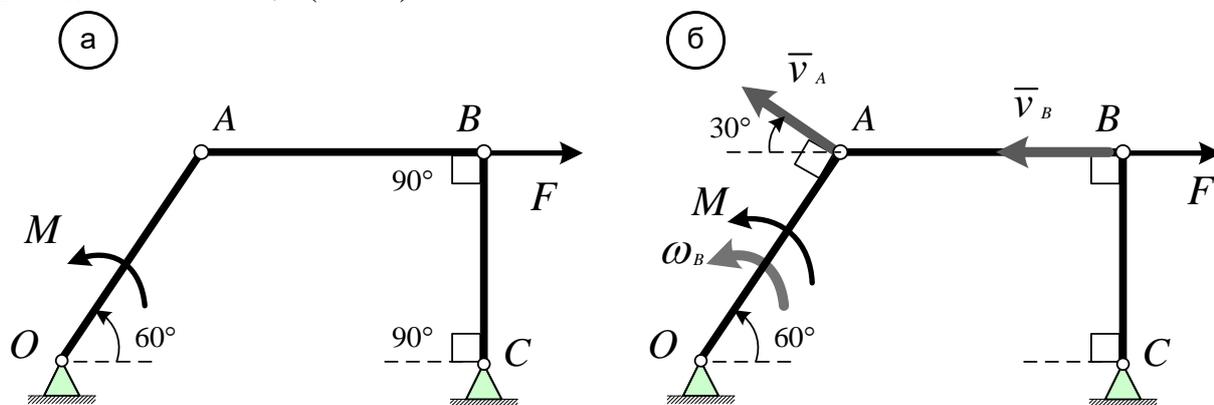


Рисунок 3.9

Для нашей задачи нагрузка представлена только парой с моментом M , приложенной к звену OA и силой F , приложенной в точке B , поэтому соотношение (10.3) примет вид:

$$M \omega_0 + (F \cdot v_B) = 0$$

или

$$M \omega_0 - F \omega_0 r (\sqrt{3}/2) = 0,$$

откуда $M = Fr (\sqrt{3}/2)$.

Ответ: $M = Fr (\sqrt{3}/2)$

3.5 Эквивалентность принципа возможных перемещений и условий равновесия механической системы

Как уже отмечалось, принцип возможных перемещений эквивалентен уравнениям равновесия элементарной статики. Докажем, что справедлива следующая

Теорема. *Необходимым и достаточным условием равновесия системы, подчиненной идеальным, стационарным и двухсторонним связям, является равенство нулю суммы работ всех активных сил на любых возможных перемещениях системы:*

$$\Sigma F_i \delta r_i = 0. \quad (3.21)$$

1) Доказательство необходимости. Пусть система материальных точек находится в состоянии равновесия. Тогда для каждой точки системы выполняется соотношение:

$$F_i + N_i = 0.$$

Умножив на δr_i и суммируя по всем точкам системы, получим:

$$\Sigma(F_i + N_i) \delta r_i = \Sigma F_i \delta r_i + \Sigma N_i \delta r_i = 0,$$

откуда, с учетом (3.18) и следует (3.21).

2) Доказательство достаточности. Пусть к системе, находившейся в состоянии покоя, приложили силы, удовлетворяющие (3.21). Покажем, что система останется в состоянии равновесия.

Предположим противное: пусть хотя бы одна j -ая точка системы вышла из состояния равновесия. Тогда $F_j + N_j = R_j \neq 0$, и под действием силы R_j точка M_j получит перемещение dr_j , которое в силу начальных условий будет коллинеарным R_j : $dr_j \uparrow \uparrow R_j$.

Поскольку связи стационарны, существует возможное перемещение δr_j , равное элементарному действительному перемещению dr_j , и с учетом (3.18) мы получим:

$$R_j dr_j = R_j \delta r_j = F_j \delta r_j + N_j \delta r_j = F_j \delta r_j > 0.$$

Но тогда

$$\Sigma F_i \delta r_i = F_j \delta r_j > 0,$$

что противоречит (3.21), поэтому наше предположение неверно и система будет оставаться в положении равновесия.

С помощью рассмотренной теоремы и соотношения (3.21) можно находить зависимости между силами, приложенными к точкам системы так же, как с помощью обычных уравнений равновесия.

С помощью этого принципа можно определять соотношение между силами и моментами, приложенными к подвижной механической системе – механизму, а также находить опорные реакции неподвижных систем.

Для того чтобы определить опорные реакции неподвижной системы, предварительно надо воспользоваться принципом освобожденности от связей.

Примечания:

1. Как следует из теоремы, с помощью ПВП, как и с использованием обычных уравнений равновесия, можно рассматривать только статически определимые системы.

2. Преимущество ПВП перед уравнениями элементарной статики становится особенно заметным при расчете сложных составных систем с большим числом неизвестных. При решении таких задач важно получить хорошую структуру системы алгебраических уравнений для определения опорных реакций.

Поясним, что это означает. В общем случае матрица системы таких уравнений является сплошь заполненной и имеет вид (а):

$$\begin{array}{ccc}
 \times & \times & \times \\
 \times & \times & \times \\
 \times & \times & \times
 \end{array}
 \quad (a)
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \times & 0 & 0 \\
 \times & \times & 0 \\
 \times & \times & \times
 \end{array}
 \quad (б)
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \times & 0 & 0 \\
 0 & \times & 0 \\
 0 & 0 & \times
 \end{array}
 \quad (в)
 \quad (3.22)$$

где знаком « \times » обозначены коэффициенты, отличные от нуля. Решение такой системы уравнений представляет наибольшие трудности.

Гораздо привлекательнее *матрица треугольного вида*, структура которой представлена на схеме (б). Она позволяет найти из первого уравнения первое неизвестное, затем, подставив его во второе уравнение, найти второе неизвестное и так далее.

Идеальной является представленная на схеме (в) *диагональная матрица*, при которой система распадается на отдельные уравнения, и неизвестные определяются независимо одно от другого.

Ниже будет показано, что ПВП в отличие от обычной статики всегда позволяет получить систему уравнений именно с такой диагональной матрицей. Таким образом, мы всегда сможем найти интересующую нас опорную реакцию независимо от других опорных реакций.

3.6 Применение ПВП для определения опорных реакций балок и рам

Рассмотрим процедуру определения опорных реакций *многопролетной шарнирно-консольной балки*, которая с точки зрения статики представляет собой пример составной или сочлененной статически определимой системы.

Будем придерживаться следующего *плана решения задачи*:

- 1) в соответствии с принципом освобождаемости от связей отбрасываем связь, которая соответствует искомому усилию, и заменяем ее реакцией R_i ;
- 2) сообщаем точке приложения R_i в полученной *системе с одной степенью свободы* возможное перемещение δs_i ;
- 3) записываем условие равенства нулю суммы работ всех активных сил, добавляя к этим силам неизвестную реакцию R_i :

$$\Sigma F_i \delta r_i = 0; \quad (3.21')$$

4) выражаем возможные перемещения всех точек системы через вариацию одной обобщенной координаты;

5) определяем искомую реакцию R_i ;

6) проверяем, по возможности, правильность решения задачи.

Примечания:

1 В общем случае под R_i надо понимать *обобщенную силу*, а под δs_i – *обобщенное перемещение*, которые представляют собой обычную силу и линейное перемещение для *линейных* и, соответственно, момент и угловое перемещение – для *моментных связей*.

2 Чтобы правильно построить ломаную форму – *моду* балки, соответствующую возможному перемещению точки i , в которой приложена реакция R_i , нужно:

- проанализировать заданную составную балку и уточнить, из каких элементарных балок она образована;
- выяснить, какая точка рассматриваемой элементарной балки останется неподвижной, когда точка i вследствие заданного возможного смещения займет в пространстве положение i' , либо какой параметр этой балки останется неизменным в силу краевых условий;
- провести прямую линию через точку i' и найденную неподвижную точку либо прямую, соответствующую заданным краевым условиям, и определить какое положение в пространстве займут граничные точки элементарной балки;
- выполнить такую же процедуру для смежных балок.

Пример 3.7: Определить реакцию опоры B составной балки (рисунок 3.10, а).

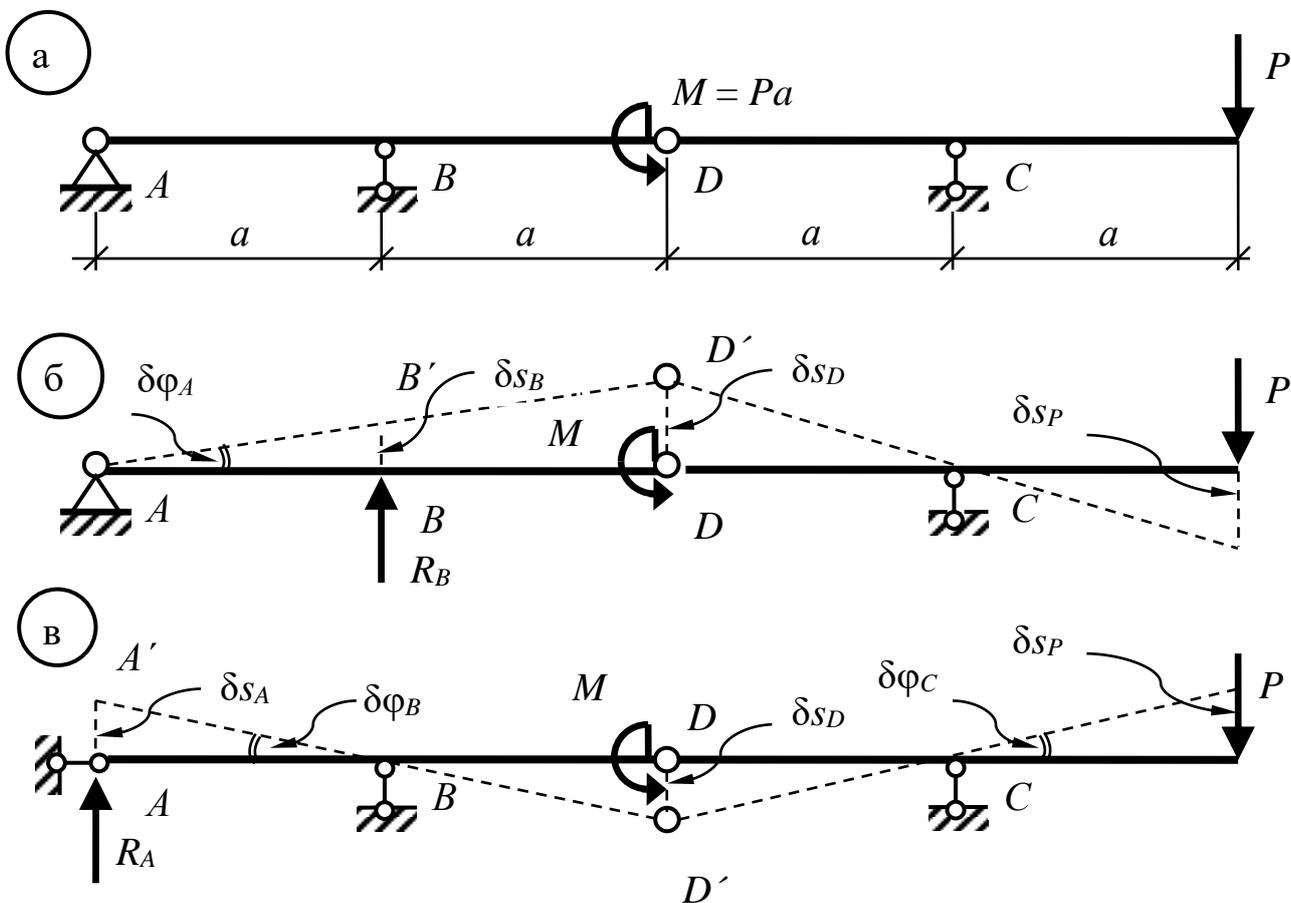


Рисунок 3.10

Решение: Рассматриваемая составная балка образована из двух элементарных балок, соединенных шарниром D . В соответствии с приведенным выше планом отбрасываем опору B , заменяя ее неизвестной реакцией R_B .

Сообщаем точке B возможное перемещение $\delta s_B = BB'$, в результате чего все незакрепленные точки балки получают возможные перемещения.

Для построения моды балки проводим прямую линию через точку B' и неподвижную точку A левой элементарной балки – AD и определяем таким образом положение ее граничной точки D' . После этого переходим к рассмотрению правой элементарной балки и определяем положение ее крайней правой точки, проводя прямую через точку D' и неподвижную точку C (рисунок 3.10, б).

Уравнение (3.21) для нашей задачи примет вид:

$$R_B \delta s_B + M \delta \varphi_A + P \delta s_P = 0.$$

Выражая возможные перемещения δs_B и δs_P через $\delta \varphi_A$, получим:

$$R_B a \delta \varphi_A + M \delta \varphi_A + P \cdot 2a \delta \varphi_A = 0,$$

откуда, поделив на $\delta \varphi_A \neq 0$, найдем искомую реакцию:

$$R_B = -(M/a + 2P) = -3P.$$

Отметим, что в этом примере не удастся проверить правильность найденного результата, если дополнительно не определить реакцию R_A . Поэтому определим также и эту реакцию.

Неподвижная опора A эквивалентна двум линейным связям. Горизонтальной связи соответствует составляющая X_A , вертикальной – Y_A .

Рассматриваемая составная балка загружена системой параллельных сил, поэтому реакция этой опоры направлена вертикально: $X_A = 0$, $Y_A = R_A$.

В соответствии с приведенным выше планом отбрасываем вертикальную связь в точке A , заменяя ее неизвестной реакцией R_A .

Сообщаем точке A возможное перемещение $\delta s_A = AA'$, в результате чего все незакрепленные точки балки получают возможные перемещения.

Для построения моды балки проводим прямую линию через точку A' и неподвижную точку B элементарной балки ABD и определяем таким образом положение ее граничной точки D' . После этого переходим к рассмотрению правой элементарной балки и определяем положение точки приложения силы P , проводя прямую через точку D' и неподвижную точку C (рисунок 3.10, в).

Уравнение (3.21) для нашей задачи примет вид:

$$R_A \delta s_A - M \delta \varphi_B - P \delta s_P = 0.$$

Выражая возможные перемещения δs_A и δs_P через $\delta \varphi_B$, получим:

$$R_A a \delta \varphi_B - M \delta \varphi_B - P a \delta \varphi_B = 0,$$

откуда, поделив на $\delta \varphi_B \neq 0$, найдем искомую реакцию:

$$R_A = (M/a + P) = 2P.$$

Чтобы убедиться в правильности найденного решения, составим уравнение $\sum M_D^{(лев)} = 0 = -R_A \cdot 2a - R_B \cdot a + M = -2P \cdot 2a - (-3P) \cdot a + M = -4Pa + 3Pa + Pa = 0$.

Ответ: $R_A = 2P, R_B = -3P$.

Пример 3.8: Определить реакции в жесткой заделке A указанной балки (рисунок 3.11, а).

Решение: Жесткая заделка A эквивалентна трем простым связям: двум линейным и одной моментной, реакции которых равны X_A, Y_A и M_A соответственно.

Чтобы найти M_A отбросим моментную связь и заменим ее неизвестным моментом – при этом две оставшиеся линейные связи будут эквивалентны неподвижной опоре, – затем сообщим балке AD возможное перемещение, повернув ее на угол $\delta\varphi_A$, и построим моду составной балки в целом (рисунок 3.11, б).

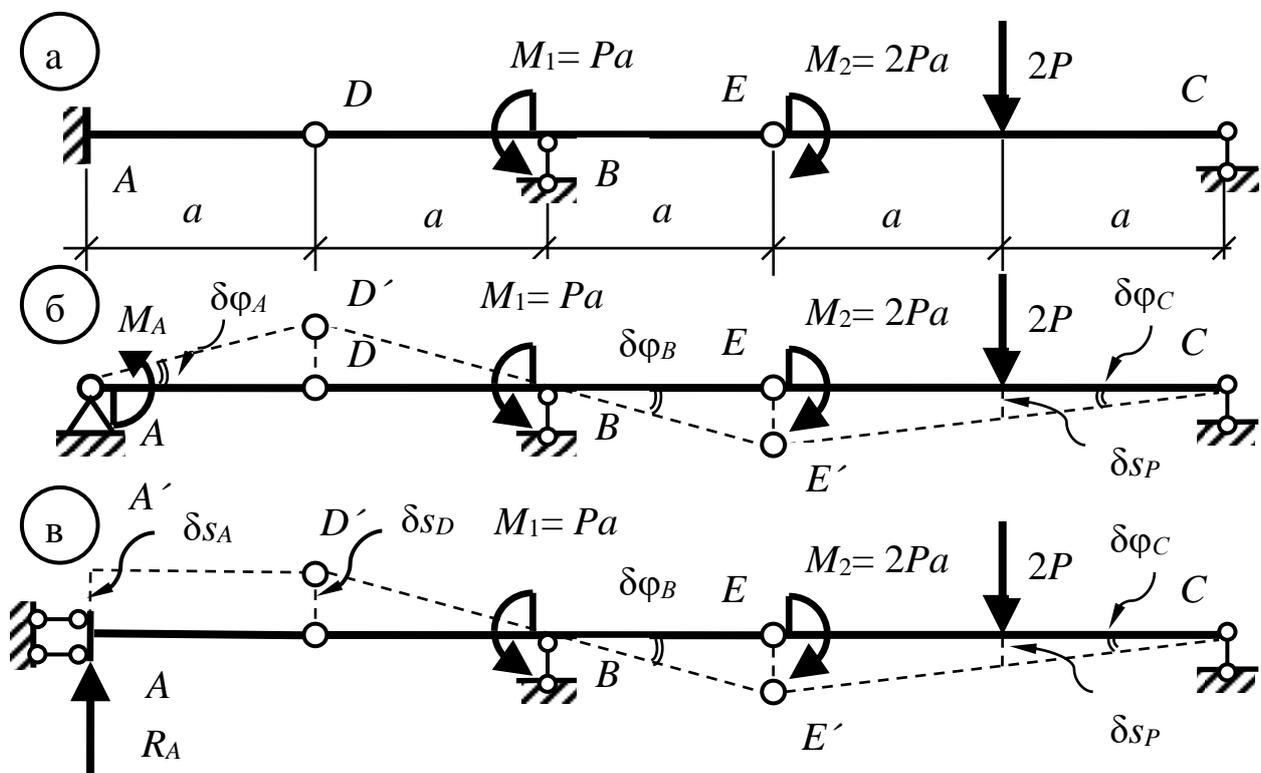


Рисунок 3.11

Уравнение (3.21) для нашей задачи примет вид:

$$M_A \delta\varphi_A - M_1 \delta\varphi_B - M_2 \delta\varphi_C + 2P \delta s_P = 0, \quad (a)$$

при этом работа момента M_2 , приложенного к балке EC , отрицательна, поскольку направление этого момента – по часовой стрелке – не совпадает с направлением поворота балки – против хода часовой стрелки.

Выразим вариации обобщенных координат, входящие в (а), через одну из них, например – $\delta\varphi_A$.

Из равенства треугольников ADD' и BDD' следует, что $\delta\varphi_B = \delta\varphi_A$, а поскольку $\delta s_E = EE' = a\delta\varphi_B = 2a\delta\varphi_C$, то $\delta\varphi_C = (1/2)\delta\varphi_B = (1/2)\delta\varphi_A$, и $\delta s_P = (1/2)\delta s_E = (1/2)a\delta\varphi_B$. Подставляя в (а), получим:

$$M_A \delta\varphi_A - M_1 \delta\varphi_A - M_2(1/2)\delta\varphi_A + 2P(1/2)a\delta\varphi_A = 0,$$

откуда

$$M_A = M_1 + (1/2)M_2 - Pa = Pa + (1/2)2Pa - Pa = Pa.$$

Как и в предыдущем балка загружена системой параллельных сил, поэтому $X_A = 0$, $Y_A = R_A$ и чтобы найти R_A , нужно отбросить вертикальную линейную связь в точке A , заменив ее неизвестной реакцией R_A . При этом моментная связь сохраняется, что фактически означает введение скользящей заделки вместо жесткой.

Сообщим точке A возможное перемещение $\delta s_A = AA'$, при этом с учетом заданных краевых условий вся балка AD переместится вверх, оставаясь горизонтальной (рисунок 3.11, в).

Уравнение (3.21) для определения R_A примет вид:

$$R_A \delta s_A - M_1 \delta\varphi_B - M_2 \delta\varphi_C + 2P\delta s_P = 0. \quad (б)$$

Выражая вариации обобщенных координат, входящие в (б), через одну из них, например – δs_A :

$$\delta\varphi_B = \delta s_D/a = \delta s_A/a; \delta\varphi_C = (1/2)\delta\varphi_B = \delta s_A/2a; \delta s_P = (1/2)\delta s_E = (1/2)\delta s_A,$$

получим:

$$[R_A - (Pa)/a - (2Pa)/(2a) + (2P)/2] \delta s_A = 0,$$

откуда $R_A = P + P - P = P$.

Чтобы убедиться в правильности полученного решения, составим уравнение $\sum M_D^{(лев)} = 0$:

$$-R_A \cdot a + M_A = -Pa + Pa = 0.$$

Ответ: $R_A = P$, $M_A = Pa$.

В тех случаях, когда нужно определить не одну, а реакции всех опор балки – как в СПР, которую выполняют студенты второго курса ОТФ, план решения задачи можно изменить.

При этом надо учесть, что процедура построения системы уравнений с треугольной матрицей (3.11, б) может оказаться проще, чем для системы с диагональной матрицей (3.11, в).

При определении опорных реакций рам удобнее пользоваться этим методом в форме принципа возможных скоростей (3.20).

Будем придерживаться следующего плана решения задачи:

- 1) в соответствии с принципом освобождения от связей отбрасываем связь, которая соответствует искомому усилию, и заменяем ее реакцией R_i ;
- 2) сообщаем точке приложения R_i в полученной системе с одной степенью свободы возможную скорость v_i ;
- 3) записываем условие равенства нулю мощностей всех активных сил, добавляя к ним неизвестную реакцию R_i :

$$\Sigma(F_i v_i) = 0; \quad (3.20')$$

- 4) выражаем скорости всех точек системы через скорость какой-либо одной точки;
- 5) определяем искомую реакцию R_i ;
- 6) проверяем, если это возможно, правильность решения задачи.

