

**Министерство образования и науки Республики Казахстан**

**Костанайский государственный университет имени  
А.Байтурсынова**

**Кафедра электроэнергетики и физики**

**Т.И.Глушенко  
Т.В.Бедыч**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ 2  
ЧАСТЬ 1**

**Переходные процессы в электрических цепях**

Учебное пособие

**Костанай, 2019**

**УДК 621.3(075)**

**ББК 31.2.Я73**

**Г55**

**Авторы:**

Глущенко Татьяна Ивановна, кандидат экономических наук,

Бедыч Татьяна Витальевна, кандидат технических наук

**Рецензенты:**

Константинов Михаил Маерович, почетный работник ВПО РФ, доктор технических наук, профессор кафедры механизация технологических процессов в АПК ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный аграрный университет»

Умурзакова Анара Даукеновна, PhD, кандидат технических наук, заведующая кафедрой энергетика и металлургии Инновационного Евразийского университета

Дерепаскин Алексей Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры энергетика и машиностроения Костанайского инженерно-экономического университета им. М. Дулатова

Глущенко Т.И., Бедыч Т.В.

Г55 Теоретические основы электротехники 2. Часть I. Переходные процессы в электрических цепях. - Костанай: КГУ имени А.Байтурсынова, 2019 – 168 с.

**ISBN 978-601-7985-89-9**

В учебное пособие включены классический и операторный методы расчета переходных процессов в электрических цепях постоянного и переменного токов, примеры решения задач, тесты и задания для самостоятельной работы студентов. Особое внимание уделено применению специализированных программ к расчету переходных процессов в электрических цепях. Работа предоставляет широкий выбор методов расчета и анализа электрических цепей.

Предназначено для студентов электроэнергетических специальностей; оно может быть рекомендовано преподавателям высших учебных заведений при проведении занятий по теоретическим основам электротехники.

**УДК 621.3(075)**

**ББК 31.2.Я73**

Утверждено и рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом Костанайского государственного университета имени А. Байтурсынова, 27 февраля 2019г., протокол № 2

**ISBN 978-601-7985-89-9**

© Глущенко Т.И., 2019

© Бедыч Т.В., 2019

## Содержание

<b>Введение</b> .....	4
<b>Тема 1 Переходные процессы в электрических цепях</b> .....	5
1.1 Общие теоретические сведения.....	5
1.1.1 Коммутация в электрической цепи.....	5
1.1.2 Возникновение переходных процессов. Законы коммутации.....	7
1.1.3 Применение дифференциальных уравнений к расчету переходных процессов .....	9
1.2 Классический метод расчета переходных процессов.....	14
1.2.1 Включение $r, L$ цепи на постоянное напряжение .....	14
1.2.2 Короткое замыкание цепи с $r, L$ .....	20
1.2.3 Включение цепи $r, L$ на синусоидальное напряжение .....	23
1.2.4 Включение цепи $r, C$ на постоянное напряжение.....	27
1.2.5 Переходный процесс в цепи с индуктивностью, емкостью и активным сопротивлением.....	32
1.2.6 Включение цепи $r, L, C$ на постоянное напряжение .....	39
1.2.7 Включение $r, L, C$ цепи на синусоидальное напряжение.....	45
1.3 Примеры расчета переходных процессов классическим методом... ..	50
1.3.1 Примеры расчета цепей первого порядка при постоянных и синусоидальных источниках.....	50
1.4 Применение программы Mathcad к расчету переходных процессов классическим методом .....	71
1.5 Тесты .....	85
2.1 Операторный метод расчета переходных процессов.....	97
2.1.1 Теоретические основы операторного метода.....	97
2.1.2 Операторные изображения простейших функций и некоторые теоремы операторного исчисления.....	100
2.1.3 Теорема разложения.....	107
2.1.4 Операторные схемы замещения основных элементов электрической цепи .....	113
2.1.5 Основные законы электротехники в операторной форме.....	116
2.2 Расчет переходных процессов операторным методом .....	120
2.3 Применение операторного метода к расчету переходного процесса в цепи с синусоидальной ЭДС.....	136
2.4 Применение программы Mathcad к расчету переходных процессов классическим методом .....	145
2.5 Тесты .....	155
2.6 Индивидуальное домашнее задание №1 .....	160
2.7 Индивидуальное домашнее задание №2.....	162
<b>Заключение</b> .....	166
<b>Список использованных источников</b> .....	167

## Введение

«Теоретические основы электротехники 2» являются основной теоретической дисциплиной в системе подготовки специалистов в области электроэнергетики. Она базируется на знаниях, полученных студентами в результате изучения физики, математики и информатики и ТОЭ 1. В свою очередь, хорошее знание ТОЭ 2 значительно облегчает изучение специальных электротехнических дисциплин: электрических машин, информационно-измерительной техники, электроэнергетики и др.

Основная задача дисциплины - дать необходимую теоретическую подготовку по главным вопросам исследования и расчета переходных процессов в электрических цепях.

В основу расчета переходных процессов положены дифференциальные уравнения и преобразования Лапласа.

Развитие новых технологий привело к внедрению компьютеров в научные исследования. В настоящее время успешное решение большинства научных задач в значительной степени зависит от умения применить вычислительную технику и соответствующие методы. При обучении современного специалиста необходимо связать математику как общетеоретическую дисциплину с практическим ее применением в работе специалиста и дать конкретный практический аппарат для исследований.

Решение таких задач упрощается при использовании программы MathCAD.

# 1 Переходные процессы в электрических цепях

## 1.1 Общие теоретические сведения

### 1.1.1 Коммутация в электрической цепи

Наряду с установившимися режимами работы в линейных электрических цепях имеют место электромагнитные переходные процессы, происходящие в этих цепях при переходе от одного установившегося режима к другому.

Под действием периодических или постоянных ЭДС и напряжений переходные процессы в электрических цепях возникают при включении и выключении цепи, а также при изменении одного или нескольких ее параметров.

Мгновенное изменение состояния электрической цепи, обуславливающее возникновение переходного процесса или изменение режима ее работы, называется **коммутацией**.

**Переходный процесс** в электрической цепи – это переход от одного установившегося режима к другому, отличному от первого.

На схемах для обозначения коммутации используют ключевой элемент с указанием стрелочкой вида коммутации (замыкание, размыкание) и момента времени (рисунок 1).



Рисунок 1 – Условное обозначение коммутации

Ключ считается идеальным элементом. Сопротивление ключа в открытом состоянии принимается равным нулю, а в закрытом – бесконечности. Время коммутации есть бесконечно малая величина, то есть переход из одного состояния в другое происходит мгновенно.

Момент коммутации является границей между, так называемыми, до коммутационным (предшествующим) и переходным процессами (ПП).

Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго, но на практике это время считают конечным в силу затухающего характера переходного процесса.

Во время переходного процесса электрическая величина стремится к некоторому установившемуся значению, по достижению которого с точностью до 99%, переходный процесс считают закончившимся. Дальнейшее состояние цепи называют **установившимся процессом** (рисунок 2).

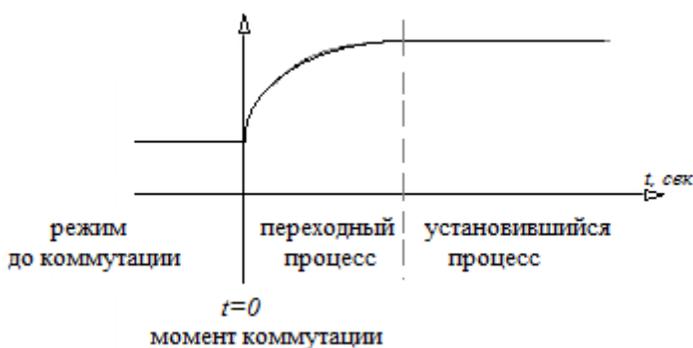


Рисунок 2 – График переходного процесса

Весь переходный процесс можно разделить на три этапа:

1. Начальный установившийся режим;
2. Переходный режим. Его начало обычно принимается в расчете за  $t=0$ . При составлении уравнений по законам коммутации различают время **непосредственно перед коммутацией**  $t=0$  и время  $t=0_+$  **непосредственно после коммутации**.