Пример 3.8: Определить горизонтальную составляющую реакции опоры B трехшарнирной рамы (рисунок 3.12, а).

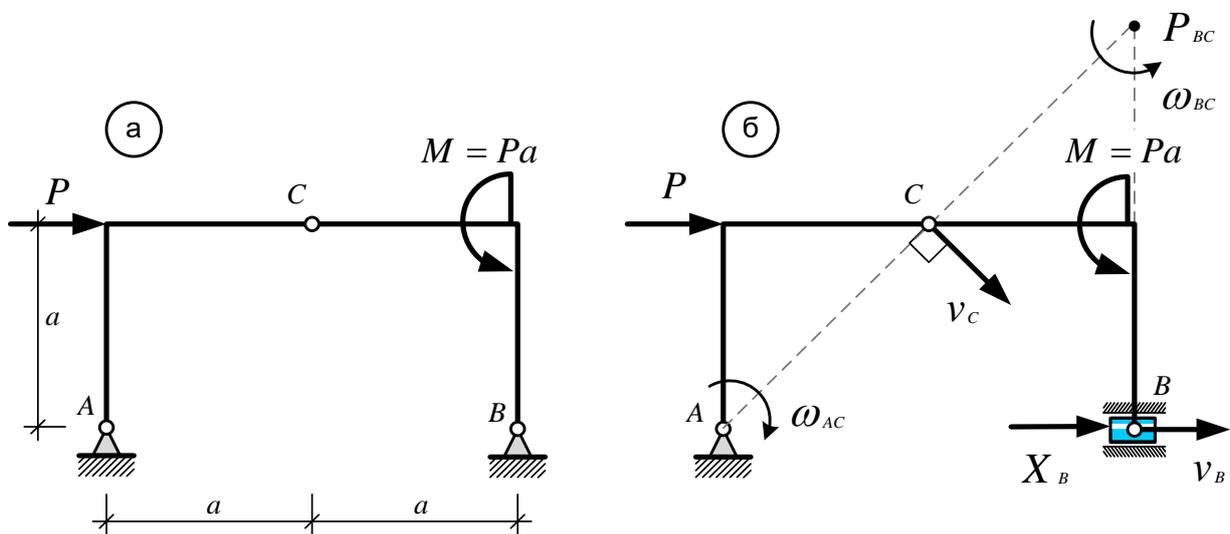


Рисунок 3.12

Решение: Отбрасывая горизонтальную связь в шарнире B , получим ползун, к которому приложена неизвестная реакция X_B (рисунок 3.12, б).

Сообщим ему возможную скорость v_B . При этом все точки полученного механизма с одной степенью свободы также получают возможные скорости, а его звенья AC и BC – угловые скорости ω_{AC} и ω_{BC} соответственно.

Учитывая, что точка A является мгновенным центром скоростей звена AC , определим направление скорости точки C , что позволит построить мгновенный центр скоростей звена BC – точку P_{BC} .

Поскольку $v_C = \omega_{AC} AC = \omega_{BC} CP_{BC}$, и $AC = CP_{BC} = a\sqrt{2}$, то $\omega_{AC} = \omega_{BC}$, а так как скорость точки приложения силы – $v_P \uparrow P$, то уравнение (5.6) для нашей задачи примет вид:

$$Pv_P + M\omega_{BC} + X_B v_B = 0.$$

Учитывая, что $v_P = \omega_{AC} a = \omega_{BC} a$, а $v_B = \omega_{BC} 2a$, получим:

$$(Pa + Pa + X_B 2a) \omega_{BC} = 0,$$

откуда $X_B = -P$.

Чтобы убедиться в правильности решения задачи нужно дополнительно определить X_A или Y_B , а затем воспользоваться уравнениями $\sum X_i = 0$ или $\sum M_C^{(\text{прав})} = 0$ соответственно.

Ответ: $X_B = -P$.

3.7 Вопросы для самоподготовки

- 1 Какое поле называется потенциальным?
- 2 Дайте определение понятию потенциальная энергия системы
- 3 Приведите примеры потенциальных силовых полей
- 4 Принцип Д Аламбера для точки
- 5 Принцип Д Аламбера для механической системы
- 6 Обоснуйте закон сохранения механической энергии
- 7 Принципы приведения сил инерции твердого тела
- 8 Особенности динамики относительного движения точки
- 9 Какие силы инерции действуют на механическую систему при движении
- 10 Дайте определение понятию относительная сила инерции
- 11 Дайте определение понятию переносная сила инерции
- 12 Дайте определение понятию кориолисова сила инерции
- 13 Как определяется относительная сила инерции
- 14 Как определяется переносная сила инерции
- 15 Как определяется кориолисова сила инерции
- 16 В чем заключается приведение сил инерции твердого тела
- 17 Что такое динамические реакции? В каких случаях они возникают?
- 18 В чем заключается принцип возможных перемещений?
- 19 Что понимается под термином возможные перемещения системы
- 20 Необходимое и достаточное условие равновесия системы
- 21 Виды равновесия механических систем

МОДУЛЬ 4 ПРИНЦИП Д АЛАМБЕРА – ЛАГРАНЖА

4.1 Обобщенные координаты системы

Напомним, что свободная материальная точка в трехмерном пространстве имеет три степени свободы и ее положение можно однозначно определить заданием трех декартовых координат.

Система n таких точек имеет $3n$ степеней свободы и ее положение в пространстве определяется заданием $3n$ декартовых координат.

Если на эту систему наложить связи, то, как уже отмечалось ранее в главе 1.2, число степеней свободы системы уменьшится и для определения ее положения в пространстве удобнее применять не декартовы, а *обобщенные координаты*.

Определение. *Независимые параметры, однозначно определяющие положение системы в пространстве, называются обобщенными координатами этой системы.*

Рассмотрим для примера систему двух свободных материальных точек A и B , расположенных в плоскости xOy , которая, очевидно, имеет 4 степени свободы и положение которой можно определить заданием четырех координат (x_A, y_A, x_B, y_B) .

Те же точки, помещенные на концах рычага, закрепленного в центре O , и удаленных от этого центра на расстояния l_A и l_B соответственно образуют систему, которая имеет, очевидно, одну степень свободы, и ее положение однозначно определяется заданием угла поворота стержня φ (рисунок 4.1).

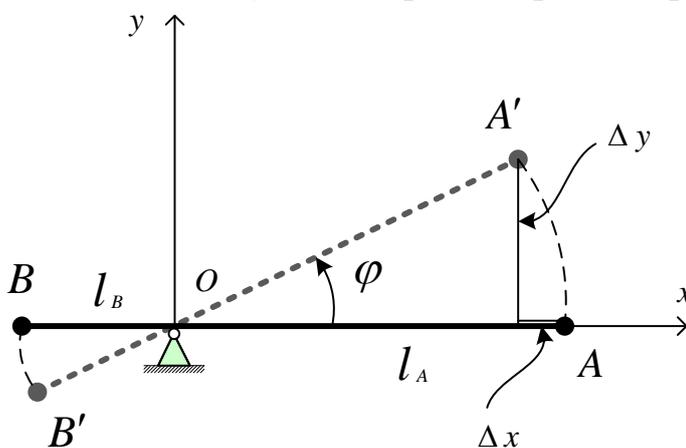


Рисунок 4.1

Связи, наложенные на систему, описывается тремя уравнениями:

$$\begin{aligned}x_A^2 + y_A^2 &= l_A^2; \\x_B^2 + y_B^2 &= l_B^2; \\(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 &= (l_A + l_B)^2.\end{aligned}$$

Число обобщенных координат равно числу степеней свободы первоначальной системы минус число наложенных связей. В нашем примере:

$$s = 4 - 3 = 1.$$

В качестве обобщенной координаты нашей системы можно выбрать x_A , y_A , x_B , y_B , но, конечно, удобнее всего взять угол поворота рычага φ , через который легко выражаются координаты точек системы:

$$x_A = l_A \cos\varphi; \quad y_A = l_A \sin\varphi; \quad x_B = -l_B \cos\varphi; \quad y_B = -l_B \sin\varphi.$$

В дальнейшем обобщенные координаты системы с s степенями свободы будем обозначать через q_j , где $j = 1, 2, \dots, s$.

При этом декартовы координаты системы n материальных точек в общем случае будут функциями обобщенных координат и времени t :

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t); \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t); \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t); \end{aligned}$$

или, кратко:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t); \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

4.2 Обобщенные силы и скорости

Пусть система n материальных точек M_i загружена силами \mathbf{P}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и имеет s степеней свободы, которым соответствуют обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_s .

Сообщим координате q_j возможное перемещение δq_j , тогда в силу (4.1) все точки системы получат перемещения

$$\delta \mathbf{r}_i = (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) \delta q_j; \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Работа сил \mathbf{P}_i на возможных перемещениях точек системы, соответствующих вариации δq_j , будет равна:

$$\delta A_{qj} = \sum_i \mathbf{P}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{P}_i (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) \delta q_j = Q_j \delta q_j,$$

где

$$Q_j = \partial A_{qj} / \partial q_j = \sum_i \mathbf{P}_i (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) \quad (4.2)$$

– обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j . Последнее соотношение можно представить в виде:

$$Q_j = \sum_i [X_i (\partial x_i / \partial q_j) + Y_i (\partial y_i / \partial q_j) + Z_i (\partial z_i / \partial q_j)].$$

Если система находится в потенциальном поле сил, то:

$$X_i = - (\partial \Pi / \partial x_i), Y_i = - (\partial \Pi / \partial y_i), Z_i = - (\partial \Pi / \partial z_i),$$

откуда

$$Q_j = - \sum_i [(\partial \Pi / \partial x_i) (\partial x_i / \partial q_j) + (\partial \Pi / \partial y_i) (\partial y_i / \partial q_j) + (\partial \Pi / \partial z_i) (\partial z_i / \partial q_j)]$$

или

$$Q_j = - \partial \Pi / \partial q_j, (j = 1, 2, \dots, s). \quad (4.3)$$

Скорость i – той точки системы как производная от ее радиус-вектора с учетом зависимости (4.1) будет равна:

$$\mathbf{v}_i = (d\mathbf{r}_i / dt) = \sum_{j=1}^s [(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) \dot{q}_j + (\partial \mathbf{r}_i / \partial t)], \quad (4.4)$$

где \dot{q}_j – обобщенная скорость. При этом из (4.4) следует, что:

$$(\partial \mathbf{v}_i / \partial \dot{q}_j) = (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j). \quad (4.5)$$

Покажем, что справедливо еще одно соотношение:

$$(\partial \mathbf{v}_i / \partial q_j) = (d/dt) (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j). \quad (4.6)$$

В самом деле, из выражения (4.4) учитывая, что в нем индекс суммирования является свободным и может быть заменен индексом k , получим:

$$(\partial \mathbf{v}_i / \partial q_j) = (\partial / \partial q_j) \sum_{k=1}^s [(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_k) \dot{q}_k + (\partial \mathbf{r}_i / \partial t)] = \sum_{k=1}^s [(\partial^2 \mathbf{r}_i / \partial q_k \partial q_j) \dot{q}_k + (\partial^2 \mathbf{r}_i / \partial t \partial q_j)].$$

Но, с другой стороны:

$$(d/dt) (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = \sum_{k=1}^s [(\partial^2 \mathbf{r}_i / \partial q_j \partial q_k) \dot{q}_k + (\partial^2 \mathbf{r}_i / \partial q_j \partial t)],$$

откуда и следует (4.6).

4.3 Структура уравнений Лагранжа

Кинетическая энергия системы:

$$T = \sum_i (m_i v_i^2 / 2) = (1/2) \sum_i (m_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) \quad (4.7)$$

с учетом зависимости (4.4) является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени t :

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t).$$

Частные производные от нее по обобщенным координатам и обобщенным скоростям с учетом (4.7) и (4.5) будут равны:

$$\begin{aligned} (\partial T / \partial q_j) &= \sum_i m_i \mathbf{v}_i (\partial \mathbf{v}_i / \partial q_j); \\ (\partial T / \partial \dot{q}_j) &= \sum_i m_i \mathbf{v}_i (\partial \mathbf{v}_i / \partial \dot{q}_j) = \sum_i m_i \mathbf{v}_i (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Найдем полную производную по времени от последнего выражения:

$$(d/dt)(\partial T / \partial \dot{q}_j) = \sum_i m_i (d\mathbf{v}_i / dt)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) + \sum_i m_i \mathbf{v}_i (d/dt)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j). \quad (4.9)$$

Преобразуем первую сумму в правой части (4.9) с учетом основного уравнения динамики и выражения (4.2):

$$\sum_i m_i (d\mathbf{v}_i / dt)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = \sum_i m_i \mathbf{a}_i (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = \sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = Q_j^F + Q_j^N = Q_j,$$

где Q_j – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j . При этом для идеальных связей

$$Q_j^N = \sum_i (\mathbf{N}_i)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = [\sum_i (\mathbf{N}_i)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) \delta q_j] / \delta q_j = (\sum_i \mathbf{N}_i \delta \mathbf{r}_i) / \delta q_j = 0$$

в силу соотношения (3.18):

$$\sum \mathbf{N}_i \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.18')$$

Вторая сумма в правой части (4.9) с учетом (4.6) и (4.8) будет равна:

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i (d/dt)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = \sum_i m_i \mathbf{v}_i (\partial \mathbf{v}_i / \partial q_j) = (\partial T / \partial q_j).$$

Подставляя в (4.9), получим искомые уравнения Лагранжа II рода:

$$(d/dt)(\partial T / \partial \dot{q}_j) - (\partial T / \partial q_j) = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (4.10)$$

Это дифференциальные уравнения второго порядка относительно переменных q_1, q_2, \dots, q_s .

Интегрируя (4.10) с учетом начальных условий: $q_j(0) = q_j^0$, $\dot{q}_j(0) = \dot{q}_j^0$, получим уравнения движения системы в обобщенных координатах:

$$q_j = q_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Покажем, что кинетическая энергия системы является квадратичной функцией обобщенных скоростей.

Подставляя формулу скорости k -ой точки (4.4):

$$\mathbf{v}_k = (d\mathbf{r}_k/dt) = \sum_{j=1}^s [(\partial\mathbf{r}_k/\partial q_j)\dot{q}_j + (\partial\mathbf{r}_k/\partial t)], \quad (4.4')$$

в выражение кинетической системы:

$$T = (1/2) \sum_k (m_k \mathbf{v}_k)^2$$

получим:

$$T = (1/2) \sum_{k=1}^n m_k \left[\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i) (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_j) \dot{q}_i \dot{q}_j + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^s (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i) (\partial\mathbf{r}_k/\partial t) \dot{q}_i + (\partial\mathbf{r}_k/\partial t)^2 \right] = T_2 + T_1 + T_0,$$

где

$$T_2 = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

– квадратичная функция обобщенных скоростей с коэффициентами:

$$A_{ij} = A_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = \sum_{k=1}^n m_k (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i) (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_j);$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^s B_i \dot{q}_i$$

– линейная функция обобщенных скоростей с коэффициентами:

$$B_i = B_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = \sum_{k=1}^n m_k (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i) (\partial\mathbf{r}_k/\partial t);$$

$$T_0 = T_0(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = (1/2) \sum_{k=1}^n m_k (\partial\mathbf{r}_k/\partial t)^2$$

– функция нулевой степени относительно обобщенных скоростей.

Для стационарных связей $\partial\mathbf{r}_k/\partial t = 0$, поэтому коэффициенты B_i и T_0 равны нулю, а кинетическая энергия системы будет *однородной квадратичной функцией* обобщенных скоростей или *квадратичной формой*:

$$T_2 = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

при этом коэффициенты $A_{ij} = A_{ji}$ зависят только от обобщенных координат, но не от времени.

Поэтому нетрудно доказать, что уравнения Лагранжа являются дифференциальными уравнениями второго порядка.

В самом деле, кинетическую энергию системы в общем случае можно представить в виде:

$$T = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^s B_i \dot{q}_i + T_0,$$

поэтому

$$\partial T / \partial \dot{q}_i = \sum_{j=1}^s A_{ij} \dot{q}_j + B_i$$

– будет линейной функцией обобщенных скоростей, а

$$(d/dt)(\partial T / \partial \dot{q}_i) = \sum_{j=1}^s (A_{ij} \ddot{q}_j + \dot{A}_{ij} \dot{q}_j) + \dot{B}_i$$

– дифференциальным оператором второго порядка.

Пример 4.1: Определить ускорение груза A , принимая барабан B за однородный цилиндр и полагая $m_A = m_B$ (рисунок 4.2, а).

Решение: Рассматриваемая система имеет одну степень свободы и в качестве обобщенной координаты удобно выбрать угол поворота барабана B или величину линейного смещения груза A как это сделано в нашем примере (рисунок 4.2, б).

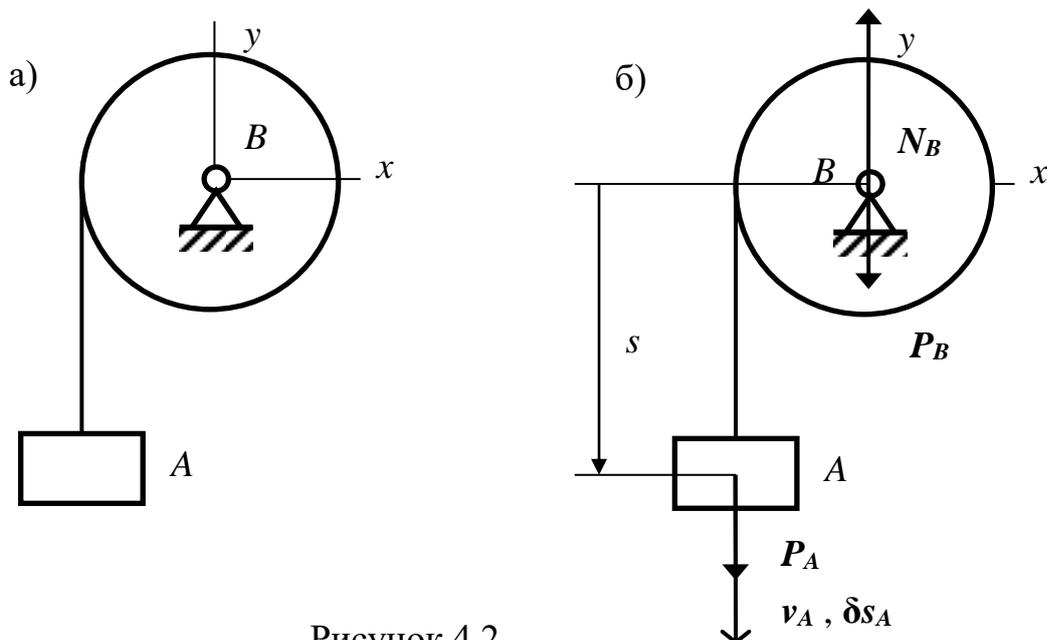


Рисунок 4.2

Для $q_1 = s$ уравнение (4.10) примет вид:

$$(d/dt)(\partial T/\partial \dot{s}) - (\partial T/\partial s) = Q_s, \quad (a)$$

где

$$T = T^A + T^B = (1/2)m_A v_A^2 + (1/2)(m_B R^2/2)(v_A/R)^2 = (3/4)m v_A^2 = (3/4)m \dot{s}^2.$$

Вычисляем частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам и обобщенным скоростям:

$$\begin{aligned} \partial T/\partial s &= 0; \\ \partial T/\partial \dot{s} &= (3/2)m \dot{s}. \end{aligned} \quad (б)$$

Для вычисления Q_s сообщим системе возможное перемещение $\delta s = \delta s_A$ и подсчитаем работу внешних сил, приложенных к точкам системы на перемещениях точек их приложения:

$$\delta A_s = P_A \delta s_A = mg \delta s,$$

откуда

$$Q_s = \delta A_s/\delta s = mg. \quad (в)$$

Подставляя (б) и (в) в (а), получим: $(3/2)m \ddot{s} = mg$, откуда искомое ускорение груза A будет равно: $a_A = \ddot{s} = (2/3)g$.

Ответ: $a_A = (2/3)g$.

Пример 4.2: Система, состоящая из однородного диска A радиуса r с намотанной на него нитью и тела B движется под действием собственного веса.

Определить обобщенные ускорения \ddot{s} и $\ddot{\varphi}$, полагая $m_A = m_B = m$ и пренебрегая трением и весом блока C (рисунок 4.3, а).