3. Конечный установившийся режим, который наступает теоретически при  $t=\infty$ , а практически – через сравнительно короткое время. Этот режим называется **вынужденным**, или **принужденным**.

Время переходного процесса исчисляется долями секунды, но токи и напряжения могут достигать значений, во много

превышающих значения при нормальном установившемся режиме, а это может привести к повреждению аппаратуры или к несчастным случаям с людьми. Поэтому необходимо учитывать переходные процессы при проектировании и эксплуатации электротехнических устройств.

Например, в момент пуска двигателя в его обмотках могут возникать пусковые токи в несколько раз превышающие номинальные токи. Возможны в цепях и коммутационные перенапряжения, способные вызвать пробой изоляции, и как следствие, короткое замыкание.

### **1.1.2 Возникновение переходных процессов. Законы коммутации**

Переходные процессы в электрических цепях не могут протекать мгновенно, так как в установившемся режиме любая электрическая цепь характеризуется определенным запасом энергии электрических или магнитных полей элементов цепи. Поэтому в реальных электрических цепях токи и напряжения на отдельных участках не могут мгновенно менять свои значения.

Если цепь содержит индуктивность (**L**), в ней создается **магнитное поле**, когда в цепи есть емкость (**C**), в ней создается **электрическое поле**, или оба поля вместе, то переходный процесс не может совершиться мгновенно.

Однако при пренебрежении магнитным или электрическим полем на том или ином участке электрической цепи, ввиду их незначительности, можно считать, что ток или напряжение на соответствующем участке цепи изменяется практически мгновенно.

В соответствии с законами коммутации электрических цепей не могут мгновенно изменяться на конечное значение токи в катушках индуктивности (первый закон коммутации), однако напряжения на зажимах подобных катушек можно принять изменяющимися мгновенно, если пренебречь их электрической емкостью.

Энергия магнитного поля катушки  $W_M = \frac{Li^2}{2}$ . Из этого следует, что ток в катушке не может изменяться скачком и

начинает свое изменение во время переходного процесса с того самого значения, которое он имел до начала переходного процесса. Это положение известно под названием **первого закона коммутации** и записывается равенством:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) \quad (1)$$

где  $i_L(0_-)$  - ток, протекающий через индуктивность непосредственно до коммутации, А;  
 $i_L(0_+)$  - ток, протекающий через индуктивность непосредственно после коммутации, А.

В то же время не может мгновенно меняться на конечное значение напряжение на обкладках конденсаторов (второй закон коммутации), хотя, если пренебречь индуктивностью конденсаторов, теоретически возможны мгновенные изменения токов в их цепях.

Энергия электрического поля конденсатора  $W_{\text{э}} = \frac{Cu^2}{2}$ .

Значит, в этом случае не может изменяться скачком напряжение. Это второй закон коммутации, выраженный равенством:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) \quad (2)$$

где  $u_C(0_-)$  - напряжение, на конденсаторе непосредственно до коммутации, А;  
 $u_C(0_+)$  - напряжение, на конденсаторе непосредственно после коммутации, А.

Если в цепи имеется только активное сопротивление  $r$ , то есть электрическое и магнитное поля настолько малы, что ими можно пренебречь, переходного процесса не будет: ток и

напряжение скачком изменятся до новых установившихся значений.

В общих случаях, когда электрическая цепь содержит в различных комбинациях все элементы электрической цепи  $(r, L, C)$ , ни то ни напряжение не могут изменяться скачком. Поэтому переходный процесс будет продолжаться какое-то конечное время. Время переходного процесса зависит от параметров электрической цепи  $(r, L, C)$ , но не от величины тока или напряжения.

### 1.1.3 Применение дифференциальных уравнений к расчету переходных процессов

Аналитический расчет переходного процесса в линейной цепи с сосредоточенными параметрами сводится нахождению общих интегралов обычных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, составленными по первому и второму законам Кирхгофа, которые могут быть сведены к одному уравнению для любого переходного тока или напряжения в цепи.

Порядок дифференциального уравнения, описывающего соотношение токов и напряжений в электрической цепи при переходном режиме, определяется количеством мест накопления электрической или магнитной энергии.

Ток, протекающий в цепи с емкостью может быть выражен через напряжение  $i = C \frac{du_c}{dt}$ . Напряжение на

индуктивности можно выразить:  $u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}$ . Если

электрическая цепь содержит индуктивность и емкость, напряжение на индуктивности можно выразить:

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_c}{dt^2}.$$

В общем случае, если в цепи содержится несколько  $n$  накопителей энергии, уравнение может принять вид:

$$a_n \frac{d^n i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = bu \quad (3)$$

где

Решение неоднородного дифференциального уравнения классическим методом возможно в результате суммирования частного решения данного неоднородного уравнения и его общего решения при равенстве нулю свободного члена, т. е. однородного дифференциального уравнения.

При этом, решение однородного уравнения без свободного члена описывает процессы, происходящие в электрической цепи при отсутствии внешних источников питания, когда они происходят под действием энергии, накопленной в электрическом и магнитном полях элементов.

В реальных электрических цепях происходит рассеяние энергии, в результате чего запас накопленной в соответствующих элементах цепи энергии со временем будет исчерпан и, следовательно, все электромагнитные процессы в цепи через определенный промежуток времени прекратятся.

**Общий интеграл** дифференциального уравнения с правой частью представляет собой сумму частного решения этого уравнения и решения того же уравнения без правой части, т. е. **общего решения**. Рассмотрим эти решения подробнее.

а) **Общее решение** физически определяет электромагнитные процессы, происходящие в цепи при отсутствии внешних источников энергии, за счет того запаса энергии, который был в начальный момент времени в электрическом и магнитном полях, связанных с цепью. Но в реальных цепях всегда имеет место рассеяние энергии; часть ее будет, например, расходоваться на нагрев проводов и сопротивлений и выделяться в виде тепла. Значит, запас энергии, который был в цепи в начальный момент, со временем будет исчерпан, и электромагнитные процессы в цепи прекратятся. Из этого следует, что токи, напряжения и прочие электрические величины, определяемые из линейных дифференциальных уравнений без правой части, с течением времени стремятся к нулю. Эти составляющие по своему характеру не зависят от внешних

источников энергии и поэтому называются **свободными составляющими**.

Общий вид свободной составляющей тока, найденной из дифференциального уравнения (3)  $n$ -го порядка, таков:

$$i_{c\phi} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (4)$$

где  $t$  — время, сек;

$A_k$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных

условий;

$p_k$  — корни характеристического уравнения.

Независимыми **начальными условиями** называются значения при  $t = 0$  величин, которые не могут меняться скачком, т. е.  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$ .

В отдельных случаях для определения постоянных интегрирования могут быть использованы и **зависимые начальные условия** — значения при  $t=0_+$  остальных токов и напряжений цепи. При этом следует помнить, что независимые начальные условия определяются расчетом цепи до коммутации (т. е. при  $t=0_-$ ), а значения  $i_L(0_+)$  и  $u_C(0_+)$  будут такими же, как при  $t=0_+$ . Зависимые же начальные условия определяются расчетом цепи после начала переходного процесса, т. е. при  $t=0_+$ , причем используются предварительно подсчитанные величины токов в катушках и напряжений на конденсаторах при  $t=0_-$ .

Для уравнения (3) характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (5)$$

Число корней равно порядку дифференциального уравнения. Корни могут быть в общем случае комплексными числами, действительная часть которых всегда отрицательна.

$$p_k = -\beta_k + j\omega_k. \quad (6)$$

Величина  $\beta_k$  характеризует **скорость затухания экспоненты** и называется коэффициентом затухания. Величина, обратная коэффициенту затухания, обозначается  $\tau$  и называется **постоянной времени**. Физический смысл этой величины будет выяснен ниже.

$$\tau_k = -\frac{1}{\beta_k}. \quad (7)$$

В частном случае, если корень  $p_k$  оказывается действительным числом ( $p_k = -\beta_k$ ), постоянная времени:

$$\tau_k = -\frac{1}{p_k}. \quad (8)$$

Мнимая часть корня, т. е.  $\omega_k$  называется **угловой частотой собственных колебаний**, о ней мы будем в свое время говорить подробнее.

б) Что представляет собой **частное решение**? Поскольку свободные составляющие, т. е. общее решение, через некоторое время обращаются в нуль, то частное решение даст нам значение тока, напряжения или любой другой определяемой величины при  $t=\infty$ , т. е. при установившемся режиме. Характер и величина этой составляющей определяются внешними источниками энергии, поэтому она называется **вынужденной**, или **принужденной** составляющей.

Например, если в нашем случае (3) напряжение постоянно ( $u = U_0 = const$ ), то и ток установившегося режима — принужденный ток — тоже должен быть постоянным, не зависящим от времени. Тогда все производные обратятся в нуль, и мы получим, что

$$i_{np} = \frac{bU_0}{a_0} \quad (9)$$

Если к электрической цепи приложено синусоидальное напряжение, то и ток при установившемся режиме тоже будет синусоидальным.

Общая величина тока определится как сумма общего и частного решений:

$$i = i_{np} + i_{cv} \quad (10)$$

Аналогично при решении дифференциальных уравнений относительно других величин будет  $u = u_{np} + u_{cv}$ ,  $\Phi = \Phi_{np} + \Phi_{cv}$ .

Таким образом, решение сведено к методу наложения: определяя частное решение ( $i_{np}$ ), полагаем, что действуют только внешние источники энергии, внутренних запасов энергии нет; определяя свободные составляющие, наоборот, приравниваем к нулю действие внешних источников энергии и учитываем действие только внутренних сил, обусловленных накопленной в цепи энергией. Общий же результат определяем как сумму этих частичных решений.

Следует помнить, что физически существуют только действительные токи и напряжения, а разложение их на принужденные и свободные составляющие — лишь прием, облегчающий расчет переходных процессов в линейных цепях.

Рассмотренный метод расчета называется еще **классическим**. Этот метод позволяет исследовать переходные процессы в простейших цепях.

Рассмотрим **этапы классического метода** расчета переходных процессов:

1. Составляем дифференциальные уравнения для послекоммутационного режима по законам Кирхгофа;

2. В полученных уравнениях выделяем **функцию переходного процесса** ( $i_L(t)$  — ток через индуктивность, или  $u_c(t)$  — напряжение на конденсаторе);

3. Представляем функцию переходного процесса в виде суммы принужденной и свободной составляющих ( $i = i_{np} + i_{cv}$ ,  $u = u_{np} + u_{cv}$ );

4. Определяем принужденную составляющую из условий установившегося режима ( $i_{np} = i_{уст}, u_{np} = u_{уст}$ );

5. Определяем корни характеристического уравнения, для этого используем **метод эквивалентного уравнения**. Систему  $n$  дифференциальных уравнений сводим к одному уравнению  $n$ -го порядка. После чего заменяем производные и интегралы степенями  $p$ :

$$\int idt \text{ заменяем } \frac{1}{p}$$
$$i \text{ заменяем } 1$$
$$\frac{di}{dt} \text{ заменяем } p$$
$$\frac{d^2i}{dt^2} \text{ заменяем } p^2$$

и так далее. Значения сопротивлений, индуктивностей и емкостей ( $r, L, C$ ) остаются без изменений, а правую часть заменяем нулем. Полученное уравнение будет характеристическим.

6. Для определения постоянной интегрирования составляем уравнение по законам коммутации для момента времени  $t=0$ .

7. Записываем ток через индуктивность (напряжение на конденсаторе) как сумму принужденной и свободной составляющих.

## 1.2 Классический метод расчета переходных процессов

### 1.2.1. Включение $r, L$ цепи на постоянное напряжение

Включим на постоянное напряжение  $U$  реальную катушку с активным сопротивлением  $r$  и индуктивностью  $L$  (рисунок 3). Считая значения  $U, r, L$  заданными и приняв момент включения

за  $t=0$ , нужно определить величину тока  $i$  в цепи и построить график его изменения во времени.

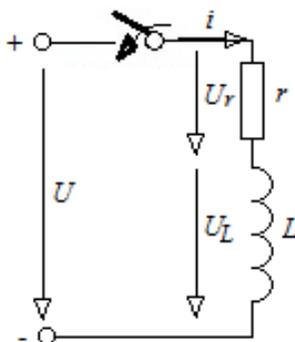


Рисунок 3 – Схема включения  $r, L$  цепи на постоянное напряжение

Решение этой задачи будем проводить в следующем порядке:

1. Составляем дифференциальное уравнение электрического равновесия цепи. Уравнение это составляется при обходе контура по второму закону Кирхгофа в предположении, что рубильник уже замкнут.

$$u - u_r - u_L = 0 \quad (11)$$

Но известно, что

$$\left. \begin{aligned} u_r &= ri, \\ u_L &= -e_L = L \frac{di}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12), получим:

$$L \frac{di}{dt} + ri = U \quad (13)$$

(13)—линейное дифференциальное уравнение первого порядка (в этой цепи только один элемент накопления энергии— катушка, вокруг которой создается магнитное поле).

2. Находим частное решение (13), т.е. принужденную составляющую тока. Она определяется из уравнения:

$$L \frac{di_{np}}{dt} + ri_{np} = U$$

Но  $U = const$ . Значит  $i_{np} = const$ ,  $L \frac{di_{np}}{dt} = 0$ , и принужденная составляющая тока:

$$i_{np} = \frac{U}{r} = I \quad (14)$$

Получился ток  $I$  установившегося режима, который был бы в цепи с первого момента замыкания рубильника, если бы не возникающая в катушке эдс самоиндукции, которая противодействует изменению тока. Так как  $i_{np}$  — это ток установившегося режима, то для его определения можно пользоваться обычным законом Ома, а в случае разветвленной цепи — любыми методами расчета, известными для установившегося режима.