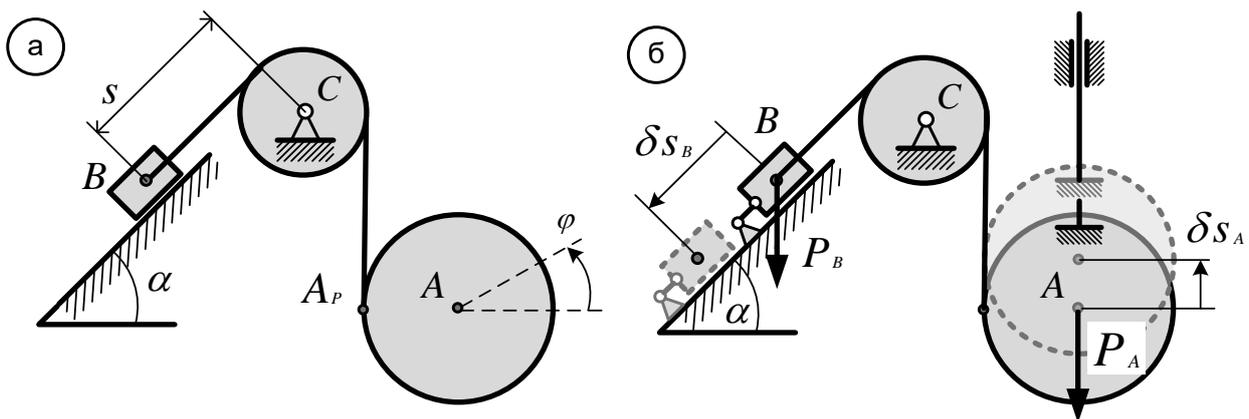


Рисунок 4.3

Решение: Воспользуемся уравнениями (4.10), которые для заданной системы с двумя степенями свободы примут вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (a)$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии диска A , участвующего в плоском движении, и кинетической энергии тела B , движущегося поступательно:

$$T = T_A + T_B = m_A v_A^2 / 2 + J_A \omega_A^2 / 2 + m_B v_B^2 / 2. \quad (б)$$

Скорость центра диска A можно найти по теореме о скоростях точек плоской фигуры: она складывается из скорости полюса A_P , в качестве которого удобно взять точку диска, касающуюся вертикального участка нити, и скорости этого центра в его вращении вокруг полюса A_P :

$$v_B = \dot{s}; v_A = (\dot{s} + r\dot{\varphi}).$$

Подставляя в (б) и учитывая, что $J_A = (m_A r^2) / 2$, а $\omega_A = \dot{\varphi}$, получим:

$$T = m_A (\dot{s} + r\dot{\varphi})^2 / 2 + m_A r^2 \dot{\varphi}^2 / 4 + m_B \dot{s}^2 / 2.$$

Вычисляем частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам и обобщенным скоростям:

$$\begin{aligned} \partial T / \partial s &= \partial T / \partial \varphi = 0; \\ \partial T / \partial \dot{s} &= m_A (\dot{s} + r\dot{\varphi}) + m_B \dot{s}; \\ \partial T / \partial \dot{\varphi} &= m_A (\dot{s} + r\dot{\varphi}) r + m_A r^2 \dot{\varphi} / 2. \end{aligned} \quad (в)$$

Для определения обобщенных сил Q_s и Q_φ , соответствующих обобщенным координатам $q_1 = s$ и $q_2 = \varphi$ сообщим системе возможное перемещение $\delta s > 0$, $\delta \varphi = 0$.

Фактически это означает, что на систему наложены две дополнительные связи: моментная – на диск A , препятствующая его повороту, и линейная – на тело B , а затем последней связи сообщено возможное перемещение $\delta s_B = \delta s > 0$ (рисунок 4.3, б).

Элементарная работа активных сил, приложенных к точкам системы, на этом перемещении будет равна:

$$\delta A_s = g(m_B \sin \alpha \delta s_B - m_A \delta s_A) = mg(\sin \alpha - 1) \delta s,$$

поскольку $\delta s_B = \delta s_A = \delta s$, а соответствующая обобщенная сила:

$$Q_s = \delta A_s / \delta s = mg(\sin \alpha - 1). \quad (г)$$

Аналогично сообщая системе возможное перемещение $\delta s = 0$, $\delta \varphi > 0$, и вычисляя элементарную работу

$$\delta A_\varphi = -mg \delta s_A, \text{ с учетом соотношения } \delta s_A = r \delta \varphi \text{ получим:}$$

$$Q_\varphi = \delta A_\varphi / \delta \varphi = -mgr. \quad (д)$$

Подставляя (в), (г) и (д) в (а), получим:

$$2\ddot{s} + r\ddot{\varphi} = g(\sin \alpha - 1);$$

$$r\ddot{s} + (3/2)r^2\ddot{\varphi} = -gr.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем искомые выражения обобщенных ускорений:

$$\ddot{s} = (g/4)(3\sin\alpha - 1);$$

$$\ddot{\varphi} = - (g/2r)(\sin\alpha + 1).$$

Ответ: $\ddot{s} = (g/4)(3\sin\alpha - 1);$
 $\ddot{\varphi} = - (g/2r)(\sin\alpha + 1).$

С помощью принципа Д Аламбера система сил, приложенных к движущейся механической системе, сводится к уравновешенной системе сил. Выше отмечалось, что к уравновешенной системе можно применять как уравнения равновесия, так и принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики является синтезом двух принципов механики – принципа Д Аламбера и принципа возможных перемещений Лагранжа и формулируется следующим образом:

В каждый момент времени сумма работ всех активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях системы, подчиненной идеальным, стационарным и двухсторонним связям, равна нулю:

$$\sum(\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i) \delta\mathbf{r}_i = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

Для доказательства запишем формулировку принципа Д Аламбера для системы материальных точек:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i + \mathbf{\Phi}_i = \mathbf{0}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.12)$$

где \mathbf{F}_i – равнодействующая активных сил, приложенных к i -той точке системы, \mathbf{N}_i – равнодействующая реакций связей, приложенных к этой точке, а $\mathbf{\Phi}_i$ – сила инерции.

Если система подчинена стационарным и двухсторонним связям, то в каждый момент времени будет справедлив принцип возможных перемещений, в соответствии с которым:

$$\sum(\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i + \mathbf{\Phi}_i) \delta\mathbf{r}_i = \mathbf{0},$$

а поскольку связи системы идеальны, то будет следовать (4.11).

Уравнение принципа Д Аламбера – Лагранжа в учебной литературе носит также название *общего уравнения динамики*.

Пример 4.3: Определить ускорение груза A , принимая барабан B за однородный цилиндр и полагая $m_A = m_B$ (рисунок 4.3, а).

Решение: В соответствии с принципом Д Аламбера прикладываем к системе активные силы \mathbf{P}_A и \mathbf{P}_B , и реакцию подшипника \mathbf{N}_B (рисунок 4.3, б).

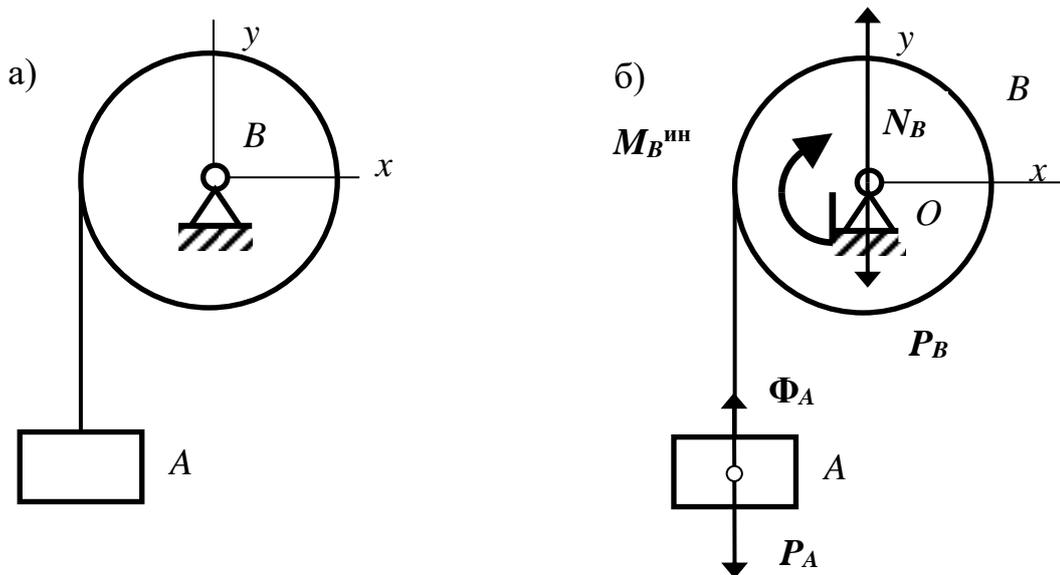


Рисунок 4.3

Запишем уравнение принципа возможных перемещений (4.11), которое для нашей задачи примет вид:

$$(P_A - \Phi_A) \delta s_A - M_B^{\text{nh}} \delta \varphi_B = 0$$

или

$$(m_A g - m_A a_A) \delta s_A - J_B \varepsilon_B \delta \varphi_B = 0. \quad (\text{a})$$

Выразим в последнем соотношении $\delta \varphi_B$ и ε_B соответственно через δs_A и a_A . С этой целью воспользуемся зависимостью:

$$\omega_B = v_A/R,$$

дифференцируя и интегрируя которую, получим:

$$\varepsilon_B = a_A/R, \quad \delta \varphi_B = \delta s_A/R. \quad (\text{б})$$

Подставляя (б) в (а), приходим к выражению:

$$(m_A g - m_A a_A) \delta s_A - (m_B R^2/2) (a_A/R) (\delta s_A/R) = 0,$$

откуда, поделив на $\delta s_A \neq 0$, найдем искомое ускорение груза A:

$$a_A = 2/3 g, \text{ т.е. совпадает с ответом при решении задачи 4.1}$$

Ответ: $a_A = 2/3 g$.

Примечания:

1 Приведенные примеры наглядно демонстрируют достоинства полученных Лагранжем уравнений, которые не содержат реакций идеальных связей и позволяют найти ускорения точек системы с одной степенью свободы так же просто, как с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы.

2 Самое главное – эти уравнения позволяют рассматривать системы с любым конечным числом степеней свободы и находить законы их движения.

3 Применение принципа Д Аламбера – Лагранжа в отличие от непосредственного использования принципа Д Аламбера позволяет исключить из рассмотрения реакции идеальных связей и тем самым упростить решение - избежать решения системы уравнений и найти ускорение груза А независимо от натяжения нитей T_{BA} и T_{BC} .

4 При определении ускорения с помощью принципа Д Аламбера – Лагранжа рекомендуется придерживаться следующего порядка решения задачи:

- 1) приложить к телам системы активные силы, реакции связей, не являющихся идеальными, и силы инерции;
- 2) сообщить одному из тел системы возможное перемещение, совпадающее по направлению с ускорением этого тела;
- 3) составить уравнение принципа Д Аламбера – Лагранжа;
- 4) выразить ускорения и возможные перемещения каждой i -ой точки системы через, соответственно, ускорение и возможное перемещение какой либо одной j -ой точки с учетом зависимостей:

$$a_i/a_j = v_i/v_j = s_i/s_j = \delta s_i/\delta s_j ;$$

- 5) определить искомое ускорение.

4.4 Устойчивость механических систем

Обобщенные силы системы с s степенями свободы, помещенной в потенциальное поле сил, определяются выражениями (4.3):

$$Q_j = - \partial \Pi / \partial q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (4.3')$$

поэтому уравнения Лагранжа II рода для такой системы (4.10):

$$(d/dt) (\partial T / \partial \dot{q}_j) - (\partial T / \partial q_j) = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (4.10')$$

примут вид:

$$(d/dt) (\partial T / \partial \dot{q}_j) - (\partial T / \partial q_j) = - \partial \Pi / \partial q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (4.13)$$

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа:

$$L = T - \Pi.$$

Учитывая, что $T = L + \Pi$, а

$$\partial T / \partial \dot{q}_j = \partial L / \partial \dot{q}_j, \quad \partial T / \partial q_j = \partial L / \partial q_j + \partial \Pi / \partial q_j$$

и подставляя последние выражения в (4.13), получим уравнения Лагранжа II рода для потенциального поля сил:

$$(d/dt) (\partial L / \partial \dot{q}_j) - \partial L / \partial q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (4.14)$$

Рассмотрим механическую систему с s степенями свободы, которая описывается уравнениями Лагранжа II рода (4.10):

$$(\partial/\partial t)(\partial T/\partial \dot{q}_j) - (\partial T/\partial q_j) = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (4.10')$$

Если на протяжении конечного промежутка времени она находится в состоянии покоя, то ее кинетическая энергия остается равной нулю, а значит из (4.10') следует, что

$$Q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (4.15)$$

С другой стороны, в силу первой аксиомы такое состояние системы будет возможно только в том случае, если каждая точка, а значит и система в целом находится в состоянии равновесия. Поэтому соотношения (4.15) будут являться *условиями равновесия системы в обобщенных координатах*.

Для потенциального поля сил эти условия примут вид:

$$\partial \Pi / \partial q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (4.16)$$

Эти условия одновременно являются условиями равновесия системы и необходимыми условиями минимума ее потенциальной энергии.

Состояние покоя (равновесия) механической системы в консервативном (потенциальном) поле может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным и условия (4.16) выполняются в каждом случае.

Устойчивое – если система, выведенная из положения равновесия, возвращается в это положение и совершает колебания около него.

Неустойчивое – если система, выведенная из положения равновесия при сколь угодно малом отклонении от него, не возвращается в положение равновесия и не совершает колебания около него.

Безразличное - если система, выведенная из положения равновесия, занимает новое положение равновесия.

Ответ на вопрос о характере равновесия системы дает *теорема Лагранжа-Дирихле*, которая утверждает, что

Достаточным условием равновесия консервативной системы является абсолютный минимум ее потенциальной энергии.

Пример 4.4: Определить при каком значении обобщенной координаты q механическая система с одной степенью свободы находится в положении равновесия, если ее потенциальная энергия имеет вид: $\Pi = q^2 - 6q + 11$.

Решение: Уравнение (4.16) примет вид:

$$2q - 6 = 0,$$

откуда $q = 3$. Этому значению q соответствует *минимальное* значение потенциальной энергии системы, равное:

$$\Pi(3) = 9 - 18 + 11 = 2,$$

откуда следует, что это значение q соответствует положению *устойчивого* равновесия системы.

Ответ: система находится в положении равновесия при $q = 3$

Пример 4.5. Определить характер равновесия системы, представляющей собой обратный маятник длиной l , несущий на конце точечную массу весом P , упруго закрепленную на пружине с жесткостью c (рисунок 4.5, а).

Решение. Система содержит пружину и является простейшей моделью упругого тела, поэтому в механике такая задача часто встречается при переходе от абсолютно твердых тел к деформируемым системам.

Рассмотрим нашу систему с одной степенью свободы в отклоненном положении (рисунок 4.5, б) и примем первоначальное положение системы за нулевое.

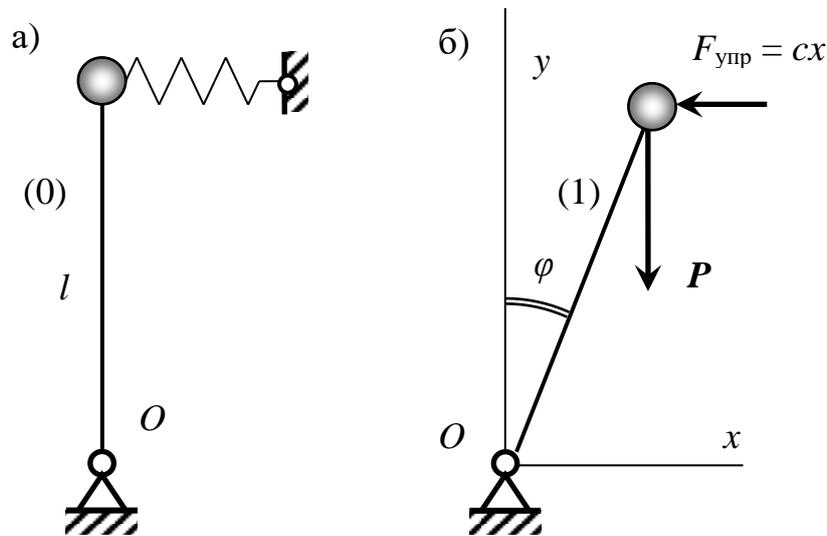


Рисунок 4.5

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии пружины и потенциальной энергии груза, равных соответственно, работе упругой силы пружины и работе силы тяжести при перемещении системы из первого положения в нулевое:

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi(F_{\text{упр}}) + \Pi(P) = A_{10}(F_{\text{упр}}) + A_{10}(P) = \\ &= (c/2) x^2 - P (\Delta y) = (c/2) l^2 \sin^2 \varphi - Pl(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Условие (12.14) при этом примет вид:

$$\partial \Pi / \partial \varphi = c l^2 \sin \varphi \cos \varphi - Pl \sin \varphi = 0,$$

откуда

$$\sin \varphi (cl \cos \varphi - P) = 0.$$

Полученное уравнение устойчивости имеет следующие решения:

1) $\varphi = 0$, $P < cl$. Для определения характера положения равновесия исследуем $\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2$:

$$\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2 = \partial / \partial \varphi [(c l^2 / 2) \sin 2\varphi - Pl \sin \varphi] = c l^2 \cos 2\varphi - Pl \cos \varphi;$$

$$\partial^2\Pi/\partial\varphi^2|_{\varphi=0} = c l^2 - P l = l(c l - P) > 0, \text{ если } P < c l.$$

То есть это *положение устойчивого равновесия*.

2) $\varphi = 0, P > c l$. Это, очевидно, *положение неустойчивого равновесия*.

3) $\varphi = \varphi_0 \neq 0, P = c l \cos\varphi_0$. Так же исследуем $\partial^2\Pi/\partial\varphi^2$:

$$\partial^2\Pi/\partial\varphi^2 = c l^2 \cos 2\varphi - P l \cos\varphi = c l^2(\cos 2\varphi - \cos\varphi_0 \cos\varphi);$$

$$\partial^2\Pi/\partial\varphi^2(\varphi = \varphi_0) = -c l^2 \sin^2\varphi_0 < 0.$$

То есть это также *положение неустойчивого равновесия*.

Ответ: 1) $\varphi = 0, P < c l$ – *положение устойчивого равновесия*;

2) $\varphi = 0, P > c l$ – *положение неустойчивого равновесия*;

3) $\varphi = \varphi_0 \neq 0, P = c l \cos\varphi_0$ – *положение неустойчивого равновесия*.

Примечание:

Отметим, что в примере 4.5 при $P = c l$ происходит *бифуркация* или разветвление форм равновесия так же, как при рассмотрении устойчивости упругих тел.

4.5. Вопросы для самоподготовки

1 Что понимается под обобщенными координатами механической системы?

2 От чего зависит число обобщенных координат?

3 Что понимается под обобщенными силами в уравнениях Лагранжа 2-го рода?

4 От чего зависит размерность обобщенной силы?

5 Как определяются обобщенные силы при решении задач в общем случае и при действии на систему только потенциальных сил?

6 Как при решении задачи определить обобщенные силы на возможных перемещениях механической системы с двумя степенями свободы?

7 Какой вид имеет в обобщенных координатах общее уравнение динамики?

8 Какой вид имеет уравнение Лагранжа 2-го рода и для каких целей используется?

9 Какой вид имеют уравнения Лагранжа 2-го рода для механической системы с двумя степенями свободы?

10 Из каких посылок и при каких условиях выводится общее уравнение динамики для механической системы? Как оно записывается?

11 Как записывается и формулируется принцип Д Аламбера-Лагранжа?

12 Что означают величины, входящие в принцип Д Аламбера-Лагранжа?

13 Для решения каких задач используется принцип Д Аламбера-Лагранжа?

14 Почему при использовании аналитических методов решения задач выгодно делить силы на заданные и реакции связей?

15 Укажите виды равновесия механической системы

16 Что понимается под устойчивостью механической системы?

17 Укажите условия равновесия механической системы

18 Укажите условия устойчивого равновесия системы

19 Укажите условия неустойчивого равновесия системы

20 Укажите условия устойчивого безразличного равновесия системы

МОДУЛЬ 5 МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Если систему вывести из положения устойчивого равновесия, она при определенных условиях начнет совершать колебания. Теория колебаний – является одним из важнейших разделов динамики.

5.1 Свободные колебания механических систем

5.1.1 Дифференциальное уравнение свободных колебаний

Рассмотрим систему n материальных точек с одной степенью свободы, положение которой описывается одной обобщенной координатой q , а движение – уравнением Лагранжа II рода:

$$(d/dt) (\partial T/\partial \dot{q}) - (\partial T/\partial q) = Q. \quad (5.1)$$

В общем случае уравнение (5.1) будет нелинейным, но если предположить, что \dot{q} и q малы, то его можно *линеаризовать*. Колебания, описываемые таким уравнением, называются *линейными*.

Пусть система подчинена стационарным связям, находится в потенциальном поле сил, а положению устойчивого равновесия системы соответствует значение $q = 0$.

Представим кинетическую энергию системы в виде:

$$T = (1/2) \sum_i m_i v_i^2 = (1/2) \sum_i m_i [(\partial r_i / \partial q) \dot{q}]^2 = (1/2) A(q) \dot{q}^2$$

и разложим функцию $A(q)$ в ряд:

$$A(q) = A(0) + (\partial A/\partial q)|_0 \cdot q + (1/2) (\partial^2 A/\partial q^2)|_0 \cdot q^2 + \dots$$

Ограничиваясь первым членом разложения, получим:

$$T = (1/2) a \dot{q}^2, \quad (5.2)$$

где $a = A(0) > 0$.

Представим аналогично потенциальную энергию системы:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + (\partial \Pi/\partial q)|_0 \cdot q + (1/2) (\partial^2 \Pi/\partial q^2)|_0 \cdot q^2 + \dots$$

Учтя, что $(\partial \Pi/\partial q)|_0 = Q(0) = 0$ и полагая $\Pi(0) = 0$, получим:

$$\Pi(q) = (1/2) c q^2, \quad (5.3)$$

где $c = (\partial^2 \Pi/\partial q^2)|_0 > 0$, поскольку система находится в положении устойчивого равновесия, где ее потенциальная энергия достигает минимума.

Подставляя (5.2) и (5.3) в (5.1), получим:

$$a \ddot{q} + cq = 0. \quad (5.4)$$

Дифференциальное уравнение колебаний точки с массой m , упруго закрепленной на пружинке с жесткостью c , имеет вид:

$$m \ddot{x} + cx = 0, \quad (5.4')$$

поэтому коэффициенты a и c в уравнении (5.4) называются соответственно *инерционным* и *упругим*, а сила Q в уравнении (5.1) – *квазиупругой*.