3. Общее решение, т. Е. свободная составляющая, определяется из уравнения без правой части:

$$L \frac{di_{ce}}{dt} + ri_{ce} = 0 \quad (15)$$

Решаем это уравнение разделением переменных

$$\frac{di_{ce}}{i_{ce}} = -\frac{r}{L} dt$$

Интегрируя, получаем

$$\ln i_{ce} = -\frac{r}{L}t + A_1,$$

Постоянную  $A_1$ , можно представить как натуральный логарифм некоторой другой постоянной  $A$ , т. Е. считать  $A_1 = \ln A$ . Тогда свободная составляющая тока

$$i_{ce} = Ae^{-\frac{r}{L}t} \quad (16)$$

где  $-\frac{r}{L}$  - корень характеристического уравнения:

$$Lp_1 + r = 0; \quad p_1 = -\frac{r}{L}.$$

Для нахождения постоянной интегрирования  $A$  составляем уравнение по первому закону коммутации: при  $t = 0$  ток в катушке равен нулю, т. Е.

$$i(0) = i_{np}(0) + i_{ce} = \frac{U}{r} + A = 0.$$

Отсюда  $A = -\frac{U}{r} = -I$ , и свободная составляющая тока

$$i_{ce} = -\frac{U}{r}e^{-\frac{r}{L}t} = -Ie^{-\frac{r}{L}t} \quad (17)$$

В дальнейшем будем прямо записывать в общем виде  $i_{ce}$ , не проводя подробного решения, а пользуясь выражением (4), которое для уравнения первого порядка примет вид:

$$i_{ce} = Ae^{p_1 t}.$$

Так как корень  $p_1$  получился действительным, то постоянная времени

$$\tau = -\frac{1}{p_1} = \frac{L}{r}. \quad (18)$$

Размерность этой величины

$$|\tau| = \frac{|L|}{|r|} = \frac{\text{Гн}}{\text{Ом}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{сек}}{\text{Ом}} = \text{сек}.$$

Используя постоянную времени, можно записать  $i_{cв}$  в виде

$$i_{cв} = -Ie^{-\frac{t}{\tau}} \quad (19)$$

Выясним физический смысл постоянной интегрирования  $\tau$ . При  $t=0$   $i_{cв} = I$ , а при  $t = \tau$ :

$$i_{cв}(\tau) = -Ie^{-\frac{\tau}{\tau}} = -Ie^{-1} = \frac{i_{cв}(0)}{e}$$

Отсюда вывод: **постоянная времени** — это время, за которое свободная составляющая уменьшается в  $e=2,718$  раз.

4. Действительное значение тока

$$i = i_{np} + i_{cв} = \frac{U}{r} - \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t} = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (20)$$

5. Строим график  $i(t)$ . Для построения составляем таблицу 1, задавая значения времени, кратными  $\tau$ .

Таблица 1- Расчет тока переходного процесса

$t$	$e^{-\frac{t}{\tau}}$	$i_{ce} = -Ie^{-\frac{t}{\tau}}$	$i_{ce} = i_{np} + i_{ce}$
0	1	$-I$	0
$\tau$	0,368	$-0,368 I$	$0,632 I$
$2\tau$	0,135	$-0,135 I$	$0,865 I$
$3\tau$	0,05	$-0,05 I$	$0,95 I$
$4\tau$	0,018	$-0,018 I$	$0,982 I$
$5\tau$	0,007	$-0,007 I$	$0,993 I$

Из этой таблицы и из графика (рисунок 4) видно, через  $t = 5\tau$  ток  $i$  отличается от тока установившегося режима всего на 0,7 %, а точность инженерных расчетов допускает погрешность в пределах  $\pm 1\%$ .

Поэтому обычно считают, что за время, равное  $5\tau$ , переходный процесс практически заканчивается.

Если провести к кривой  $i_{ce}(t)$  касательную в любой точке (рисунок 4), то  $tg$  ее наклона к оси времени

$$tg\alpha = \left( \frac{di_{ce}}{dt} \right)_{t=t_1} = \frac{1}{\tau} \cdot Ie^{-\frac{t_1}{\tau}} = -\frac{i_{ce}(t_1)}{\tau} \quad (21)$$

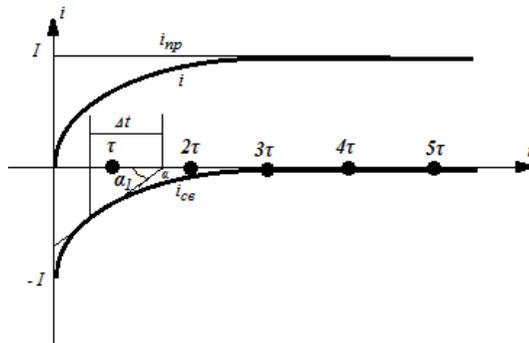


Рисунок 4 – График переходного процесса при включении  $r, L$  цепи на постоянное напряжение

В то же время, как следует из рисунка 4,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{i_{cs}(t_1)}{\Delta t} \quad (22)$$

Но  $\alpha_1 = 180^\circ - \alpha$ , т. е.  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha$ . Следовательно, сравнивая выражения (21) и (22), можно прийти к выводу, что длина подкасательной на оси времени дает в том же масштабе, что и время  $t$ , постоянную времени  $\tau$ . Касательную можно проводить в любой точке кривой, так как время  $t_1$  выбираем произвольно.

### 1.2.2 Короткое замыкание цепи с $r, L$

Рассмотрим случай, когда реальная катушка, по которой протекал постоянный ток, замыкается накоротко (рисунок 5)

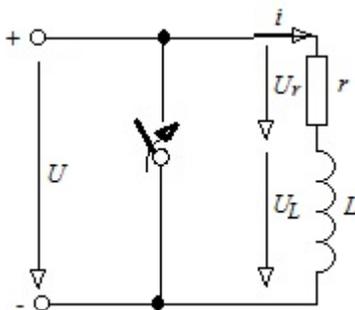


Рисунок 5 – Схема короткого замыкания цепи с  $r, L$

В практике одним из примеров необходимости короткого замыкания катушки является отключение обмотки возбуждения генераторов постоянного тока. Если просто разомкнуть. Эту обмотку, то ток, несмотря на возникшую при этом электрическую дугу, все-таки будет изменяться очень быстро, а поскольку обмотка возбуждения обладает к тому же большой

индуктивностью, то и возникающая при отключении ЭДС самоиндукции  $e = -L \frac{di}{dt}$  будет очень велика и может пробить изоляцию на корпус машины или между витками. Во избежание этого рукоятку регулировочного реостата для отключения обмотки возбуждения выводят на так называемый холостой контакт, тем самым замыкая ее накоротко.

Вернемся к схеме (рисунок 5) и найдем ток в катушке, принимая момент замыкания рубильника К за  $t = 0$ .

Решение задачи:

1. Составляем дифференциальное уравнение замкнутого контура по второму закону Кирхгофа:

$$u_L + u_r = -L \frac{di}{dt} + ri = 0. \quad (23)$$

2. Переходный процесс в катушке, как видно из (23), не зависит от внешнего напряжения  $U$  и происходит за счет накопленной в поле катушки энергии. Следовательно, принужденная составляющая тока

$$i_{np} = i_{ycm} = 0$$

так как дополнительного подвода энергии извне нет, а энергия магнитного поля с течением времени выделится в виде тепла (катушка при прохождении тока нагревается). Следовательно, в этой цепи

$$i = i_{ce} \quad (24)$$

3. Свободная составляющая тока из уравнения (24)

$$i_{ce} = i = Ae^{p_1 t}.$$

Характеристическое уравнение будет таким же, как и в предыдущем случае:

$$Lp_1 + r = 0,$$

откуда ,

$$p_1 = -\frac{r}{L}$$

а постоянная времени

$$\tau = -\frac{1}{p_1} = \frac{L}{r}$$

Постоянную интегрирования определяем из начального условия. При  $t = 0$  ток

$$i(0) = i_{c6}(0) = \frac{U}{r + r_1} = I_0 = A$$

Следовательно ток в катушке

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{r + r_1} e^{-\frac{r}{L}t}. \quad (25)$$

4. Кривая тока  $i(t)$  имеет вид, приведенный на рисунке 6.