5.1.2 Интегрирование ДУ свободных колебаний

Представим уравнение (5.4) в виде:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \omega^2 = c/a \quad (5.4'')$$

и применим для его решения общую теорию решения дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, то есть будем искать решение в виде:

$$q(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Подставив последнее выражение в (5.4''), получим *характеристическое уравнение*:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

корни которого будут чисто мнимыми:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega,$$

при этом общее решение (5.4'') примет вид:

$$q(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) = C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. \quad (5.5)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t,$$

представим (5.5) в виде:

$$q(t) = (C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t,$$

а переходя от комплексно сопряженных констант C_1 и C_2 к новым постоянным интегрирования B и C по формулам:

$$B = C_1 + C_2; \quad C = C_1 - C_2;$$

получим искомое решение уравнения (5.4) в виде:

$$q(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t \quad (5.6)$$

или примет вид формулы:

$$q(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (5.7)$$

графическое представление, которой, показано на рисунке 5.1), где постоянные B и C связаны с постоянными A и α соотношениями:

$$B = A \sin \alpha, \quad C = A \cos \alpha.$$

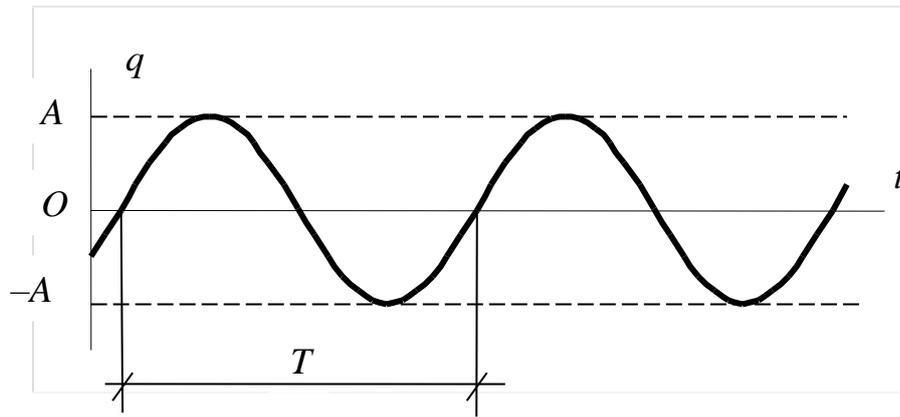


Рисунок 5.1

Эти константы определяют из начальных условий:

$$q(0) = q_0 ; \dot{q}(0) = \dot{q}_0. \quad (5.8)$$

Подставляя в (5.8) (5.6) и (5.7), получим:

$$B = q_0 ; C = \dot{q}_0 / \omega ; A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega} \right)^2} ; \alpha = \text{arctg}(\omega q_0 / \dot{q}_0).$$

Уравнение (5.7) описывает *гармонические колебания*, где:

- A – амплитуда колебания,
- $\omega t + \alpha$ – фаза колебания;
- α – начальная фаза колебания;
- ω – круговая или циклическая частота.

Период колебаний $T = 2\pi/\omega$, который измеряется в секундах, связан с частотой f , измеряемой в герцах, зависимостью:

$$f = 1/T.$$

Примечания:

1. В математическом аспекте уравнение (5.4'), описывающее движение точки, ничем не отличается от уравнения, которое описывает изменение электрического заряда q на обкладках конденсатора с емкостью C в колебательном контуре, содержащем индуктивность L :

$$L\ddot{q} + (1/C)q = 0.$$

При этом увеличение вчетверо жесткости пружины c в уравнении (5.4) приводит к двукратному росту циклической частоты механических колебаний $\omega = (c/m)^{(1/2)}$, в то время как соответствующее увеличение вчетверо емкости конденсатора снижает вдвое циклическую частоту электрических колебаний $\omega = (LC)^{-(1/2)}$.

Отметим, что при параллельном соединении пружин, как и при параллельном соединении конденсаторов: $C = C_1 + C_2$, при последовательном: $(1/C) = (1/C_1) + (1/C_2)$.

2. Обозначение ω для *круговой частоты* не случайно: если твердое тело вращается вокруг оси Oz с *угловой скоростью* ω , то проекция точки M этого тела, находящейся на расстоянии A от оси вращения на ось Ox будет колебаться по закону (5.7).

5.1.3 Свободные колебания с учетом сопротивления

Пусть на систему помимо обобщенной упругой силы $Q_{\text{упр}} = -cq$ действует обобщенная сила сопротивления, пропорциональная скорости $Q_{\text{сопр}} = -b\dot{q}$. Тогда, дифференциальное уравнение колебаний системы:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0$$

представим в виде:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2q = 0, \quad (5.9)$$

где $2\varepsilon = b/a$, $\omega^2 = c/a$.

Подставляя в (5.9) $q(t) = Ce^{\lambda t}$, получим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega^2 = 0,$$

корни которого:

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}. \quad (5.10)$$

В зависимости от соотношения между ε и ω здесь возможны три случая:

1) «Малое» сопротивление ($\omega > \varepsilon$):

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm i\omega_1, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}.$$

Общее решение (5.10):

$$q(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) = e^{-\varepsilon t} (C_1 e^{+i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}),$$

переходя от постоянных C_1 и C_2 к постоянным B и C или A и α можно представить в виде, аналогичном (5.6) или (5.7) (рисунок 5.2):

$$q(t) = e^{-\varepsilon t} (B \cos \omega_1 t + C \sin \omega_1 t), \quad (5.11)$$

$$q(t) = A e^{-\varepsilon t} \sin(\omega t + \alpha). \quad (5.12)$$

Эти выражения представляют затухающие колебания с условным периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$, степень затухания которых характеризует отношение двух последовательных максимальных отклонений одного знака:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A \exp(-\varepsilon t_n) \sin(\omega_1 t_n + \alpha)}{A \exp[-\varepsilon(t_n + T_1) \sin(\omega_1 t_n + \omega_1 \frac{2\pi}{\omega_1} + \alpha)]} = \exp(\varepsilon T_1).$$

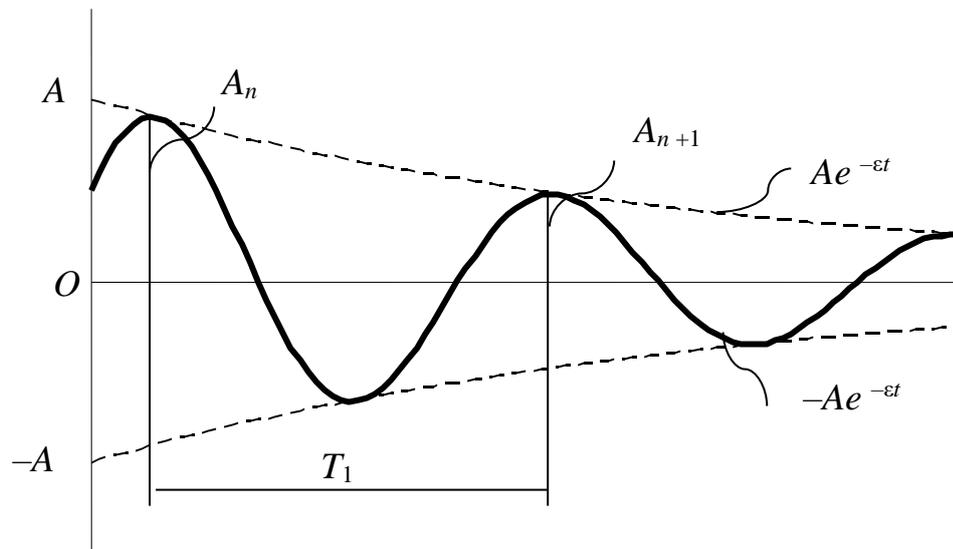


Рисунок 5.2

На практике рассматривают логарифм этой величины, называемый *логарифмическим декрементом затухания*:

$$\delta = \ln[\exp(\epsilon T_1)] = \epsilon T_1 \approx \epsilon T.$$

2) «Большое» сопротивление ($\omega < \epsilon$):

$$\lambda_{1,2} = -\epsilon \pm n; \quad n = \sqrt{\epsilon^2 - \omega^2}.$$

Общее решение (5.10):

$$q(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) = e^{-\epsilon t} (C_1 e^{+nt} + C_2 e^{-nt})$$

стремится с течением времени к нулю, поскольку $\epsilon > n$, движение апериодическое (рисунок 5.3).

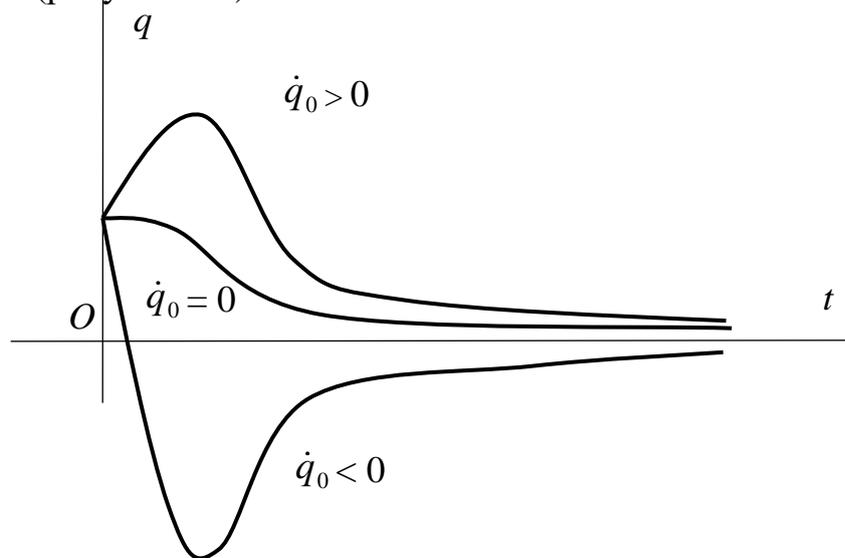


Рисунок 5.3

3) Промежуточный случай ($\omega = \epsilon$):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\varepsilon$$

Тогда, общее решение (5.10) имеет вид: $q(t) = e^{-\varepsilon t} (C_1 + C_2 t)$, которое качественно не отличается от предыдущего.

5.2. Вынужденные колебания механических систем

5.2.1 Вынужденные колебания без учета сопротивления

Пусть на систему действуют две обобщенные силы: упругая $Q_{\text{упр}} = -cq$ и возмущающая гармоническая сила $Q_{\text{возм}} = P^* \sin \Omega t$.

Дифференциальное уравнение колебаний системы:

$$a \ddot{q} + cq = P^* \sin \Omega t$$

запишем в виде:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = P \sin \Omega t, \quad (5.13)$$

где $\omega^2 = c/a$, $P = P^*/a$.

Общее решение неоднородного уравнения (5.13) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$q(t) = q_{\text{одн}}(t) + q_{\text{част}}(t). \quad (5.14)$$

Последнее, следуя общей теории решения ДУ, будем искать с учетом вида функции, входящей в правую часть уравнения (5.13).

1) Пусть $\Omega \neq \omega$. Ищем частное решение в виде:

$$q_{\text{част}}(t) = \tilde{A} \sin \Omega t. \quad (5.15)$$

Подставляя (5.15) в (5.13), получим:

$$(\omega^2 - \Omega^2) \tilde{A} \sin \Omega t = P \sin \Omega t, \text{ откуда} \\ \tilde{A} = P / (\omega^2 - \Omega^2)$$

и с учетом (5.7), (5.15) выражение (5.14) примет вид:

$$q(t) = q_{\text{собств}}(t) + q_{\text{вын}}(t) = A \sin(\omega t + \alpha) + [P / (\omega^2 - \Omega^2)] \sin \Omega t. \quad (5.16)$$

Как видим, колебания в системе складываются из собственных и вынужденных. Последние происходят с частотой вынуждающей силы, причем в фазе с ней при $\Omega < \omega$ и в противофазе при $\Omega > \omega$.

2) Пусть $\Omega = \omega$. Ищем частное решение в виде:

$$q_{\text{част}}(t) = q_{\text{вын}}(t) = \tilde{A} t \cos \omega t. \quad (5.17)$$

Подставляя (5.17) в (5.13) с учетом зависимостей:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{\text{вын}}(t) &= \tilde{A} \cos \omega t - \tilde{A} \omega t \sin \omega t; \\ \ddot{q}_{\text{вын}}(t) &= -\tilde{A} \omega \sin \omega t - \tilde{A} \omega \sin \omega t - \tilde{A} \omega^2 t \cos \omega t,\end{aligned}$$

получим:

$$\sin \omega t (-2 \tilde{A} \omega) + \cos \omega t (\tilde{A} \omega^2 t - \tilde{A} \omega^2 t) = P \sin \omega t$$

или:

$$\tilde{A} = -P/2\omega, \text{ откуда:}$$

$$q_{\text{вын}}(t) = -(Pt/2\omega) \cos \omega t = (Pt/2\omega) \sin(\omega t - \pi/2)$$

и общее решение (14.14) примет вид:

$$q(t) = A \sin(\omega t + \alpha) + (Pt/2\omega) \sin(\omega t - \pi/2). \quad (5.18)$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний $Pt/2\omega$ линейно возрастает с течением времени. Это – резонанс.

При резонансе вынужденные колебания происходят с собственной частотой системы и отстают по фазе на $\pi/2$ от вынуждающей силы.

5.2.2 Вынужденные колебания с учетом сопротивления

5.2.2. 1 Общее решение

Пусть на систему помимо $Q_{\text{упр}} = -cq$ и $Q_{\text{возм}} = P^* \sin \Omega t$ действует обобщенная сила сопротивления, пропорциональная скорости $Q_{\text{сопр}} = -b\dot{q}$. Тогда, дифференциальное уравнение движения системы примет вид:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = P^* \sin \Omega t$$

запишем в виде:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = P \sin \Omega t, \quad (5.19)$$

где $2\varepsilon = b/a$, $\omega^2 = c/a$, $P = P^*/a$.

Как и раньше $q(t) = q_{\text{одн}}(t) + q_{\text{част}}(t) = q(t) = q_{\text{собств}}(t) + q_{\text{вын}}(t)$.

Ищем $q_{\text{част}}(t)$ в виде:

$$q_{\text{част}}(t) = \tilde{A} \sin(\Omega t - \beta) = \tilde{A} \sin \theta.$$

Подставляя в (5.19) последнее выражение вместе со своими производными:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{\text{част}}(t) &= \tilde{A} \Omega \cos \theta; \\ \ddot{q}_{\text{част}}(t) &= -\tilde{A} \Omega^2 \sin \theta;\end{aligned}$$

получим:

$$-\tilde{A} \Omega^2 \sin \theta + 2\varepsilon \tilde{A} \Omega \cos \theta + \omega^2 \tilde{A} \sin \theta = P \sin(\theta + \beta) = P(\sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta),$$

откуда приравнявая коэффициенты при $\sin \theta$ и $\cos \theta$ в обеих частях последнего уравнения, найдем:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\omega^2 - \Omega^2) &= P \cos \beta; \\ 2\varepsilon \tilde{A} \Omega &= P \sin \beta.\end{aligned}$$

Из этих соотношений получим искомые выражения для \tilde{A} и β :

$$\tilde{A} = \frac{P}{\sqrt{(\omega^2 + \Omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \Omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2\varepsilon \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

Представив последние формулы в виде:

$$\tilde{A} = \frac{P}{\omega^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{2\varepsilon}{\omega} \cdot \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2},$$

и введя обозначения: $\lambda = \Omega/\omega$ и $\gamma = (2\varepsilon)/\omega$, получим:

$$\tilde{A} = \frac{P}{\omega^2 \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \lambda^2 \gamma^2}}; \quad (5.20)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \gamma \lambda / (1 - \lambda^2) \quad (5.21)$$

Второй из введенных коэффициентов носит название *коэффициента неупругого сопротивления* и связан с уже известным логарифмическим декрементом затухания зависимостью:

$$\gamma = \delta/\pi = (\varepsilon T)/\pi = (\varepsilon \cdot 2\pi)/(\pi \omega) = (2\varepsilon)/\omega.$$

Таким образом, общее решение уравнения (5.19) для $\omega > \varepsilon$ имеет вид:

$$q(t) = q_{\text{собств}}(t) + q_{\text{вын}}(t) = A e^{-\varepsilon t} \sin(\omega t + \alpha) + \tilde{A} \sin(\Omega t - \beta). \quad (5.19')$$

Собственные колебания в системе с течением времени затухают, а вынужденные будут происходить с частотой вынуждающей силы, отставая от нее по фазе на угол β .

5.2.3 Амплитуда и фаза вынужденных колебаний

Преобразуем выражение (5.20), учтя что

$$P/\omega^2 = P^*/(a\omega^2) = (P^*a)/(ac) = P^*/c = \Delta_{\text{ст}}(P^*)$$

– статический прогиб от амплитуды возмущающей силы P^* , к виду:

$$\tilde{A} = \mu \cdot \Delta_{\text{ст}}(P^*),$$

где

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \lambda^2 \gamma^2}}$$

– коэффициент динамичности, показывающий во сколько раз динамическое действие силы $P(t) = P^* \sin \Omega t$ больше статического действия ее амплитуды P^* .

График $\mu = \mu(\lambda)$ называется *амплитудно-частотной характеристикой* системы (рисунок 5.4). Как видим, он имеет следующие особенности:

- $\mu \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow 0$ (статическое действие силы);
- $\mu \rightarrow 1/\gamma$ при $\lambda \rightarrow 1$ (резонанс);
- $\mu \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

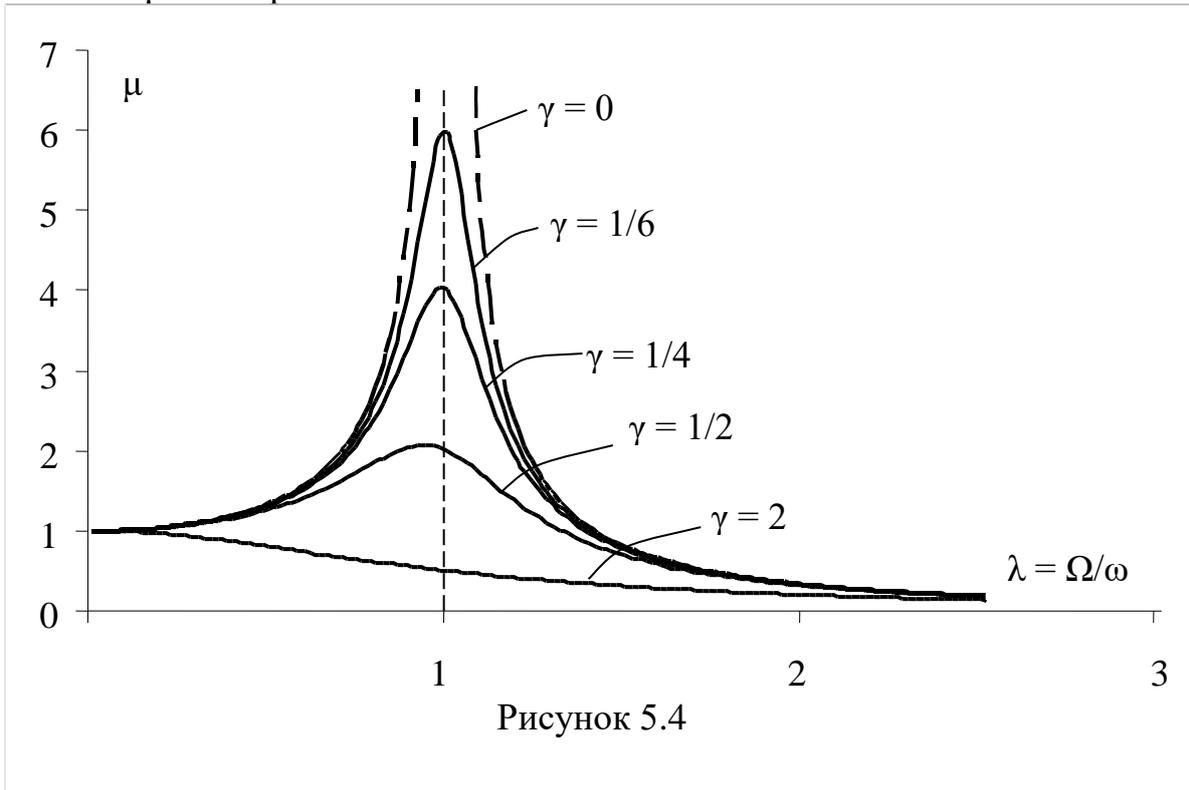


Рисунок 5.4

Для нахождения максимального значения коэффициента динамичности достаточно определить минимальное значение функции

$$f(\lambda) = (1 - \lambda^2)^2 + \lambda^2 \gamma^2.$$

$$df/d\lambda = 2(1 - \lambda^2)(-2\lambda) + 2\lambda \gamma^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda^* = \sqrt{1 - (\gamma^2/2)},$$

то есть максимальное значение коэффициента динамичности, равно:

$$\mu(\lambda^*) = \frac{1}{\gamma \sqrt{1 - (\gamma/2)^2}} \approx \frac{1}{\gamma}$$

достигается при $\lambda < 1$. Отметим, что при $\gamma > \sqrt{2}$ график $\mu(\lambda)$ монотонно убывает.

В строительной практике γ изменяется в пределах от 0,1 до 0,01. Соответственно коэффициент динамичности μ заключен в промежутке от 10 до 100, то есть динамическое действие гармонической силы может на два порядка превысить статическое действие ее амплитуды. При этом сопротивление необходимо учитывать только в резонансной полосе:

$$0,85 \leq \lambda \leq 1,15.$$

При других значениях Ω его можно не учитывать, полагая $\mu = 1/(1 - \lambda^2)$.

Переходя к исследованию зависимости $\beta = \beta(\lambda)$, которая называется *фазо-частотной характеристикой* системы, отметим следующие характерные особенности соответствующего графика (рисунок 5.5):

$\beta \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ (дорезонансная зона);

$\beta = \pi/2$ при $\lambda \rightarrow 1$ (резонанс);

$\beta \rightarrow \pi$ при $\lambda \gg 1$ (послерезонансная зона).