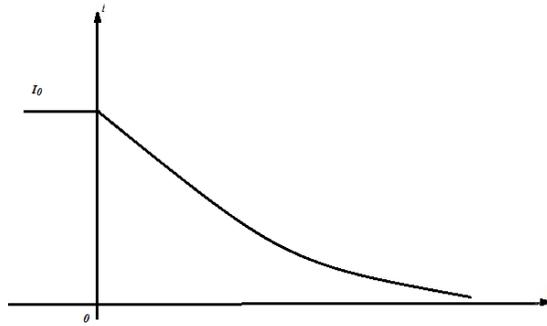


Рисунок 6 – График тока переходного процесса при коротком замыкании цепи с  $r, L$

5. Проверим расход энергии. До начала переходного процесса в магнитном поле катушки была запасена энергия  $W_M = \frac{LI_0^2}{2}$ . Энергия, перешедшая за время переходного процесса в тепловую, определится как

$$\int_0^{\infty} i^2 r dt = \int_0^{\infty} I_0^2 r e^{-\frac{2r}{L}t} dt = \frac{I_0^2 r}{\frac{2r}{L}} \left| e^{-\frac{2r}{L}t} \right|_0^{\infty} = -\frac{LI_0^2}{2} (0 - 1) = \frac{LI_0^2}{2}$$

Таким образом, весь запас энергии магнитного поля перешел в тепловую энергию в сопротивлении  $r$ . С полным израсходованием энергии заканчивается и переходный процесс.

### 1.2.3. Включение $r, L$ цепи на синусоидальное напряжение

Примером такого переходного процесса может служить, включение трансформатора в режиме холостого хода при малом насыщении сердечника.

Переходные процессы в цепях переменного тока очень зависят от того, в какой момент, при каком мгновенном

значении напряжения происходит включение цепи. Поэтому необходимо учитывать не только амплитуду напряжения сети, но и начальный угол — фазовый угол в момент включения цепи.

Пусть цепь с  $r, L$  (рисунок 7) включается на синусоидальное напряжение, начальная фаза которого составляет  $\alpha$  градусов (рисунок 7), т. е. на напряжение

$$u = U_m \sin (wt + \alpha)$$

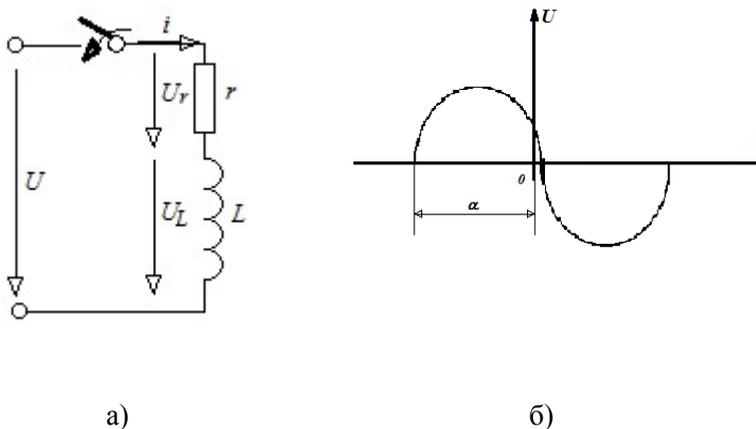


Рисунок 7 – Переходный процесс при включении  $r, L$  цепи на синусоидальное напряжение

Порядок расчета в этом случае будет таким же, как и в предыдущем. Только здесь принужденный ток тоже зависит от времени.

1. Составляем уравнение электрического равновесия цепи:

$$L \frac{di}{dt} + ri = u \quad (26)$$

Оно отличается от (13) только тем, что в правой части стоит мгновенное значение напряжения — величина, зависящая от времени.

2. Принужденная составляющая тока  $i_{np}=i_{ycm}$ . Но при установившемся режиме ток определяется законом Ома как

$$i_{np} = i_{yc} = \frac{Um}{z} \sin(\omega t + \alpha + \varphi), \quad (27)$$

где

$$\begin{cases} z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} \\ \varphi = \arctg \frac{\omega L}{r} \end{cases} .$$

В случае более сложных цепей ток установившегося режима удобнее определить в комплексной форме, а затем перейти от  $I_{ycm}$  к мгновенному значению

$$i_{ycm} = \text{Im} \left[ i_{ycm} \sqrt{2} e^{j\omega t} \right]$$

3. Свободная составляющая тока

$$i_{cs} = A e^{-p_1 t} = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (28)$$

где  $p_1 = -\frac{r}{L}$  - корень характеристического уравнения;

$\tau = \frac{L}{r}$  - постоянная времени.

4. Общий ток

$$i = i_{np} + i_{cs} = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) + A e^{-\frac{r}{L} t} \quad (29)$$

При  $t = 0$  имеем

$$i(0) = \frac{U_m}{z} \sin(\alpha - \varphi) + A = 0,$$

откуда

$$A = -\frac{U_m}{z} \sin(\alpha - \varphi),$$

и окончательно получим

$$i_{cs} = -\frac{U_m}{z} \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{r}{L}t}, \dots \quad (30)$$

а общий ток

$$i = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) - \frac{U_m}{z} \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{r}{L}t} \quad (31)$$

Из формулы (31) видно, что ток состоит из двух частей: синусоидального тока с постоянной амплитудой и постоянного тока, убывающего по экспоненте. Величина общего тока весьма существенно зависит от начального угла  $\alpha$ . Рассмотрим два крайних случая:

а)  $\alpha - \varphi = 0$  или  $\alpha - \varphi = \pi$ .

В этом случае  $i_{cs} = 0$  свободная составляющая равна нулю и переходного процесса не будет, так как ток установившегося режима проходит через нуль. Скачка энергии не будет, и ток сразу становится током установившегося режима.

б)  $\alpha - \varphi = \pm \pi/2$ .

В этом случае  $\sin \alpha - \varphi = \pm 1$ ,  $i_{cs}$  свободная составляющая принимает наибольшее значение, и амплитуда тока переходного процесса будет максимальной. Это объясняется тем, что включение происходит в момент, когда ток установившегося режима должен быть максимальным. Рассмотрим график (рисунок 8) для случая, когда  $\alpha - \varphi = \pm \pi/2$ . Из графика видно, что ток особенно увеличивается во второй и третьей четверти

первого периода, причем это увеличение зависит от постоянной времени  $\tau$ . Если значение  $\tau$  велико, то ток через время  $T/2$  после включения достигает почти удвоенной амплитуды тока установившегося режима (но ни при каких условиях не может превышать  $2 I_{уст}$ )

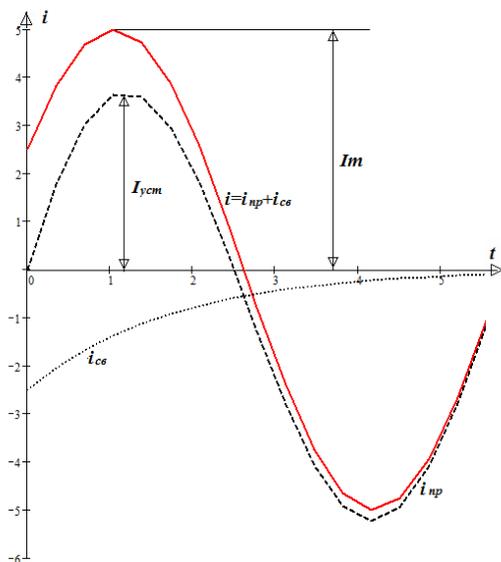


Рисунок 8 – Графики переходного процесса при включении на синусоидальное напряжение

#### 1.2.4. Включение цепи $r, C$ на постоянное напряжение

Рассмотрим изменение тока  $i$  и напряжения  $u_c$  при включении цепи рисунке 9 к источнику постоянного напряжения. При этом будем считать, что конденсатор предварительно был заряжен до напряжения  $U_0$ .

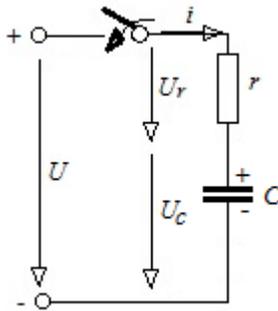


Рисунок 9- Включение  $r$ ,  $C$  на постоянное напряжение

1. Уравнение для этой цепи имеет вид

$$U = Ur + Uc = ri + u_c.$$

Так как в цепи есть конденсатор, то расчет выгоднее вести через напряжение  $u_c$ , то есть величину, определяющую запас энергии. Поэтому выражаем ток  $i$  через  $u_c$ :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt} \quad (32)$$

С учетом (32) уравнение электрического равновесия цепи запишется как

$$rC \frac{du_c}{dt} + u_c = U, \quad (33)$$

где

$$u_c = u_{Cnp} + u_{Cсв}.$$

2. Определяем принужденную составляющую — напряжение конденсатора при установившемся режиме. Ток в цепи будет протекать только до тех пор, пока конденсатор не зарядится. При установившемся режиме он равен нулю, падения

напряжения в сопротивлении  $r$  нет, и напряжение на конденсаторе

$$u_{Cnp} = u_{Cуст} = U. \quad (34)$$

Этот же результат можно получить из (33) подставив  $u_{Cnp} = const$ .

3. Определяем свободную составляющую. Так как уравнение (33) первого порядка, то

$$u_{Cсв} = A e^{p_1 t} = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (35)$$

Характеристическое уравнение

$$rCp_1 + 1 = 0$$

Откуда

$$p_1 = -\frac{1}{rC} \quad (36)$$

а постоянная времени

$$\tau = -\frac{1}{p_1} = rC \quad (37)$$

Проверим размерность:

$$[\tau] = [r] [C] = \text{ом} \cdot \text{ф} = \text{ом} \cdot \text{ом}^{-1} \text{сек} = \text{сек}.$$

4. Постоянная интегрирования определяется из начального условия, которое определяется для действительной величины  $U_c$ , а не для одной из составляющих. Поэтому записываем общее выражение

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cсв} = U + Ae^{-pt} \quad (38)$$

При  $t = 0$

$$u_C(0) = U + A = U_0.$$

Отсюда

$$A = U_0 - U,$$

свободная составляющая

$$u_{Cсв} = (U_0 - U)e^{-\frac{t}{rC}} \quad (39)$$

и все напряжение

$$u_C = U + (U_0 - U)e^{-\frac{t}{rC}}. \quad (40)$$

В частном случае, когда  $U_0 = 0$  (кстати, это наиболее частый случай),

$$u_C = U - Ue^{-\frac{t}{rC}} \quad (41)$$

5. Зарядный ток конденсатора

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U - U_0}{r} e^{-\frac{t}{rC}}. \quad (42)$$

При  $U_0 = 0$  ток

$$i = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{rC}} \quad (43)$$

Таким образом, для  $u_c$  получилось выражение такого же вида, какое было для тока в случае включения цепи  $r, L$  на постоянное напряжение, а для тока — такое же по характеру, как для  $u_L = -e_L$ . Примерный вид кривых  $U_c(t)$  и  $i(t)$  приведен на рисунке 10.

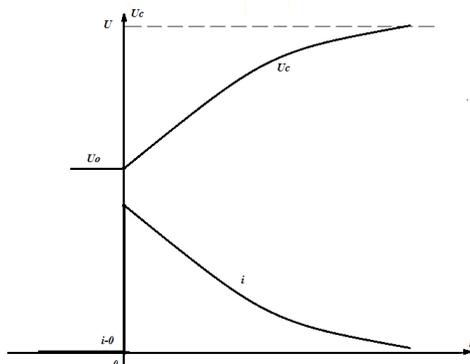


Рисунок 10 – Графики переходного процесса напряжения на конденсаторе

Незаряженный конденсатор в первый момент включения представляет собой **закоротку**. Ток при включении меняется скачком и ограничивается только активным сопротивлением цепи, поскольку  $u_c(0) = 0$ , и все напряжение источника падает на сопротивление  $r$ .

Скачкообразное изменение тока при  $t = 0$  объясняется тем, что мы пренебрегли индуктивностью цепи, а в безындукционной цепи ток не связан с запасом энергии. Практически цепь  $r, C$  всегда имеет некоторую индуктивность, хотя и очень малую. Поэтому ток и в данном случае начнет свое изменение с нуля, очень быстро (**но не мгновенно!**) достигнет значения, близкого к  $\frac{U}{r}$  (или к  $\frac{U - U_0}{r}$ , если  $U_0 \neq 0$ ), а затем будет уменьшаться почти так же, как это следует из формулы (43) или (42).

Аналогично можно провести расчет тока  $i$  и напряжения  $u_c$  при включении цепи  $r, C$  на синусоидальное напряжение или при разряде заряженного конденсатора на активное сопротивление. В последнем случае нетрудно показать, что вся энергия, запасенная в электрическом поле конденсатора, за время разряда выделится в виде тепла в активном сопротивлении цепи.

С рассмотрением переходных процессов в цепи  $r, C$  связаны многие практические задачи — такие, как расчет цепи временной развертки электронных осциллографов, определение больших скоростей (например, скорости полета пули) или очень больших, порядка МОм, сопротивлений (сопротивление изоляции) и т. д.

### 1.2.5. Переходный процесс в цепи с индуктивностью, емкостью и активным сопротивлением

Цепь, содержащая индуктивность и емкость, может запастись энергиею двух видов: энергиею магнитного поля и энергиею поля электрического. Следовательно, в этой цепи **не будет ни скачков напряжения, ни скачков тока.**

Найдем ток  $i$  и напряжение  $u_c$  при включении такой цепи на любое напряжение  $u$  (рисунок 11). Пусть конденсатор до включения цепи не был заряжен.

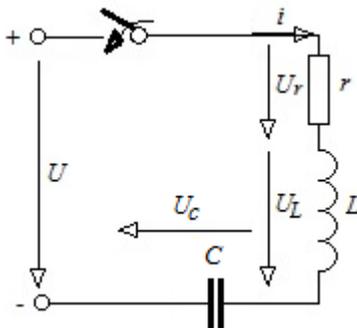


Рисунок 11 – Включение цепи на постоянное напряжение

Решение задачи проводим в уже известном нам порядке.  
 1. Составляем уравнение электрического равновесия цепи:

$$r + u_L + u_C = u. \quad (44)$$

Так как расчет цепей с конденсаторами удобнее вести через  $u_C$ , то и выражаем через  $u_C$  все входящие в (44) величины:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{du_C}{dt} \\ u_r &= ri = rC \frac{du_C}{dt} \\ u_L &= L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2u_C}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Для цепи с последовательным соединением активного сопротивления, индуктивности и емкости переходный процесс описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$rC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = u \quad (46)$$

Освободившись от коэффициента при производной второго порядка, уравнение примет вид:

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{u}{LC} \quad (47)$$

где

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cсв}.$$

2. Определяем принужденную составляющую  $u_{Cпр}$ , т. е. напряжение на конденсаторе при установившемся режиме, которое может быть в этой простой цепи определено с помощью закона Ома.

Принужденная составляющая зависит от формы приложенного к цепи напряжения. Если цепь включается на постоянное напряжение  $U$ , то тока в цепи при установившемся режиме нет,  $u_{Cпр} = U$ . Если же цепь включается на синусоидальное напряжение  $U_m \sin((\omega t + \alpha))$ , то напряжение и ток установившегося режима также будут синусоидальными. В этом случае расчет ведется в комплексной форме, а затем находятся мгновенные значения как функции времени.