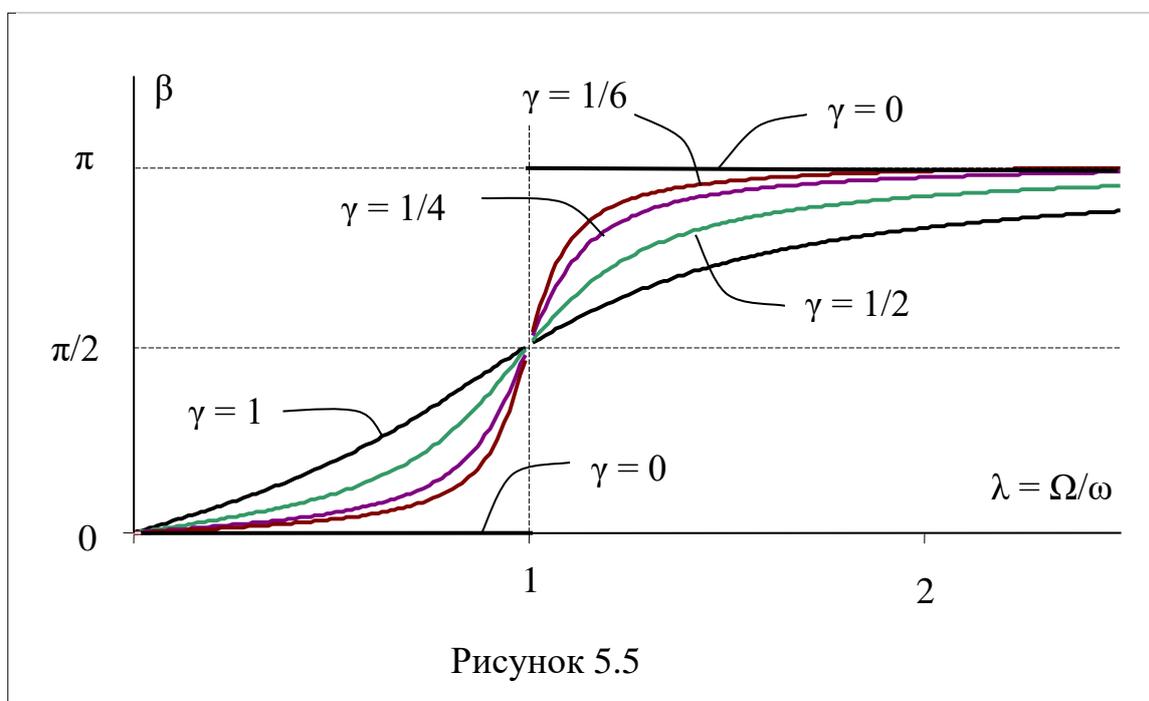


Рисунок 5.5

С уменьшением параметра γ графики непрерывных функций $\beta(\lambda)$ как угодно близко приближаются к графику кусочно-постоянной функции с особенностью в точке $\lambda = 1$, которая соответствует случаю $\gamma = 0$:

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda < 1; \\ \pi/2 & \text{при } \lambda = 1; \\ \pi & \text{при } \lambda > 1. \end{cases}$$

5.3 Кинетическая и потенциальная энергия механических систем

Рассмотрим систему с s степенями свободы, подчиненную стационарным связям и помещенную в потенциальное поле сил.

В этом случае ее кинетическая энергия имеет вид:

$$T = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где коэффициенты A_{ij} зависят только от обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_s . Разложим их в ряд в окрестности положения равновесия: $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$:

$$A_{ij} = A_{ij}|_0 + \sum_{i=1}^s (\partial A_{ij} / \partial q_i)|_0 \cdot q_i + (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\partial^2 A_{ij} / \partial q_i \partial q_j)|_0 \cdot q_i q_j + \dots$$

Ограничиваясь константами и обозначая

$$A_{ij}|_0 = a_{ij},$$

получим:

$$T = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (5.22)$$

где a_{ij} – инерционные коэффициенты.

Поступим аналогично с выражением потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \Pi|_0 + \sum_{i=1}^s (\partial \Pi / \partial q_i)|_0 \cdot q_i + (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\partial^2 \Pi / \partial q_i \partial q_j)|_0 \cdot q_i q_j + \dots$$

Полагая $\Pi|_0 = \Pi(0, 0, \dots, 0) = 0$, учитывая, что $(\partial \Pi / \partial q_i)|_0 = 0$ и обозначая

$$(\partial^2 \Pi / \partial q_i \partial q_j)|_0 = c_{ij},$$

придем к выражению:

$$\Pi = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q_i q_j, \quad (5.23)$$

где c_{ij} – коэффициенты жесткости или коэффициенты упругости.

Таким образом, как кинетическая (5.22), так и потенциальная (5.23) энергия при малых колебаниях системы являются квадратичными формами, которые можно представить в удобном для дальнейшего изучения виде, если ввести в рассмотрение следующие матричные операторы.

1) *Прямоугольная матрица* размерами $(m \times n)$, состоящая из m строк и n столбцов:

$$[A] = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

и, в частности:

2) *Матрица-строка* размерами $(1 \times n)$, состоящая из одной строки и n столбцов:

$$[A] = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}];$$

3) *Матрица-столбец (вектор)* размерами $(m \times 1)$, состоящий из m строк и одного столбца, который будем обозначать фигурными скобками и который при помощи операции транспонирования можно записать в виде:

$$\{A\} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11} \quad a_{21} \quad \dots \quad a_{m1}]^T = \{a_{11} \quad a_{21} \quad \dots \quad a_{m1}\};$$

4) *Квадратная матрица* порядка t размерами $(m \times m)$, в частности:

5) *Диагональная матрица* порядка t , у которой отличны от нуля только элементы на главной диагонали, то есть $a_{ij} = 0$, если $i \neq j$ и, в частности:

6) *Единичная матрица* порядка t :

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Напомним основные операции с матрицами.

1) *Сложение* – эта операция определена для прямоугольных матриц одного размера: $[A]$ $(m \times n)$ и $[B]$ $(m \times n)$: $[C] = [A] + [B]$, при этом

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

2) *Умножение* – эта операция определена для матриц соответствующего размера $[A]$ $(m \times n)$ и $[B]$ $(n \times l)$: $[C] = [A] \cdot [B]$, при этом

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj}.$$

В частности, если вектор $\{A\}$ $(m \times 1)$ умножить на матрицу-строку $[B]$ $(1 \times l)$, то получим прямоугольную матрицу $[C]$ $(m \times l)$. А если матрицу-строку $[A]$ $(1 \times n)$ умножить на вектор $\{B\}$ $(n \times 1)$, получим матрицу первого порядка, то есть скаляр. Напомним, что в общем случае $[A] \cdot [B] \neq [B] \cdot [A]$.

3) *Транспонирование* – эта операция для матрицы $[A]$ $(m \times n)$ определена так: $[A]^T = [B]$ $(n \times m)$, где $b_{ij} = a_{ji}$. При этом:

$$([A] \cdot [B])^T = [B]^T \cdot [A]^T.$$

4) *Нахождение обратной матрицы*. Для матрицы $[A]$ $(m \times m)$, определитель которой не равен нулю, существует и единственна матрица $[A]^{-1}$, такая, что

$$[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} \cdot [A] = [E],$$

где $[E]$ – единичная матрица. Отметим, что

$$([A]^{-1})^T = ([A]^T)^{-1} = [A]^{-T}.$$

5) *Дифференцирование матриц* и нахождение частных производных от скаляра f по вектору $\{v\} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$:

$$\partial f / \partial \{v\} = \{\partial f / \partial v_1, \partial f / \partial v_2, \dots, \partial f / \partial v_m\}, \quad (5.24)$$

В частности, для квадратичной формы $f = \{v\}^T [A] \{v\}$:

$$\partial f / \partial \{v\} = 2[A] \{v\}. \quad (5.25)$$

Таким образом, возвращаясь к нашей системе с s степенями свободы и вводя в рассмотрение вектор обобщенных координат:

$$\{q\} = [q_1, q_2, \dots, q_s]^T,$$

а также две матрицы – *инерционную* $[A] = [a_{ij}]$ и *матрицу жесткости* $[C] = [c_{ij}]$ с элементами, равными коэффициентам квадратичных форм (5.22) и (5.23), можно представить кинетическую и потенциальную энергию системы в виде:

$$T = (1/2) \{\dot{q}\}^T [A] \{\dot{q}\}, \quad (5.26)$$

$$\Pi = (1/2) \{q\}^T [C] \{q\}. \quad (5.27)$$

5.4 Дифференциальное уравнение свободных колебаний механических систем

Систему уравнений Лагранжа, описывающих колебания системы:

$$(d/dt)(\partial T / \partial \dot{q}_j) - (\partial T / \partial q_j) = - \partial \Pi / \partial q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (4.10')$$

принимая во внимание (15.3) можно представить в матричном виде:

$$(d/dt)(\partial T / \partial \{\dot{q}\}) - (\partial T / \partial \{q\}) = - \partial \Pi / \partial \{q\}. \quad (5.28)$$

Подставляя в (5.28) (5.26) и (5.27) с учетом (5.5) получим *дифференциальное уравнение свободных колебаний системы с s степенями свободы*:

$$[A] \{\ddot{q}\} + [C] \{q\} = 0. \quad (5.29)$$

Если матрица $[A]$ в последнем выражении имеет диагональный вид, то такое уравнение называется *дифференциальным уравнением колебаний в прямой форме* (форме метода перемещений).

Умножив (5.29) слева на *матрицу податливости* $[D] = [C]^{-1}$ получим уравнение:

$$[D][A] \{\ddot{q}\} + \{q\} = 0, \quad (5.30)$$

которое называется *дифференциальным уравнением колебаний в обратной форме* (форме метода сил).

В общем случае матрицу $[A]$ в (5.29) можно привести к диагональному виду при помощи линейных преобразований координат. Такая процедура

соответствует приведению к каноническому виду квадратичной формы кинетической энергии (5.26). Аналогичное замечание касается и матрицы $[C]$, приведение которой к диагональному виду соответствует приведению к каноническому виду квадратичной формы потенциальной энергии (5.27).

Пример 5.1: Составить дифференциальное уравнение колебаний системы с двумя степенями свободы, пренебрегая весом балки и закрепленных на ней грузов с массами M_1 и M_2 (рисунок 5.6, а).

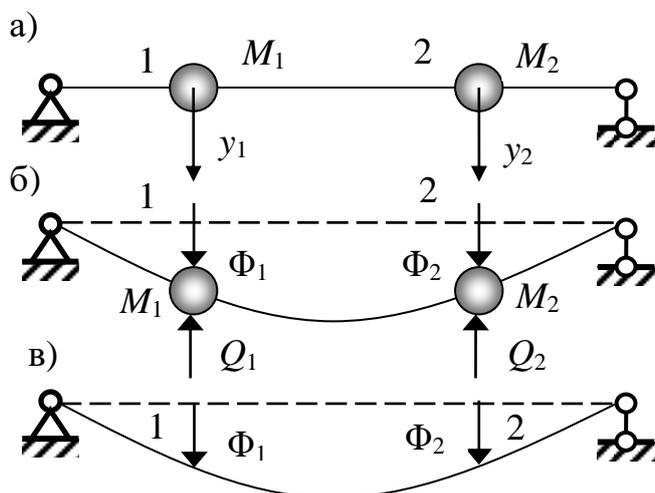


Рисунок 5.6

Решение: Примем в качестве обобщенных координат вертикальные смещения точек, направив соответствующие оси Oy_1, Oy_2 вниз – по движению и выбрав начало отсчета в положении равновесия, и рассмотрим движущиеся точки в текущий момент времени.

На каждую из них действует только обобщенная упругая сила деформированной балки Q_j , направленная, как и упругая

восстанавливающая сила пружины в сторону, противоположную смещению, то есть в нашем примере – вверх (рисунок 5.6, б).

В соответствии с принципом Д Аламбера для каждой точки и в каждый момент времени сумма силы Q_j и силы инерции $\Phi_j = -M_j a_j$ равна нулю:

$$Q_j + \Phi_j = 0$$

или, проектируя на ось Oy :

$$Q_j = \Phi_j = -M_j \ddot{y}_j.$$

Теперь для того чтобы получить дифференциальные уравнения колебаний системы отбросим движущиеся массы, заменив их силами инерции, приложенными к невесомой балке, и определим перемещение точки i упругой системы (рисунок 5.6, в).

На основании хорошо известного в сопротивлении материалов *принципа суперпозиции*:

$$y_i = \sum_j \Phi_j \delta_{ij}, \quad (a)$$

где δ_{ij} – коэффициент податливости, равный перемещению точки i от единичной силы, приложенной в точке j , откуда искомые уравнения в скалярной форме примут вид:

$$M_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{12} \ddot{y}_2 + y_1 = 0,$$

$$M_1 \delta_{21} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{22} \ddot{y}_2 + y_2 = 0.$$

В матричной форме соотношение (а) запишется как:

$$\{q\} = - [D][A]\{\ddot{q}\},$$

где $\{q\} = \{y_1, y_2\}$,

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix},$$

то есть оно совпадает с уравнением (5.30).

$$\begin{aligned} \text{Ответ:} \quad M_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{12} \ddot{y}_2 + y_1 &= 0; \\ M_1 \delta_{21} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{22} \ddot{y}_2 + y_2 &= 0. \end{aligned}$$

5.5 Собственные частоты и собственные колебания механических систем

Будем искать решение уравнения (5.30) при начальных условиях:

$$\{q(0)\} = \{q_0\}; \quad \{\dot{q}(0)\} = \{\dot{q}_0\} \quad (5.31)$$

в виде:

$$\{q(t)\} = \{A\} \sin(\omega t + \alpha) \quad (5.32)$$

где $\{A\} = [A_1, A_2, \dots, A_s]^T$ – вектор амплитуд.

Подставляя

$$\{\ddot{q}\} = - \{A\} \omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

в (5.30), получим:

$$([D][A] - \lambda[E]) \{A\} = 0, \quad (5.33)$$

где $\lambda = (1/\omega^2)$.

Последнее соотношение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд. Условие ненулевого решения:

$$\det ([D][A] - \lambda[E]) = 0 \quad (5.34)$$

в скалярном виде для примера 5.1 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}M_1 - \lambda & \delta_{12}M_2 \\ \delta_{21}M_1 & \delta_{22}M_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.34')$$

Раскрывая (15.13) получим алгебраическое уравнение:

$$\lambda^S + a_1\lambda^{S-1} + a_2\lambda^{S-2} + \dots + a_S = 0,$$

которое называется *характеристическим* или *частотным*. Его корни:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_S$$

образуют *спектр собственных частот*.

Таким образом, система с s степенями свободы имеет s собственных частот.

Для каждой ω_k из уравнения (5.33) можно найти вектор

$$\{A^{(k)}\} = [A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots, A_s^{(k)}]^T,$$

который называется *собственным вектором системы*.

В силу однородности (5.33) ее решением будет также $C_k\{A^{(k)}\}$, то есть фактически решение системы (5.33) можно найти только с точностью до отношения:

$$A_1^{(k)} : A_2^{(k)} : \dots : A_s^{(k)}.$$

Подставляя $\{A^{(k)}\}$ в (5.32), получим:

$$\{q^{(k)}(t)\} = \{A^{(k)}\} \sin(\omega_k t + \alpha_k).$$

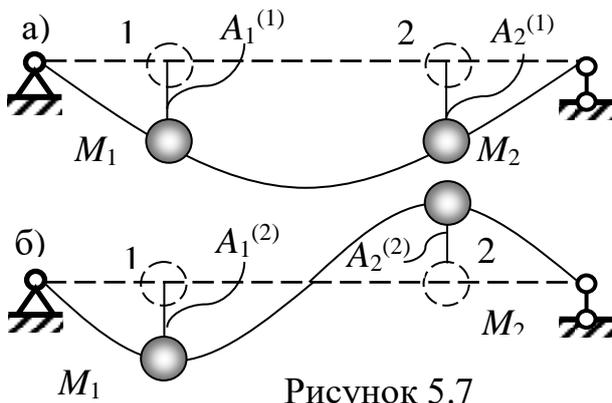
Общим решением (5.30) будет:

$$\{q(t)\} = \sum_{k=1}^s C_k \{A^{(k)}\} \sin(\omega_k t + \alpha_k),$$

где C_k , α_k – константы, определяемые из начальных условий (5.31). Последние можно задать так, что в системе будут происходить колебания с какой-либо одной частотой ω_k . Такие колебания называются *собственными* или *главными*.

Собственные формы колебаний, соответствующие частоте ω_1 и ω_2 в примере 5.1 показаны на рисунках 5.7,а и 5.7,б соответственно.

Для того чтобы в системе происходили главные колебания с частотой ω_k , нужно задать начальные условия: $\{q(0)\} = \{A^{(k)}\}$; $\{\dot{q}(0)\} = \{0\}$.



Пример 5.2: В шарнире C плоской фермы находится точка с массой $m = 9$ кг (рисунок 5.8, а). Жесткость всех стержней фермы одинакова и равна $EF = 0,1$ кН, длина $l = 1$ м. Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней, определить частоты собственных малых колебаний шарнира.

Решение: 1. К шарниру C , наделенному массой, прикладываем единичную горизонтальную силу (рисунок 5.8, б). Методом вырезания узлов

(см. раздел «Статика» дисциплины «Теоретическая механика») определяем усилия в стержнях: $S_{1,1} = S_{1,2} = S_{1,4} = S_{1,5} = 0$; $S_{1,3} = -1$.

В усилиях $S_{1,i}$ первый индекс указывает направление приложенной единичной силы, второй индекс номер стержня. Номера стержней указаны на рисунке 5.8, б.

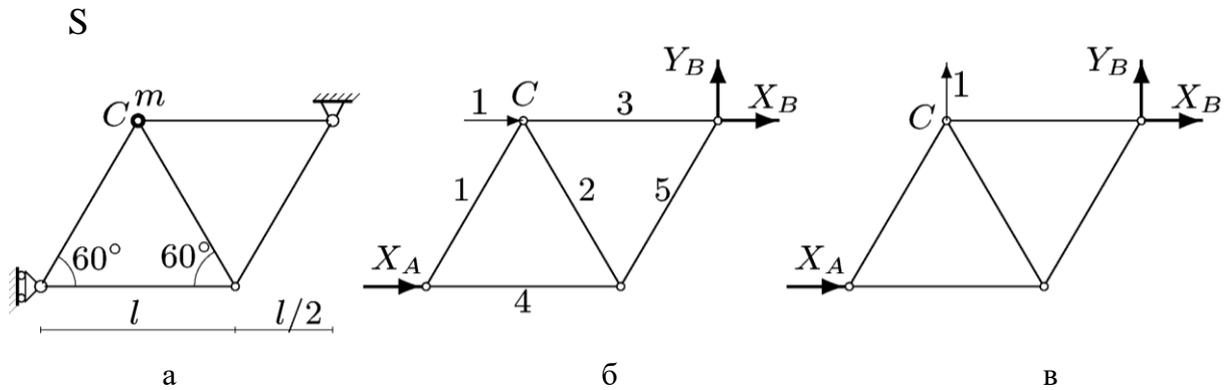


Рисунок 5.8

2. К шарниру C прикладываем единичную вертикальную силу (рисунок 5.8,в). Определяем усилия в стержнях $S_{2,1}=0$; $S_{2,2} = S_{2,4} = S_{2,5} = 1,155$; $S_{2,3} = -0,577$.

3. По формуле Максвелла–Мора (2) находим коэффициенты податливости $b_{i,j}$. Промежуточные результаты заносим в таблицу:

μ	$S_{1,\mu}$	$S_{2,\mu}$	l_μ	$l_\mu S_{1,\mu}^2$	$l_\mu S_{1,\mu} S_{2,\mu}$	$l_\mu S_{2,\mu}^2$
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1.155	1	0	0	1.333
3	-1	-0.577	1	1	0.577	0.333
4	0	-1.155	1	0	0	1.333
5	0	-1.155	1	0	0	1.333
$\sum_{\mu=1}^5$				1.000	0.577	4.333

Суммируя три последних столбца, получаем коэффициенты податливости, отнесенные к жесткости EF :

$$b_{1,1} = 1.000/(EF), \quad b_{1,2} = 0.577/(EF), \quad b_{2,2} = 4.333/(EF),$$

и записываем их в виде симметричной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.00577 \\ 0.00577 & 0.04333 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы B . Приравняем нулю определитель

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Решаем квадратное уравнение и находим собственные значения:

$$\lambda_1 = 0.044305, \quad \lambda_2 = 0.009028.$$

6. Находим частоты собственных колебаний (круговые частоты):

$$\omega_1 = 1/\sqrt{m\lambda_1} = 1.584 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 1/\sqrt{m\lambda_2} = 3.508 \text{ рад/с}.$$

Ответ: $\omega_1 = 1.584 \text{ рад/с}$;

$\omega_2 = 3, 508 \text{ рад/с}$

Следствия:

1. Если в матричном уравнении (5.29) одновременно привести к диагональному виду матрицу $[A]$ и матрицу $[C]$, соответствующая ему система дифференциальных уравнений распадется на отдельные уравнения, и мы получим дифференциальные уравнения колебаний в главных или «нормальных» координатах. Это будет означать, что решение одной сложной задачи с s степенями свободы мы свели к рассмотрению s простых задач с одной степенью свободы каждая.

2. В примере 5.1 главные колебания с основной частотой системы ω_1 , соответствуют движению масс M_1 и M_2 в фазе, – они одновременно проходят положение равновесия и одновременно удаляются от него на максимальное

расстояние. В колебаниях, происходящих с частотой ω_2 , массы M_1 и M_2 движутся в *противофазе*.

5.6 Вопросы для самоподготовки

1 Какой вид имеют дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний и его два решения?

2 Какие характеристики колебаний не зависят от начальных условий?

3 Как определяются характеристики колебаний?

4 Как по начальным условиям определяются величины C_1 и C_2 ?

5 Как по начальным условиям определяется амплитуда свободных гармонических колебаний?

6 Как по начальным условиям определяется начальная фаза свободных гармонических колебаний?

7 Под действием каких сил и при каких условиях возникают либо затухающие колебания, либо апериодическое движение?

8 Какой вид имеют дифференциальное уравнение затухающих колебаний и возможные записи его решения?

9 Как определяются период и декремент затухающих колебаний?

10 Что характеризует декремент затухания колебаний?

11 Во сколько раз период затухающих колебаний материальной точки больше периода ее свободных колебаний, если коэффициент затухания $n=0,5k$?

12 Какой вид имеют дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при отсутствии сопротивления среды и его решения?

13 По какому закону изменяется амплитуда вынужденных колебаний при резонансе?

14 Чему равен при резонансе коэффициент динамичности?

15 Какой вид имеют графики затухающих и вынужденных колебаний

16 Какой вид имеет и график изменения амплитуды колебаний при резонансе?