3. Определяем свободную составляющую, которая, по существу, и определяет длительность и характер переходного процесса. Уравнение свободного режима для нашей цепи

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

Решение этого уравнения будет:

$$u_{Cсв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (48)$$

Используя метод эквивалентного уравнения на основе дифференциального уравнения можно получить характеристическое уравнение. В дифференциальном уравнении производные и интегралы заменяют степенями  $p$  :  $\frac{d^2 U_C}{dt^2}$

заменяют на  $p^2$ ;  $\frac{dU_C}{dt}$  на  $p$ ,  $\int i dt$  на

$1/p$ ;  $U_C$  на  $p$ ; а правую часть - нулем.

Корни  $p_1$  и  $p_2$  характеристического уравнения определяются:

$$p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

определяются как

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (49)$$

Эти корни зависят от соотношения параметров цепи. Может быть три случая:

$$\text{а) } r > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (50)$$

Корень  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  - имеет размерность сопротивления

$$\left( \sqrt{\frac{\Gamma_H}{\Phi}} = \sqrt{\frac{Om \cdot сек}{Om^{-1}сек}} = Om \right) \quad \text{и называется } \mathbf{ВОЛНОВЫМ}$$

**сопротивлением** цепи.

При условии (50)  $\frac{r^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ , и корни  $p_1$  и  $p_2$

получаются вещественными, отрицательными и разными по величине. В самом деле,

$$\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = a,$$

где  $a$  – вещественное число, меньше чем  $\frac{r}{2L}$ . Поэтому:

$$p_1 = -\frac{r}{2L} + a < 0$$

$$p_2 = -\frac{r}{2L} - a < 0$$
(51)

Кроме того, по абсолютной величине  $|p_1| < |p_2|$ .

Такой режим называют **апериодическим**, - ток и напряжение приближаются к установившемуся режиму, не меняя своего направления (рисунок 12).

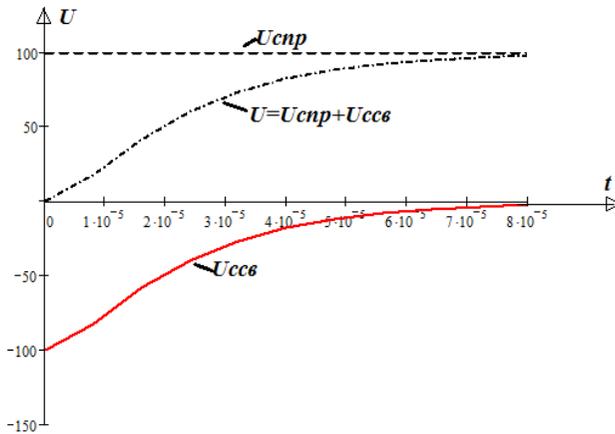


Рисунок 12 – График апериодического переходного процесса

$$\text{б) } r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (52)$$

При этом условии  $\frac{r^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$  и корни  $p_1, p_2$  вещественные, отрицательные и равны друг другу:

$$p_1 = p_2 = -\frac{r}{2L}$$

В этом случае решение дифференциального уравнения будет:

$$u_{Cсв} = (A_1 + A_2 t) e^{p_1 t} . \quad (53)$$

Такой режим называют **пограничным, предельным** или **критическим**. Он очень неустойчив, поэтому практического значения не имеет (рисунок 13).

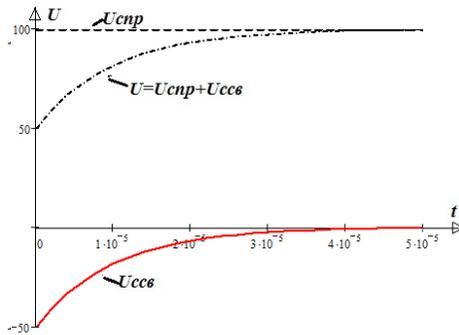


Рисунок 13- График пограничного переходного процесса

$$в) \quad r < 2\sqrt{\frac{L}{C}} , \quad (54)$$

В этом случае корни характеристического уравнения  $p_1, p_2$  получаются сопряженными комплексами с отрицательной вещественной частью.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\beta + j\omega \\ p_2 &= -\beta - j\omega \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

где  $\beta = \frac{r}{2L}$  - коэффициент затухания,

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}$  - угловая частота собственных колебаний.

Такой режим называют **периодическим** или **колебательным** (рисунок 14). В этой цепи происходит многократный обмен энергией между катушкой и конденсатором:  $i(t)$  и  $Uc(t)$  получаются затухающими синусоидами, сдвинутыми по фазе, и энергия как бы переливается то в магнитное поле (когда растет ток), то в электрическое (когда растет напряжение на конденсаторе). Число таких обменов или колебаний в единицу времени называется **собственной частотой колебаний**, которая не зависит от частоты приложенного к цепи напряжения.

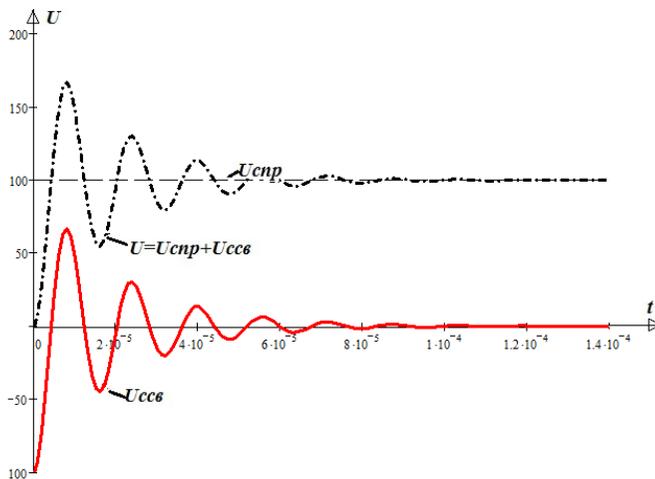


Рисунок 14 – График периодического переходного процесса

4. Постоянные интегрирования находятся из начальных условий. Для постановки этих условий нужно сначала записать значения величин, которые не могут меняться скачком, т. е.  $u_C$  и  $i$  (по законам коммутации):

$$\left. \begin{aligned} u_C &= u_{Cnp} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \\ i &= C \frac{du_C}{dt} = i_{np} + CA_1 p_1 e^{p_1 t} + CA_2 p_2 e^{p_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

При нулевых начальных условиях можем записать

$$\left. \begin{aligned} u_C(0) &= u_{Cnp}(0) + A_1 e^{p_1 \cdot 0} + A_2 e^{p_2 \cdot 0} = 0 \\ i(0) &= i_{np}(0) + CA_1 p_1 + CA_2 p_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Из этих уравнений нетрудно определить  $A_1$  и  $A_2$ . Рассмотрим несколько подробнее переходный процесс при включении цепи  $r, L, C$  на постоянное и на синусоидальное напряжение.

### 1.2.6 Включение цепи $r, L, C$ на постоянное напряжение

Считаем, что цепь рисунку 11 включается на напряжение  $u=U_0=const$ . Тогда принужденные составляющие тока и напряжения на конденсаторе будут

$$\left. \begin{aligned} u_{Cnp} &= U_0 \\ i_{np} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

и начальные условия (57) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} U_0 + A_1 + A_2 &= 0 \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

откуда постоянные интегрирования

$$A_1 = \frac{U_0 p_2}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = \frac{-U_0 p_1}{p_1 - p_2} \quad (59)$$

Подставив эти постоянные, а также значения  $u_{Cnp}$  и  $i_{np}$  в уравнения (56), получим искомые значения напряжения и тока:

$$\left. \begin{aligned} u_c &= U_0 + \frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \\ i &= \frac{CU_0 p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Исследуем полученные выражения при различных значениях корней.

а) Аперiodический режим  $\left( r > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \right)$ .