17 Что такое спектр собственных частот?

18 Чем характеризуется спектр собственных частот?

19 Чем характеризуются собственные частоты?

20 Чем характеризуются собственные колебания механических систем?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебная программа дисциплины «Теоретическая механика» бакалавриата при изучении раздела «Динамика» не уделяет большого внимания вопросам динамики механических систем.

Поэтому в предлагаемом учебном пособии авторами на основе опыта преподавания и с учетом требований практики изложены основные теоретические положения динамики применительно к техническим устройствам, представляющим механические системы.

На основе теоретических положений курса нами разработаны методические указания для выполнения практических и семинарских работ.

Отличительной особенностью пособия является то, что теоретические вопросы динамики механических систем изложены с применением метода сквозных задач, суть которого заключается в поиске логической взаимосвязи изучаемого теоретического материала с реальными инженерно-техническими решениями. Использование указанного метода показало успешное усвоение теоретического и практического материала магистрантами.

В приложении приведены плакаты, в которых кратко представлены материалы, изложенные в учебном пособии.

Пособие предназначено для магистрантов, обучающихся в рамках Республиканской программы Государственного инновационно-индустриального развития Казахстана (ГПИИР-2), и будет полезным для преподавателей технических дисциплин, докторантов, магистрантов и студентов инженерных специальностей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основной:

- 1 Куликов И.С., Маковкин Г.А. Динамика механических систем: Учебное пособие. – Н.Новгород: Нижегород. гос. архитектур. - строит. ун-т, 2011г. – 147 с.
- 2 Диевский В.А. Теоретическая механика: Учебное пособие. 2-е изд., испр. – СПб.: Изд-тво «Лань», 2012. – 320 с.
- 3 Куликов И.С., Трянина Н.Ю. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие / И.С. Куликов, Н.Ю. Трянина. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012. – 84с.
- 4 Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие / И.В. Мещерский. - М.: Наука, 1986. - 448 с.

Дополнительный:

- 5 Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, том III. Динамика. – М.: Высшая школа, 1985. – 495 с.
- 6 Сборник коротких задач по теоретической механике. Под редакцией О.Э. Кепе. М.: «Высшая школа», 1989. - 368с.
- 7 Сб. заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. А.А.Яблонского. - М.: Вышш. школа, 1985 - 367 с.
- 8 Электр. ресурс: <http://mathenglish.ru/mechanics/tmlect.htm>. Дата обращения 15.01.2016 (конспекты лекций)
- 9 Электр. ресурс: <https://www.youtube.com/watch?v=s9iM2fC40Wk> Дата обращения 15.01.2016 (видеофильм динамика)
- 10 Электр. ресурс: <file:///D:/15%2016%20уч%20год/Динамика%20.pdf> . Дата обращения 15.01.2016
- 11 Электр. ресурс: <http://termeh-sorokin.on.ufanet.ru/dinamika.htm> Дата обращения 15.01.2016 (плакаты)

ПРИЛОЖЕНИЯ

1Д

ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ОБОЗНАЧЕНИЯ

СИЛЫ

- \bar{F}_i (\bar{F}_i^a) - АКТИВНЫЕ (ЗНАЧИТ ЗАДАННЫЕ)
- \bar{F}_i^E - ВНЕШНИЕ (\bar{F}_i) - СИСТЕМА СИЛ
- \bar{F}_i^I - ВНУТРЕННИЕ ($\sum \bar{F}_i^I = 0$)
- \bar{R}_i - РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ
- $\bar{\Phi}_i$ - СИЛЫ ИНЕРЦИИ

$\bar{R}^F; \bar{R}^E; \bar{R}^I; \bar{R}^R; \bar{R}^\Phi$ - ГЛАВНЫЕ ВЕКТОРЫ
 $\bar{M}_0^F; \bar{M}_0^E; \bar{M}_0^I; \bar{M}_0^R; \bar{M}_0^\Phi$ - ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ

ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ СИЛ

m и $M = \sum m_i$ - МАССА МАТ. ТОЧКИ (М.Т.) И МЕХ. СИСТЕМЫ - (М.С.)

т. С - ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ (Ц.М.)

$\bar{r}_c = \frac{\sum m_i \cdot \bar{r}_i}{M}$ - РАДИУС-ВЕКТОР Ц.М. М.С.

I_x - МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ Oz

δr - ВОЗМОЖНОЕ (ВИРТУАЛЬНОЕ) ПЕРЕМЕЩЕНИЕ М.Т.

$m\dot{V}$ и \dot{Q} - КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ М.Т. И М.С.

$\frac{m \cdot V^2}{2}$ и T - КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ М.Т. И М.С.

$\bar{m}_0(m\dot{V})$ и K_0 - МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ
 (КИНЕТИЧ. МОМЕНТ) М.Т. И М.С. ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА O

K_z - КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ М.С. } относительно оси Oz
 $I_x \cdot \omega$ - КИН. МОМЕНТ ТВЕРДОГО ТЕЛА }

МЕРЫ
ДЕЙСТВИЯ
СИЛЫ

$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} \cdot dt$ - ИМПУЛЬС СИЛЫ

$A = \int_M \bar{F} \cdot d\bar{r}$ - РАБОТА СИЛЫ

$\bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$ - МОМЕНТ СИЛЫ

$q_j; \dot{q}_j; Q_j$ - ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ, СКОРОСТИ И СИЛЫ

s - ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МЕХ. СИСТЕМЫ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕОРЕМЫ И ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Г. ГАЛИЛЕЙ

И. НЬЮТОН

1. ЗАКОН ИНЕРЦИИ

2. $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ - ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ

В инерциальной
системе отсчета

3. ЗАКОН РАВЕНСТВА ДЕЙСТВИЯ И ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

4. ЗАКОН НЕЗАВИСИМОСТИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c$$

В неинерциальной
системе отсчета

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ М.Т. И М.С.

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \nabla) = F ; \quad d\left(\frac{m \cdot V^2}{2}\right) = \delta A ; \quad \frac{d}{dt}[\bar{m}_0(m \nabla)] = \bar{m}_0(F)$$

$$M \cdot \bar{a}_c = \bar{R}^E ; \quad \frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^E ; \quad \frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0^E ; \quad \frac{d\bar{K}_c}{dt} = \bar{M}_c^E$$

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^E + \sum A_i^I$$

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ - СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМ

1. ЕСЛИ $\bar{R}^E = 0$ ($\sum X_i^E = 0$), ТО ∇_c (V_{Gx}) = const

2. ЕСЛИ $\bar{R}^E = 0$ ($\sum X_i^E = 0$), ТО \bar{Q} (Q_x) = const

3. ЕСЛИ $\bar{M}_0^E = 0$ ($\sum m_s(F_s^E) = 0$), ТО \bar{K}_0 (K_x) = const

$\bar{M}_c^E = 0$ ($\sum m_{cs}(F_s^E) = 0$), ТО \bar{K}_c (K_{cx}) = const

4. ЕСЛИ М.С. движется под действием только потенциальных сил, то

$$T + \Pi = \text{const}$$

ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ -

ЭТО ДРУГИЕ ВОЗМОЖНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАПИСИ ОБЩИХ ТЕОРЕМ
И НОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

$$(\bar{F}_i; \bar{R}_i; \bar{\Phi}_i) = 0$$

ПРИНЦИП
ДАЛАМБЕРА

$$\sum \delta A_i + \sum \delta A_i^* = 0$$

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ
ДИНАМИКИ

$$\sum \delta A_i = 0$$

ПРИНЦИП
ВОЗМОЖНЫХ
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

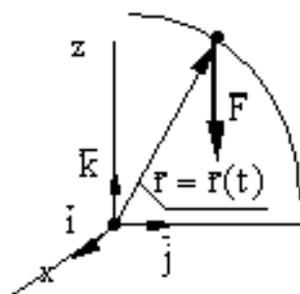
+ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА 2^{го} РОДА

3Д

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

$m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ - Основной закон динамики

Диф. уравнения движения м.т.



а) $m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}_i$ в векторной форме

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= \sum X_i \\ m \cdot \ddot{y} &= \sum Y_i \\ m \cdot \ddot{z} &= \sum Z_i \end{aligned}$$

б) в декартовой системе координат

в) в естественных осях координат

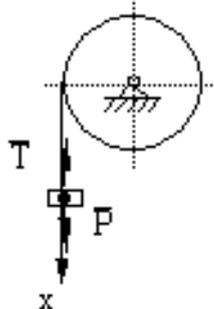
$$\begin{aligned} m \cdot \frac{dV}{dt} &= \sum F_{\tau} \\ m \cdot \frac{V^2}{\rho} &= \sum F_n \\ 0 &= \sum F_b \end{aligned}$$

Тип задачи	Дано:	Требуется найти:
1-я задача	$m; \vec{r} = \vec{r}(t)$	\bar{F} или $F(V, x, t)$ и т.д.
2-я задача	$m; F = F(x, V, t)$ + Н.У. - $V_0; x_0$	$V(t) : V(x); x(t)$ возможны разные варианты

Первая задача динамики

Дано: а) $P; x = at^2/2$

Найти: T



1) Спуск

$$m \cdot \ddot{x} = P - T$$

$$T = P - m \cdot a = m \cdot (g - a)$$

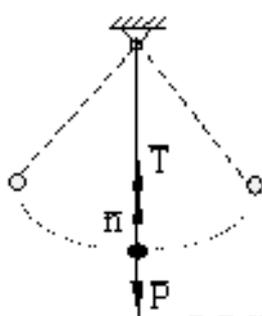
2) Подъем

$$m \cdot \ddot{x} = T - P$$

$$T = P + m \cdot a = m \cdot (g + a)$$

б) $P; V; L$

Найти: T



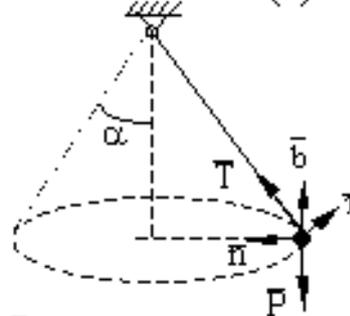
РЕШЕНИЕ

$$m \cdot \frac{V^2}{\rho} = T - P$$

$$T = m \left(g + \frac{V^2}{L} \right)$$

в) $P; L; V = \text{const}$

Найти: T и $\alpha = f(V)$



$$m \cdot \frac{V^2}{\rho} = T \cdot \sin \alpha$$

$$0 = T \cdot \cos \alpha - P$$

Первую задачу динамики удобно решать также с помощью

ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0$$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ 2-Й ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ (Прямолинейное движение)

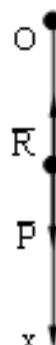
1. Чертеж, оси, силы

2. Запись диф. уравнения и нач. условий

3. Понижение порядка диф. уравнения и представление его в виде:

а) $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m} \cdot F(t, V)$, если $F = F(t, V$ или **const**)

б) $\frac{VdV}{dx} = \frac{1}{m} \cdot F(x, V)$, если $F = F(x, V$ или **const**)



$$\overline{R} = -k\overline{V}$$

при $t = 0$

Н. у. $\overline{x} = x_0$
 $\overline{\dot{x}} = V_0$

$$m \cdot \overline{\dot{x}} = P - k\overline{V}$$

$$\frac{dV}{dt} = g - \frac{k}{m} V$$

4. Разделение переменных в диф. уравнении, его интегрирование и определение $V = V(t)$ или $V = V(x)$ в зависимости от сил и условий задачи

В А Р И А Н Т Ы	$F = F(t)$	$\int_V^V dV = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) \cdot dt$	\longrightarrow	$V = V(t, V_0)$
--------------------------------------	------------	--	-------------------	-----------------

	$F = F(x)$	$\int_V^V V dV = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x F(x) \cdot dx$	\longrightarrow	$V = V(x, x_0, V_0)$
--	------------	--	-------------------	----------------------

	$F = F(V)$	$\int_V^V \frac{dV}{F(V)} = \frac{1}{m} \int_0^t dt$	\longrightarrow	$V = V(t, V_0)$
--	------------	--	-------------------	-----------------

	или $F = \text{const}$	$\int_V^V \frac{V dV}{F(V)} = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x dx$	\longrightarrow	$V = V(x, x_0, V_0)$
--	---------------------------	--	-------------------	----------------------

5. Определение $x = x(t, x_0, V_0)$ после второго разделения переменных и интегрирования

$\frac{dx}{dt} = V(t, V_0)$	$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t V(t, V_0) dt$	\longrightarrow	$x = x(t, x_0, V_0)$
-----------------------------	---	-------------------	----------------------

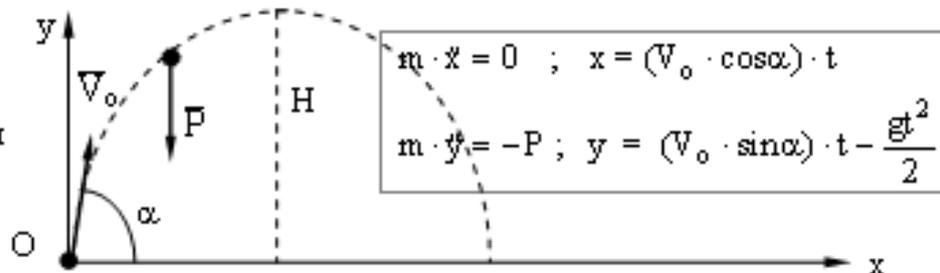
$\frac{dx}{dt} = V(x, x_0, V_0)$	$\int_{x_0}^x \frac{dx}{V(x, x_0, V_0)} = \int_0^t dt$	\longrightarrow	$x = x(t, x_0, V_0)$
----------------------------------	--	-------------------	----------------------

6. Проверка решения по соответствию начальным условиям и размерности полученного результата

ЗАДАЧИ И ЭЛЕМЕНТЫ ИХ РЕШЕНИЯ, КОТОРЫЕ ЖЕЛАТЕЛЬНО ЗНАТЬ

1. ДВИЖЕНИЕ М.Т. ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ПРИ ОТСУТСТВИИ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

Дано:
 V_0 , α -
нач. условия
движения



$$H_{\max} = \frac{V_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} \quad ; \quad L = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \quad ; \quad T_H = \frac{V_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

2. ПАДЕНИЕ М.Т. ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

Дано: P ; $\bar{R} = -k\bar{V}$; k ; $x_0 = 0$; $z_0 = 0$



$$1. \quad m \cdot \ddot{x} = P - k \cdot V \quad ; \quad 2. \quad \ddot{x} = g - \alpha V \quad (k/m = \alpha)$$

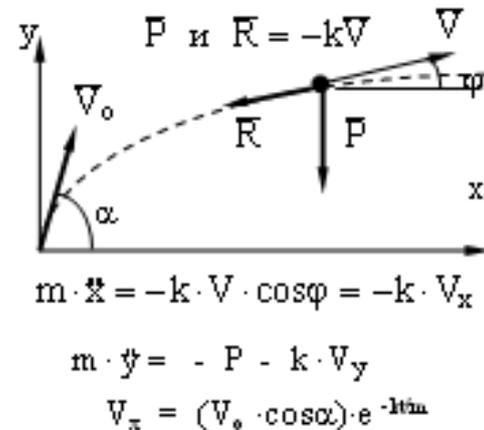
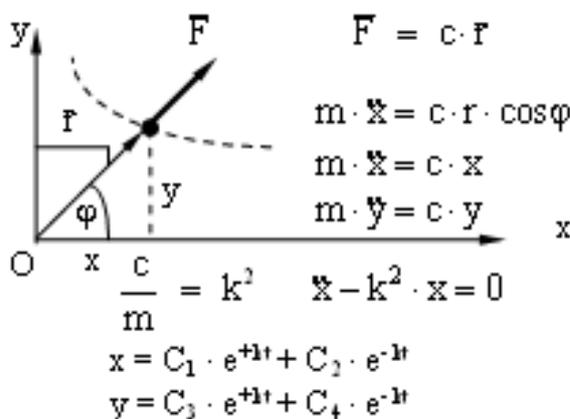
$$3. \quad \frac{dV}{dt} = g - \alpha V \quad ; \quad 4. \quad \int_0^V \frac{dV}{g - \alpha V} = \int_0^t dt$$

$$5. \quad -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{g - \alpha V}{g} = t \quad ; \quad \frac{g - \alpha V}{g} = e^{-\alpha t}$$

$$V = \frac{g}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad ; \quad \text{При } t \rightarrow \infty \quad V \rightarrow V_{\max} \quad ; \quad V_{\max} = \frac{g}{\alpha}$$

$$\text{При } V = V_{\max} \quad P - kV_{\max} = 0$$

3. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ М.Т. ПРИ ДЕЙСТВИИ СИЛ



бд

КОЛЕБАНИЯ М. Т.

а) СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

$$m \cdot \ddot{x} = P - c \cdot (x + \Delta_{ст}) = P - c \cdot x - c \cdot \Delta_{ст} = -c \cdot x$$

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0$$

диф. уравнение свободных гармонических колебаний

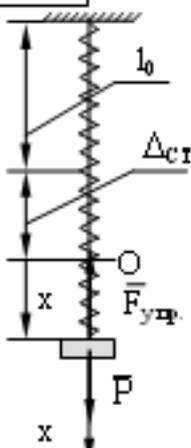
$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$$

$$\text{или } x = a \cdot \sin(kt + \alpha)$$

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}; \quad \text{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0 \cdot k}{\dot{x}_0}$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ: k - круговая частота; T - период; $(kt + \alpha)$ - фаза; α - нач. фаза; a - амплитуда колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{P}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{c \cdot g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta_{ст} \pi}{g}}$$



б) КОЛЕБАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

(кроме восстанавливающей действует сила $\bar{R} = -\mu \bar{V}$)

$$m \cdot \ddot{x} = P - c(x + \Delta_{ст}) - \mu \dot{x} = -cx - \mu \dot{x} \quad (c/m = k^2; \mu/m = 2n)$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$$

Диф. уравнение колебаний м.т. при вязком сопротивлении среды

$r^2 + 2nr + k^2 = 0$ - характеристическое уравнение

$$n > k$$

$$x = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t}$$

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$$

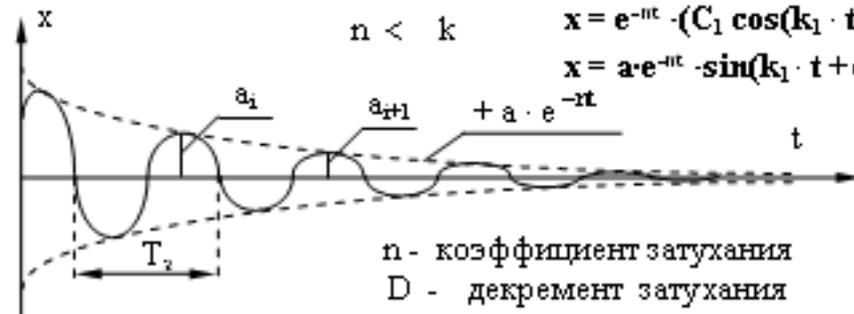
$$n = k$$

$$x = e^{-nt} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t)$$

$$n < k$$

$$x = e^{-nt} \cdot (C_1 \cos(k_1 \cdot t) + C_2 \sin(k_1 \cdot t)),$$

$$x = a \cdot e^{-nt} \cdot \sin(k_1 \cdot t + \alpha)$$



$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$$

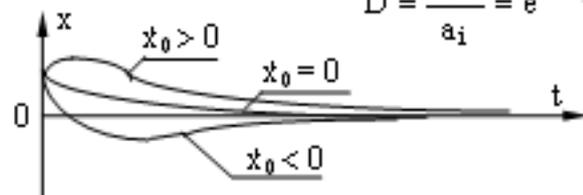
$$T_{зм} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

n - коэффициент затухания

D - декремент затухания

$$D = \frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-nT}$$

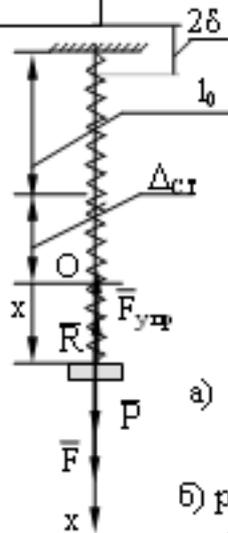
При $n \geq k$ движение апериодическое !



При решении задач на колебания начало оси следует выбирать в положении статического равновесия !

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1. Без сопротивления среды

 $F = H_0 \sin(pt)$ - возмущающая сила

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x + H_0 \sin(pt) \quad c/m = k^2; \quad H_0/m = h$$

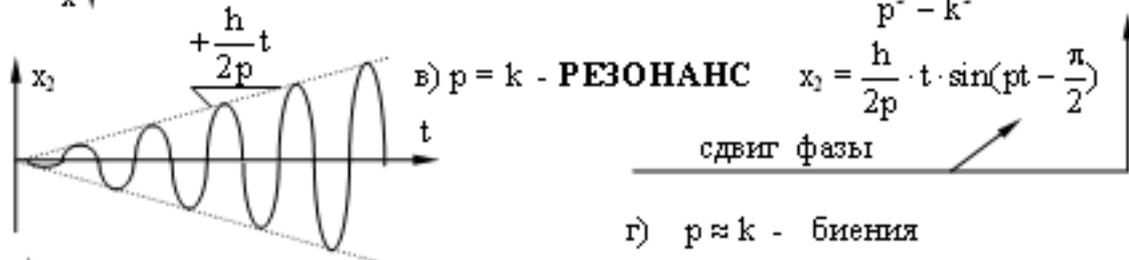
$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = h \cdot \sin(pt) \quad \text{Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний}$$

$$x = x_1 + x_2, \text{ где } x_1 = C_1 \cdot \cos(kt) + C_2 \cdot \sin(kt) = a \cdot \sin(kt + \alpha)$$

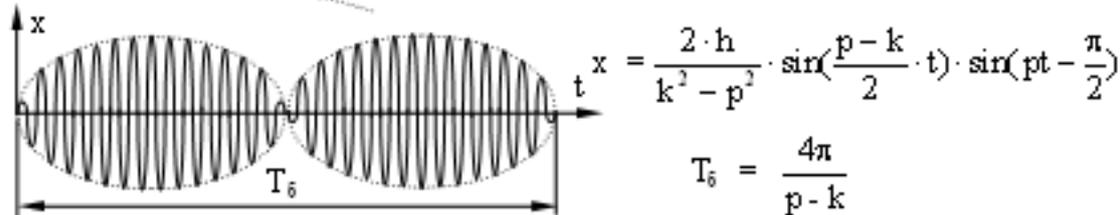
$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin(pt).$$

а) $p < k$ - вын. кол. малой частоты $x = x_1 + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin(pt)$

б) $p > k$ - вын. кол. большой частоты $x = x_1 + \frac{h}{p^2 - k^2} \cdot \sin(pt - \pi)$



г) $p \approx k$ - биения



2. При сопротивлении среды

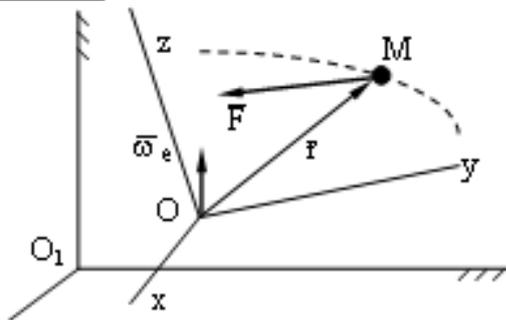
$$\ddot{x} + 2 \cdot n \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = h \cdot \sin(pt)$$

$$x_1 \rightarrow 0 \quad x = x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt - \beta); \quad \text{tg} \beta = \frac{2np}{k^2 - p^2}$$



8Д

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ



$$m \cdot \bar{a}_a = \Sigma \bar{F}_i; \quad \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c$$

$$m \cdot \bar{a}_a = m \cdot \bar{a}_r + m \cdot \bar{a}_e + m \cdot \bar{a}_c = \Sigma \bar{F}_i$$

$$m \cdot \bar{a}_r = \Sigma \bar{F}_i - m \cdot \bar{a}_e - m \cdot \bar{a}_c$$

$$m \cdot \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \Sigma \bar{F}_i + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c$$

дифференциальное уравнение относительного движения

$$(\bar{\Phi}_e = -m \cdot \bar{a}_e; \quad \bar{\Phi}_c = -m \cdot \bar{a}_c = -m \cdot 2 \cdot \bar{\omega}_e \times \bar{V}_r)$$

 $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_c$ - переносная и кориолисова силы инерции

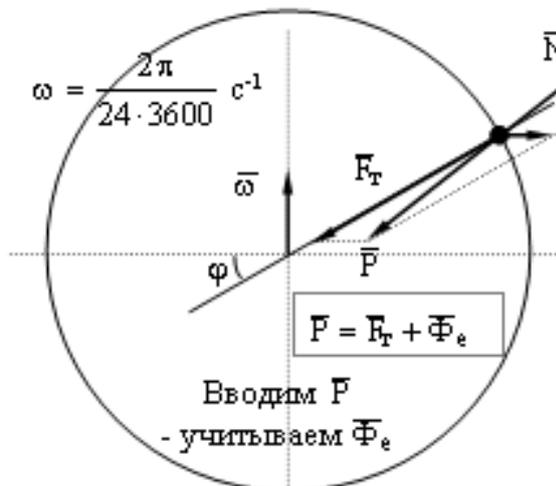
Частные случаи:

$$1. \text{ При } \omega_e = 0 \quad \Phi_c = 0 \quad m \cdot \bar{a}_r = \Sigma \bar{F}_i + \bar{\Phi}_e$$

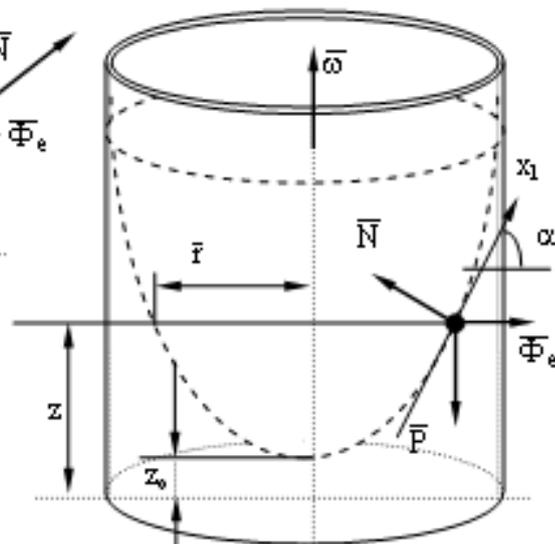
$$2. \text{ При } \bar{V}_e = \text{const} \quad m \cdot \bar{a}_r = \Sigma \bar{F}_i$$

Принцип относительности
Условие инерциальностиУСЛОВИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО
ПОКОЯ

$$\Sigma \bar{F}_i + \bar{\Phi}_e = 0$$

Вводим \bar{F}
- учитываем $\bar{\Phi}_e$

$$\Phi_e = m \cdot \omega^2 \cdot \rho = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \cos \varphi$$



$$\Sigma X_H = \Phi_e \cdot \cos \alpha - P \cdot \sin \alpha = 0$$

$$z = f(\omega, r); \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 \cdot r}{g}$$

$$z - z_0 = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g}$$

Из-за вращения ЗемлиРазмыв берегов рек, отклонение
падающих тел, изменение
направлений движения
воздушных масс, течений, ракет.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ М.Т.

Меры движения $m\vec{V}$; $\frac{mV^2}{2}$; $\vec{m}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}$

Меры действия силы \vec{S} ; A ; $\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$

$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt$; $\vec{S} = \int_0^t \vec{F} \cdot dt$ - импульс силы

$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$; $A = \sum_M \delta A = \int_M \vec{F} \cdot d\vec{r}$ - работа силы

$\delta A = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz$; $\delta A = F \cdot dS \cdot \cos(\vec{F}, \vec{V}) = F_\tau \cdot dS$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ М.Т.

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{V}) = \vec{F}$$

$$d(m\vec{V}) = \vec{F} \cdot dt ; \quad \int_{V_1}^{V_2} d(m\vec{V}) = \int_0^t \vec{F} \cdot dt$$

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{V}) = \vec{F}$$

$$m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1 = \vec{S}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ М.Т.

$$m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \cdot \vec{V} \cdot d\vec{V} = d\left(m \cdot \frac{V^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

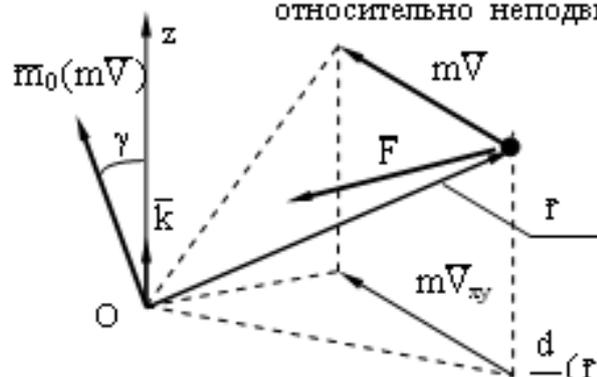
$$\int_{V_1}^{V_2} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \int_M \delta A$$

$$d\left(m \cdot \frac{V^2}{2}\right) = \delta A$$

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ВЕКТОРА-МОМЕНТА $m \cdot \vec{V}$

относительно неподвижного центра O



$$\vec{m}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V} =$$

$$= m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow m_x(m\vec{V}) \\ \rightarrow m_y(m\vec{V}) \\ \rightarrow m_z(m\vec{V}) \end{matrix}$$

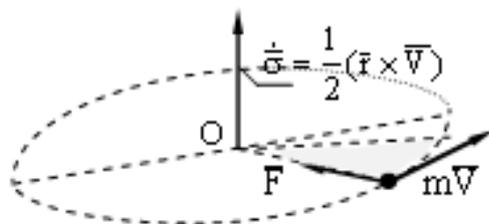
$$m_x(m\vec{V}) = m_0(m\vec{V}) \cdot \cos \gamma$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{V})$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{m}_0(m\vec{V})] = \vec{m}_0(\vec{F})$$

Если $\vec{m}_0(\vec{F}) = 0$,

то секторная скорость м.т. постоянна!



$$M = \sum m_i ; \quad \bar{r}_c = \frac{\sum m_i \cdot \bar{r}_i}{M} \longrightarrow \begin{cases} M \cdot \bar{r}_c = \sum m_i \cdot \bar{r}_i \\ M \cdot \bar{v}_c = \sum m_i \cdot \bar{v}_i \\ M \cdot \bar{a}_c = \sum m_i \cdot \bar{a}_i \end{cases}$$

Внешние \bar{F}_i^E и внутренние \bar{F}_i^I силы

$$\sum \bar{F}_i^I = 0 \quad ; \quad \sum \bar{m}_o(\bar{F}_i^I) = 0$$

1. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

$$\sum m_i \bar{a}_i = \sum F_i^E + \sum F_i^I$$

$$M \cdot \bar{a}_c = \bar{R}^E$$

2. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ М.С.

$$\bar{Q} = \sum m_i \cdot \bar{v}_i = M \cdot \bar{v}_c$$

$$\sum \frac{d}{dt} (m_i \cdot \bar{v}_i) = \sum F_i^E + \sum F_i^I$$

$$\int_{\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_2} d\bar{Q} = \int_0^t \sum F_i^E \cdot dt$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^E$$

$$\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \sum \bar{S}_i^E$$

3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА М.С.

(момента количества движения М.С.) относительно неподвижного центра

$$K_0 = \sum \bar{m}_o(m_i \cdot \bar{v}_i) = \sum (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i)$$

$$\sum \frac{d}{dt} [\bar{m}_o(m_i \cdot \bar{v}_i)] = \sum \bar{m}_o(\bar{R}_i^E) + \sum \bar{m}_o(\bar{F}_i^I)$$



$$K_z = \omega \cdot I_z$$

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0^E ; \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_{xz}(\bar{R}_i^E)$$

и относительно движущегося центра масс механической системы

$$\frac{d\bar{K}_c}{dt} = \bar{M}_c^E ; \quad \frac{dK_{cz}}{dt} = \sum m_{cz}(\bar{R}_i^E)$$

4. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ М.С.

$$d\left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \sum \delta A_i^E + \sum \delta A_i^I$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_i^E + \sum N_i^I$$

$$\sum \frac{m_i v_{2i}^2}{2} - \sum \frac{m_i v_{1i}^2}{2} = \sum A_i^E + \sum A_i^I$$

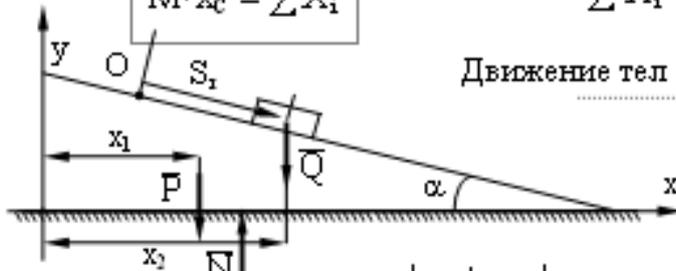
$$T_2 - T_1 = \sum A_i^E + \sum A_i^I$$

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

1. Закон сохранения движения центра масс М.С.

$$\begin{aligned} M \cdot \bar{a}_c &= \bar{R}^E \\ M \cdot \bar{v}_c &= \sum X_i^E \end{aligned}$$

ЕСЛИ $\bar{R}^E = 0$, ТО $\bar{v}_c = \text{const}$
 $\sum X_i^E = 0$, ТО $v_{cx} = \text{const}$



Движение тел по поверхности, торможение

При $F_{тр} = 0$ $\sum X_i = 0$;
 при $v_{c0} = 0$ $x_c = \text{const}$
 $\sum m_i \cdot \Delta x_i = 0$

$$m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot (\Delta x_1 + S_{тр}) = 0$$

$$\Delta x_1 = - \frac{Q \cdot S_r \cdot \cos \alpha}{P + Q} ; \quad v_1 = - \frac{Q \cdot \dot{S}_r \cdot \cos \alpha}{P + Q} ; \quad a_1 = - \frac{Q \cdot \ddot{S}_r \cdot \cos \alpha}{P + Q}$$

2. Закон сохранения количества движения М.С.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{dt} &= \bar{R}^E \\ \frac{dQ_x}{dt} &= \sum X_i^E \end{aligned}$$

ЕСЛИ $\bar{R}^E = 0$, ТО $\bar{Q} = \text{const}$
 $\sum X_i^E = 0$, ТО $Q_x = \text{const}$

Движение кораблей, самолетов, ракет

3. Закон сохранения момента количества движения М.С. относительно центра O и оси (или относительно Ц.М. - т. С)

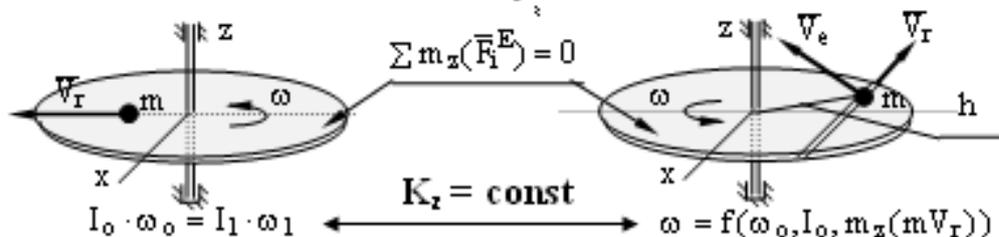
$$\begin{aligned} \frac{d\bar{K}_0}{dt} &= \bar{M}_0^E \\ \frac{dK_z}{dt} &= \sum m_x(\bar{F}_i^E) \end{aligned}$$

ЕСЛИ $\bar{M}_0^E = 0$, ТО $K_0 = \text{const}$
 $\sum m_x(\bar{F}_i^E) = 0$, ТО $K_z = \text{const}$

балет, акробатика, скамья Н.Е. Жуковского.

движение планет, спутников Земли, волчков и гироскопов.

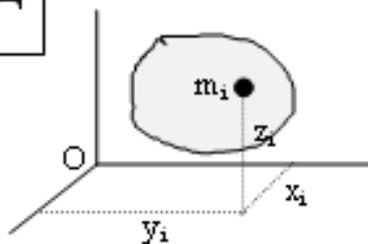
$$K_z = \sum h_i \cdot (m_i \cdot v_{iy}) = \sum h_i^2 \cdot m_i \cdot \omega = I_z \cdot \omega$$



4. Закон сохранения механической энергии

Если $T_2 - T_1 = \Pi_1 - \Pi_2$, то $T + \Pi = \text{const}$

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТЕЛ



$$I_x = \sum m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) \quad I_s = \sum m_i \cdot h_i^2$$

$$I_y = \sum m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) \quad \text{осевые}$$

$$I_z = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) \quad I_s = \int dm \cdot h^2$$

$$I_p = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \text{ - полярный}$$

$$I_{xOy} = \sum m_i \cdot z_i^2, \dots$$

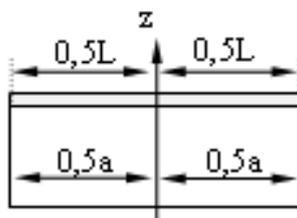
$$I_{xy} = \sum m_i \cdot x_i \cdot y_i, \dots$$

экваториальные и центробежные

$$I_p = I_{xOy} + I_{zOy} + I_{zOx} = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$$

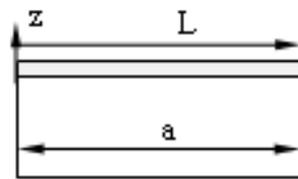
Теорема Гюйгенса - Штейнера $I_{z1} = I_{zC} + M \cdot d^2$

СТЕРЖЕНЬ (ПЛАСТИНА)



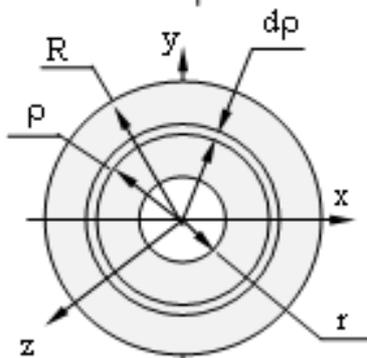
$$I_s = \frac{M \cdot L^2}{12}$$

$$I_s = \frac{M \cdot a^2}{12}$$



$$I_s = \frac{M \cdot L^2}{3}$$

$$I_s = \frac{M \cdot a^2}{3}$$

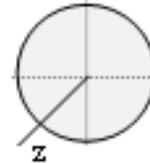


$$I_x = \frac{M}{A} \cdot \int_0^R (2\pi r dr) r^2$$

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

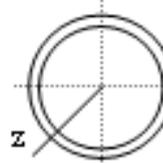
$$I_s = \frac{M}{2}(R^2 + r^2)$$

$$I_x = I_y = 0,5 I_s$$



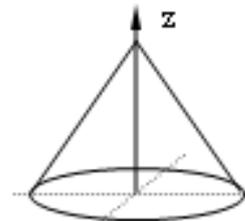
ДИСК

$$I_s = \frac{M \cdot R^2}{2}$$

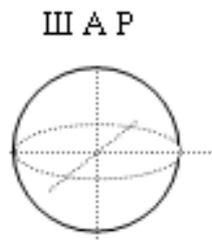


ОБОД

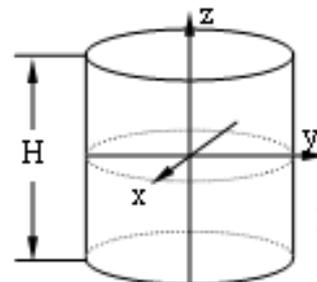
$$I_s = M \cdot R^2$$

К
О
Н
У
С

$$I_s = 0,3 \cdot M \cdot R^2$$

Ш
А
Р

$$I_s = I_x = I_y = 0,4 \cdot M \cdot R^2$$



ЦИЛИНДР

$$I_s = \frac{M \cdot R^2}{2}$$

$$I_x = I_y = M \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right)$$

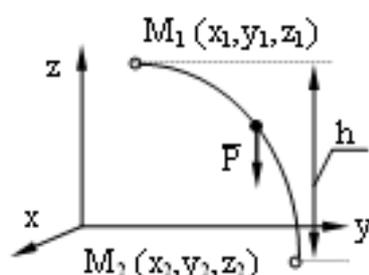
Для тел сложной формы $I_s = M \cdot i_s^2$ ($= M \cdot \rho_s^2$), $i(\rho)$ - радиус инерции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТЫ СИЛЫ

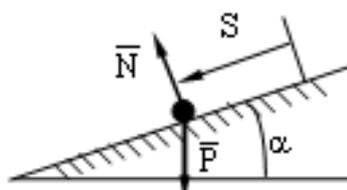
$$\begin{aligned}\delta A &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot ds \cdot \cos(\vec{F}, \vec{V}) = \\ &= F_{\tau} \cdot ds = X dx + Y dy + Z dz\end{aligned}$$

ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ - $A = \Pi_1 - \Pi_2$

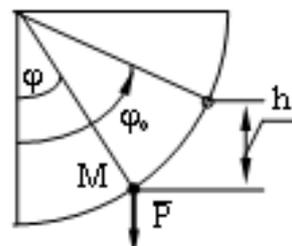
1. РАБОТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ



$$A = \pm P \cdot h$$

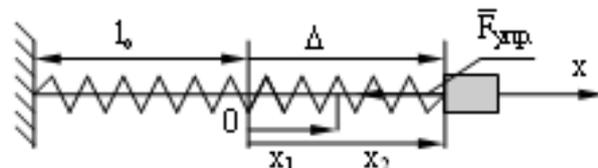


$$A = P \cdot S \cdot \sin \alpha$$



$$A = PR(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

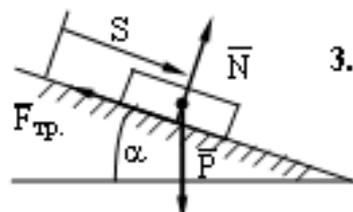
2. РАБОТА СИЛЫ УПРУГОСТИ



$$F_{\text{упр}} = c \cdot \Delta$$

$$A = \pm \frac{c \cdot x^2}{2}$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} -c \cdot x \cdot dx = -\frac{c}{2} \cdot (x_2^2 - x_1^2)$$

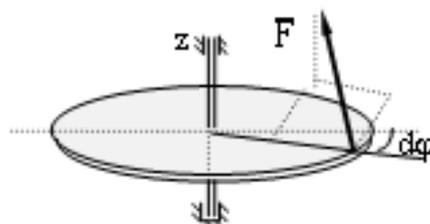
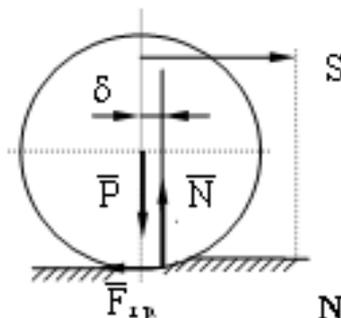


3. РАБОТА СИЛЫ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

$$A = -F_{\text{тр}} \cdot S = -f \cdot N \cdot S$$

4. РАБОТА СИЛЫ, ПРИЛОЖЕННОЙ К ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ТЕЛУ

$$\delta A = F_{\tau} \cdot h \cdot d\varphi = m_z(\vec{F}) \cdot d\varphi$$



$$A = \int_0^{\varphi} m_z(\vec{F}) \cdot d\varphi$$

5. РАБОТА МОМЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ КАЧЕНИЮ

$$A = -M_{\text{сопр}} \cdot \varphi = -\delta \cdot N \cdot \varphi = -\delta \cdot N \cdot \frac{S}{R}$$

N - МОЩНОСТЬ СИЛЫ ДЖ/СЕК = ВТ

$N = \vec{F} \cdot \vec{V}$ - при движении тела под действием силы

$N = m_z(\vec{F}) \cdot \omega$ - при вращении тела под действием силы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТЕЛ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot V_i^2 ; \quad (V_i = V_{ia} !!!).$$

ТЕОРЕМА КЕНИГА - $T = \frac{1}{2} M \cdot V_c^2 + T$, где $T = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot V_{iP}^2$,

V_c - СКОРОСТЬ ЦЕНТРА МАСС МЕХ. СИСТЕМЫ (ТЕЛА).

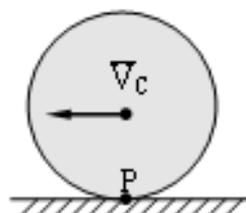
ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ - $T = \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_c^2$

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ВРАЩАТЕЛЬНОЕ - $T = \frac{1}{2} \cdot I_x \cdot \omega^2$

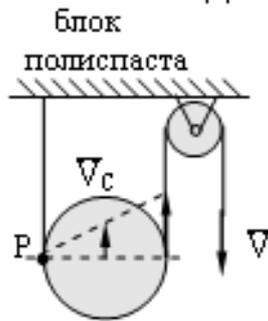
ПЛОСКОЕ - $T = \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_c^2 + \frac{1}{2} \cdot I_x \cdot \omega^2$

ИЛИ $T = \frac{1}{2} \cdot I_{\Phi} \cdot \omega^2$, ГДЕ $I_{\Phi} = I_{xc} + M \cdot CP^2$

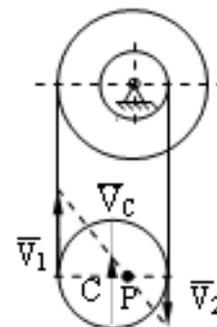
ТИПОВЫЕ СЛУЧАИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ T , V_i и ω_i
 качение катка без скольжения блок полиспаста дифференциальный блок



$$T = \frac{3}{4} \cdot M \cdot V_c^2$$



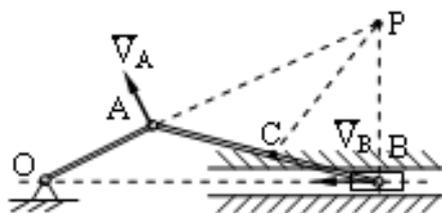
$$V_c = \frac{V}{2} ; \quad \omega = \frac{V}{2R}$$



$$V_c = \frac{V_1 - V_2}{2}$$

$$\omega = \frac{V_1 + V_2}{2R}$$

кривошипно-шатунный механизм



ОПРЕДЕЛЯТЬ T МЕХАНИЗМА ЖЕЛАТЕЛЬНО ТАК

$$T = \frac{1}{2} I_{OA} \cdot \omega_O^2 + \frac{1}{2} I_{\Phi} \cdot \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} M_B \cdot V_B^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{OA} \cdot r^2}{3} \cdot \omega_O^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{M_{AB} \cdot l^2}{12} + M_{AB} \cdot CP^2 \right) \cdot \frac{\omega_O^2 \cdot r^2}{AP^2} + \frac{1}{2} \cdot M_B \cdot \frac{\omega_O^2 \cdot r^2 \cdot BP^2}{AP^2} = \frac{1}{2} \cdot K_T \cdot \omega_O^2$$

Вид движения тела	Уравнения движения	Общие теоремы динамики	Дифференциальные уравнения движения
Поступательное	$x_c = x_c(t)$	$M \cdot \bar{a}_c = \sum \bar{F}_i^E$	$M \cdot \dot{x}_c = \sum X_i^E$
Вращательное	$\varphi = \varphi(t)$	$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_x(\bar{F}_i^E)$	$I_s \cdot \dot{\varphi} = \sum m_x(\bar{F}_i^E)$
Плоское	$x_c = x_c(t)$ $y_c = y_c(t)$ $\varphi = \varphi(t)$	$M \cdot \bar{a}_c = \sum \bar{F}_i^E$ $\frac{dK_{Cz}}{dt} = \sum m_{Cz}(\bar{F}_i^E)$	$M \cdot \dot{x}_c = \sum X_i^E$ $M \cdot \dot{y}_c = \sum Y_i^E$ $I_{Cz} \cdot \dot{\varphi} = \sum m_{Cz}(\bar{F}_i^E)$

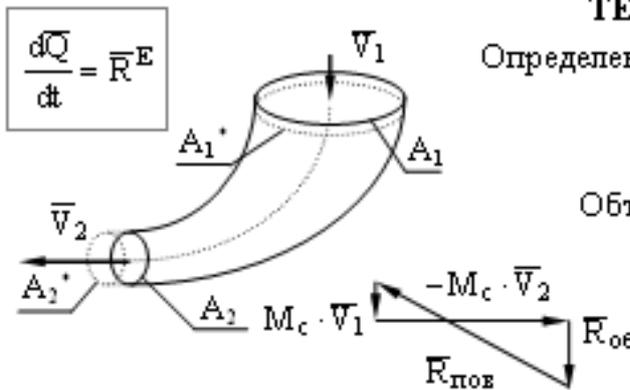
ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

Определение сил давления жидкости на
стенки трубопровода

$$M_c = \rho S_1 V_1 = \rho S_2 V_2$$

Объемные и поверхностные силы

$$M_c \cdot V_1 - M_c \cdot V_2 + R_{об} + R_{п} = 0$$



(ГИДРАВЛИКА)

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^E$$

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const}$$

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ
для идеальной жидкости

Движение мат. точки переменной массы $M = M(t)$

$$\frac{dQ}{dt} = \bar{R}^E$$



$$U - V = U_r$$

$$M \frac{dV}{dt} = \bar{F} + \bar{\Phi} \quad \text{- уравнение И.В. Мещерского}$$

$$\bar{\Phi} = -\bar{U}_r \cdot \frac{dm}{dt} \quad \text{- реактивная сила}$$

$$V_{max} = V_0 + U_r \cdot \ln\left(1 + \frac{M_T}{M_K}\right) \quad \text{- формула К.Э. Циолковского}$$

У
Д
А
Р
Ы

$$\frac{dQ}{dt} = \bar{R}^E$$

абс. упругие ($k=1$)
упругие ($0 < k < 1$)
абс. неупругие ($k=0$)
центральные
прямые и косые

$m(\bar{U} - \bar{V}) = \bar{S}$ Основные уравнения

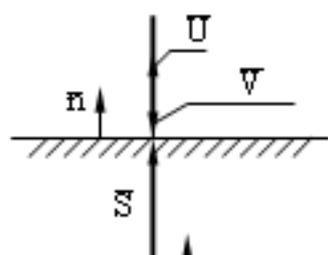
$$\bar{U} - \bar{V} = \frac{\bar{S}}{m}$$

УДАРА

$\bar{U} - \bar{V}$ - "потерянная скорость"

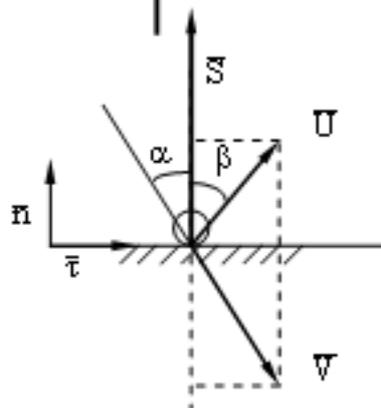
k - коэффициент восстановления
при ударе

Две фазы удара $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$



$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{mU}{mV} = k \quad k = \frac{U}{V} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

$$|\bar{U} - \bar{V}| = \frac{S}{m} = V \cdot (1+k)$$



Косой удар о гладкую поверхность

$$|\bar{U} - \bar{V}| = \frac{S}{m} = V \cdot (1+k) \cdot \cos\alpha;$$

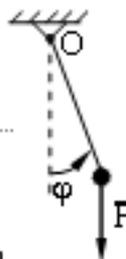
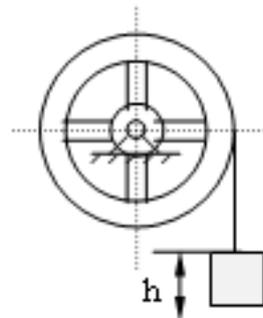
$$\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha \quad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{U_\tau \cdot V_n}{U_n \cdot V_\tau} = \frac{V_n}{U_n} = \frac{1}{k}$$

$$\Delta T = \frac{m \cdot |\bar{U} - \bar{V}|^2}{2} \cdot \frac{1-k^2}{(1+k)^2} = \frac{m \cdot |\bar{U} - \bar{V}|^2}{2} \cdot \frac{1-k}{1+k}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |\bar{U} - \bar{V}|^2 \quad \text{ТЕОРЕМА КАРНО}$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_x (\bar{F}_i^E)$$

Математический и физический маятники
малые колебания ($\sin\varphi \approx \varphi$)



$$I \cdot \ddot{\varphi} = -P \cdot l \cdot \sin\varphi$$

$$k^2 = \frac{m \cdot g \cdot l}{m \cdot l^2} = \frac{g}{l}$$

$$\ddot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$



$$I_x \cdot \ddot{\varphi} = -P \cdot OC \cdot \sin\varphi$$

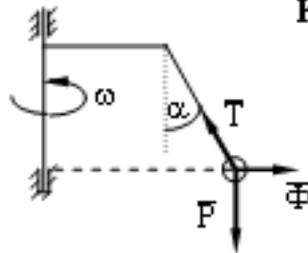
$$k^2 = \frac{P \cdot OC}{I_x}$$

$$\ddot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_x}{P \cdot OC}}$$

Опытное определение моментов инерции тел

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА КИНЕТОСТАТИКА



а) ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Из $m \cdot \ddot{a} = F + R$ при $-m \cdot \ddot{a} = \Phi$

получаем $F + R + \Phi = 0$

$\Phi = -m \cdot \ddot{a}$ - даламберова сила инерции.

б) ДЛЯ НЕСВОБОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Все силы делятся на активные (заданные) - F_i и реакции связей - R_i

При добавлении сил инерции получаем:

$$\sum (F_i + R_i + \Phi_i) = 0; \quad \sum \bar{F}_i + \sum \bar{R}_i + \sum \bar{\Phi}_i = 0.$$

$$\sum r_i \times (F_i + R_i + \Phi_i) = 0; \quad \sum m_c(F_i) + \sum m_c(R_i) + \sum m_c(\Phi_i) = 0$$

$$\bar{R}^F + \bar{R}^R + \bar{R}^\Phi = 0; \quad \bar{M}_0^F + \bar{M}_0^R + \bar{M}_0^\Phi = 0$$

в) При делении сил на внешние и внутренние получаем

$$\sum (\bar{F}_i^E + \bar{F}_i^I + \bar{\Phi}_i) = 0; \quad \sum F_i^E + \sum F_i^I + \sum \Phi_i = 0.$$

$$\sum r_i \times (\bar{F}_i^E + \bar{F}_i^I + \bar{\Phi}_i) = 0; \quad \sum m_c(F_i^E) + \sum m_c(F_i^I) + \sum m_c(\Phi_i) = 0$$

$$\bar{R}^E + \bar{R}^\Phi = 0; \quad M \cdot \ddot{a}_c = R^E; \quad \bar{R}^\Phi = -M \cdot \ddot{a}_c$$

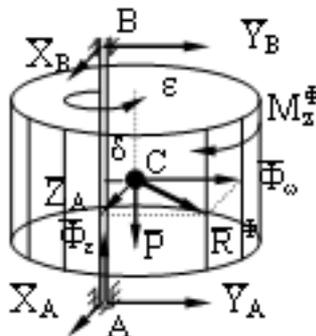
$$\bar{M}_0^E + \bar{M}_0^\Phi = 0; \quad \frac{dK_c}{dt} = M_c^E; \quad \bar{M}_c^\Phi = -\frac{dK_c}{dt}$$

записанные иначе две общих теоремы динамики и формулы

для определения \bar{R}^Φ и \bar{M}_c^Φ ; $(M_c^\Phi = -\frac{dK_c}{dt} = -I_{sc} \cdot \varepsilon)$

**При приведении сил инерции к центру С
(для твердых тел это обычно центр масс тела)**

$$(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n) \sim (\bar{R}^\Phi, \bar{M}_c^\Phi).$$



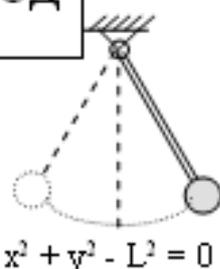
Из уравнений равновесия определяются реакции внешних, а при расчленении и внутренних связей системы тел в любой заданный момент ее движения.

Динамические реакции опор валов вращающихся тел минимальны, если центральная ось инерции совпадает с осью вращения тела.

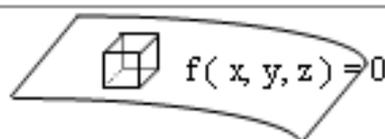
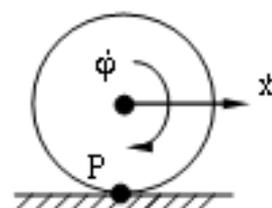
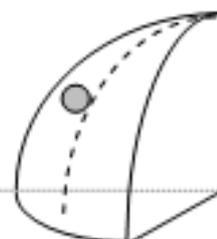
Нужна статическая или динамическая балансировка

18Д

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ Ж. Л. ЛАГРАНЖ



Связи - это условия, которые накладываются на и которые можно описать уравнениями



$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geq 0$$

СВЯЗИ

стационарные
гонономные и
удерживающие

НЕ

...
...
...

и идеальные - $(\sum \bar{R}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0)$

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

возможные (виртуальные) - $\delta \bar{r}$ и действительные - $d\bar{r}$
 $\delta A = \bar{F} \cdot \delta \bar{r}$ - виртуальная или возможная работа силы

$$(\bar{F}_i + \bar{R}_i + \bar{\Phi}_i) = 0 \longrightarrow (\bar{F}_i + \bar{R}_i + \bar{\Phi}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

$$\sum (\bar{F}_i + \bar{R}_i + \bar{\Phi}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0 \longrightarrow \sum \delta A_i + \sum \delta A_i^R + \sum \delta A_i^{\Phi} = 0$$

а при идеальных связях, когда $\sum \delta A_i^R = 0$, получаем

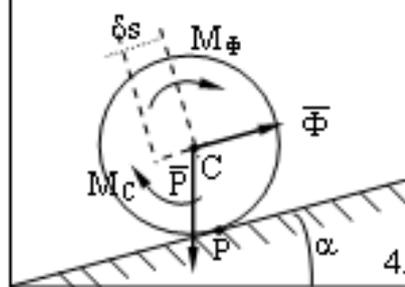
ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

$$\sum \delta A_i + \sum \delta A_i^{\Phi} = 0$$

или то же самое в аналитической форме

$$\sum [(X_i - m_i \cdot \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i + (Y_i - m_i \cdot \ddot{y}_i) \cdot \delta y_i + (Z_i - m_i \cdot \ddot{z}_i) \cdot \delta z_i] = 0$$

Число уравнений работ равно числу степеней свободы системы - S



1. Чертеж ; $\bar{F}_i ; \bar{\Phi}_i ; \delta S_i$.

2. $\sum \delta A_i = P \cdot \sin \alpha \cdot \delta S - M_C \cdot \delta \phi - \Phi \cdot \delta S - M_P \cdot \delta \phi = 0$

3. $|\Phi| = m \cdot a ; |M_P| = I_{xc} \cdot \varepsilon ; I_{xc} = \dots ; \varepsilon = \dots ; \delta \phi = \dots$

4. $P \cdot \sin \alpha \cdot \delta S - \delta P \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\delta S}{R} - \frac{P}{g} \cdot a \cdot \delta S - \frac{PR^2}{2g} \cdot \frac{a}{R} \cdot \frac{\delta S}{R} = 0$

Дано : α, R, δ
Найти : a_c .

5. $a_c = a = \frac{2}{3} \cdot g \cdot (\sin \alpha - \frac{\delta}{R} \cdot \cos \alpha)$

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

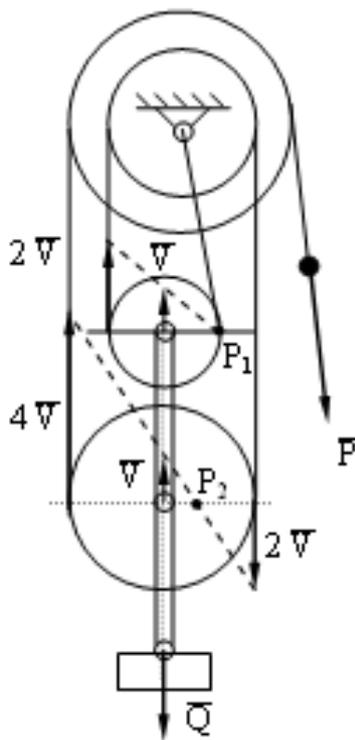
Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю

$$\sum \delta A_i = 0$$

План решения задачи

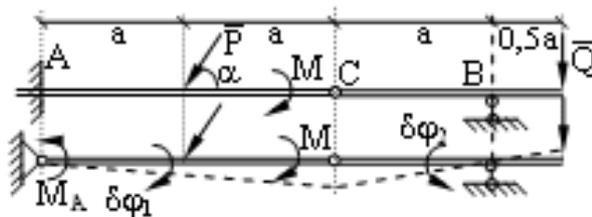
1. На схеме механизма в заданном положении показать действующие силы;
2. Задать возможное перемещение м-ма;
3. Составить уравнение работ;

$$\sum \delta A_i = P \cdot \delta S_P - Q \delta S_Q = 0$$
4. Определить соотношение между перемещениями точек приложения сил
 (Из $\frac{\delta S_P}{\delta S_Q} = \frac{V_P}{V_Q} \longrightarrow \delta S_P = k \cdot \delta S_Q$.)
 и подставить в уравнение работ;
5. Получить ответ к задаче.



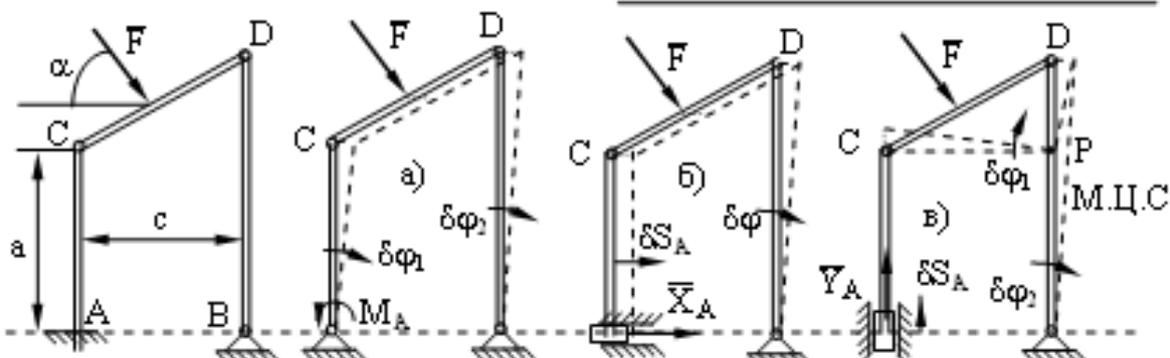
**ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО МЕХАНИКИ
 ЧТО ВЫИГРЫВАЕТСЯ В СИЛЕ,
 ПРОИГРЫВАЕТСЯ В СКОРОСТИ**

Определение реакций связей в задачах статки



$$- M_A \delta \varphi + P \cdot a \cdot \sin \alpha \cdot \delta \varphi + M \cdot \delta \varphi - Q \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a \cdot \delta \varphi}{a} = 0$$

$$M_A = P \cdot a \cdot \sin \alpha + M - Q \cdot a$$



а) $\delta A_F = F \cdot \cos \alpha \cdot a \cdot \delta \varphi$; б) $\delta A_F = F \cdot \cos \alpha \cdot \delta S_A$; в) $\delta A_F = m_F(F) \cdot \delta S_A / CP$

ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ - $q_1 \div q_s$
СКОРОСТИ - $\dot{q}_1 \div \dot{q}_s$
И СИЛЫ - $Q_1 \div Q_s$

$$\sum \delta A_i = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s.$$

$$Q_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s}; \dots Q_s = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}.$$

$$Q_1 = \frac{\sum \delta A_i^{(1)}}{\delta q_1}; \quad Q_2 = \frac{\sum \delta A_i^{(2)}}{\delta q_2}; \quad \dots \quad Q_s = \frac{\sum \delta A_i^{(s)}}{\delta q_s}$$

при решении
задач

В обобщенных силах можно записать

$Q_1 = 0; Q_2 = 0; \dots Q_s = 0$ - принцип возможных перемещений

$Q_1 + Q_1^* = 0; \dots Q_s + Q_s^* = 0$ - общее уравнение динамики

Из $-Q^* = Q$ при $-Q^* = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q}$ получают

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

Уравнение Лагранжа 2-рода - алгоритм получения
диф. уравнения движения мех. системы

План решения задачи на определение ускорения системы тел
с одной степенью свободы

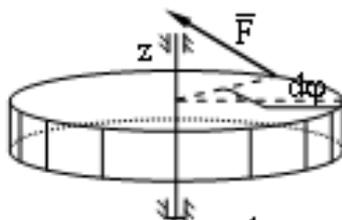
1. Выполнение чертежа к задаче, определение из условий задачи всех действующих на систему заданных сил, масс тел, формул для нахождения моментов их инерции и выбор обобщенной координаты.

2. Определение кинет. энергии системы тел в виде $T = \frac{1}{2} \cdot A(q) \cdot \dot{q}^2$

3. Выполнение указанных в левой части уравнения Лагранжа операций - то есть определение $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$; $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right)$ и $\frac{\partial T}{\partial q}$

4. Определение обобщенной силы.

5. Подстановка полученных выражений в уравнение Лагранжа и получение ответа к задаче



$$1. q = \varphi; \quad 2. T = \frac{1}{2} \cdot I_z \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot I_z \cdot \dot{\varphi}^2$$

$$3. \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = I_z \cdot \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I_z \cdot \ddot{\varphi}$$

$$4. Q = \frac{1}{\delta q} (\sum \delta A_i) = \frac{1}{\delta \varphi} (m_z(\bar{F}) \cdot \delta \varphi) = m_z(\bar{F}); \quad 5. \quad I_z \cdot \ddot{\varphi} = m_z(\bar{F})$$

Исинтаев Такабай Исинтайулы

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЙ
ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Учебное пособие

Объем 9,8 п.л.