В этом случае, согласно (51), имеем соотношение

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= 2a > 0 \\ p_1 p_2 &> 0 \end{aligned}$$

и постоянные времени

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} > \tau_2 = -\frac{1}{p_2}.$$

В соответствии с этим графики  $u_C(t)$  и  $i(t)$  имеют вид, представленный на рисунке 15. Как видно из графика, ток  $i$  растет от нуля до некоторого максимума, а затем спадает до нуля. Время  $t_1$ , соответствующее максимальному току можно найти из условия:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_1} = 0.$$

В случае пограничного режима  $\left(r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$  кривые получаются подобными приведенным на рисунке 15, характер процесса также аperiodический.

б) Колебательный режим  $\left(r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$ .

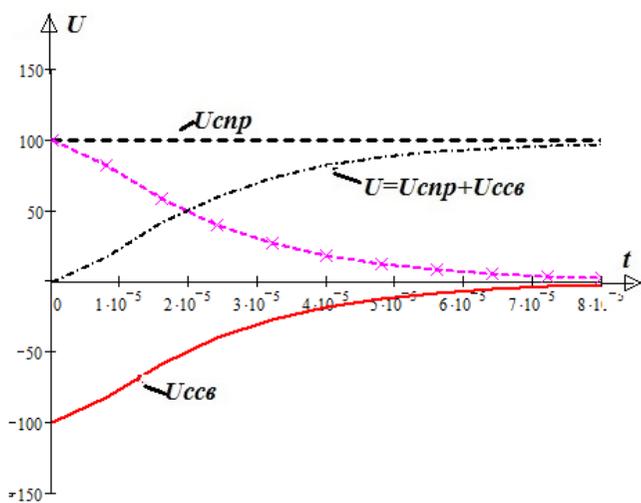
Так как в этом случае корни  $p_1$  и  $p_2$  получаются сопряженные комплексами (55), то

$$p_1 - p_2 = 2j\omega,$$

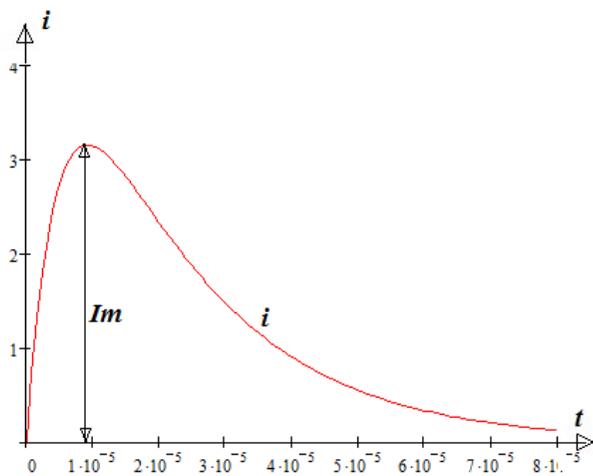
$$p_1 p_2 = \beta^2 + \omega^2 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0^2,$$

где  $\omega_0$  – резонансная частота.

Если включить рассматриваемую цепь на напряжение с угловой частотой  $\omega$ , то в этой цепи будет резонанс напряжений.



а)  $\tau$



б)

Рисунок 15 – Графики аperiodического переходного процесса

Подставим комплексные корни в выражения (50) и проведем некоторые преобразования.

$$\begin{aligned}
 u_c &= U_0 + \frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) = \\
 &= U_0 + \frac{U_0}{2j\omega} e^{-\beta t} [(\beta - j\omega) e^{-j\omega t} - (\beta + j\omega) e^{j\omega t}]
 \end{aligned} \tag{61}$$

так как  $e^{p_1 t} = e^{(-\beta + j\omega)t} = e^{-\beta t} \cdot e^{j\omega t}$ , а  $e^{p_2 t} = e^{(-\beta - j\omega)t} = e^{-\beta t} \cdot e^{-j\omega t}$ .

Переведем стоящие в скобках комплексы в показательную форму:

$$\left. \begin{aligned}
 \beta - j\omega &= \omega_0 e^{-j\gamma} \\
 \beta + j\omega &= \omega_0 e^{j\gamma}
 \end{aligned} \right\} \tag{62}$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\beta^2 + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\beta}.$$

Подставим (62) в (61):

$$\begin{aligned}
 u_c &= U_0 + \frac{U_0}{2j\omega} \cdot \omega_0 e^{-\beta t} [e^{-j(\omega t + \gamma)} - e^{j(\omega t + \gamma)}] = \\
 &= U_0 + \frac{U_0 e^{-\beta t}}{\sin \gamma} \cdot \sin(\omega t + \gamma)
 \end{aligned} \tag{63}$$

Подобным образом представим выражение тока:

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{CU_0 p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{CU_0 \omega_0^2}{2j\omega} \cdot e^{-\beta t} [e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] = \\
 &= \frac{CU_0 \omega_0}{\sin \gamma} \cdot e^{-\beta t} \sin \omega t
 \end{aligned}
 \tag{64}$$

Если учесть, что  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то можно получить ток в несколько ином виде:

$$i = \frac{U_0 \omega_0}{L\omega} \cdot e^{-\beta t} \sin \omega t
 \tag{65}$$

Для построения графиков напряжения  $u_C$  и тока  $i$  во времени необходимо знать период собственных колебаний (рисунок 16):

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

и постоянную времени

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{r}.$$

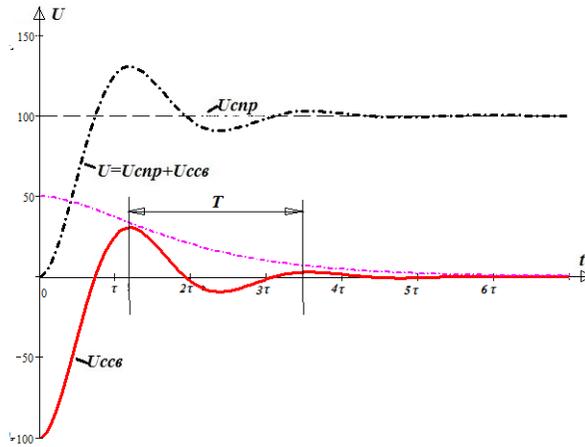


Рисунок 16 – Графики напряжений при колебательном режиме

### 1.2.7 Включение $r$ , $L$ , $C$ цепи на синусоидальное напряжение

Если цепь (рисунок 17) включается на синусоидальное напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha),$$

то принужденные составляющие тока и напряжения на конденсаторе определяются как:

$$\left. \begin{aligned} i_{np} = i_{ycm} &= \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) \\ u_{Cnp} = u_{Cycm} &= \frac{U_m}{z \omega C} \sin\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

где

$$\left. \begin{aligned} z &= \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \end{aligned} \right\}.$$

Свободные же составляющие этих величин будут иметь тот же характер, что и при включении цепи на постоянное напряжение.

Ограничимся рассмотрением переходного процесса только в цепи, в которой  $\left(r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$ , т. е. рассмотрением колебательного режима. В этом случае мы можем записать в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} u_c &= \frac{Um}{z\omega C} \sin\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{-\beta t} \sin(\omega_c t - \gamma) \\ i &= \frac{Um}{z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) + \\ &+ CAe^{-\beta t} [-\phi \sin(\omega_c t - \gamma) + \omega_c \cos(\omega_c t - \gamma)] \end{aligned} \right\} (67)$$

где  $\omega_c$  — угловая частота собственных колебаний (обозначаем ее здесь с индексом, чтобы отличить от угловой частоты  $\omega$  питающего напряжения).

$A \sin \gamma$  и  $A \cos \gamma$  определяются из начальных условий. Подставив их значения в (67) и проведя некоторые преобразования, получим:

$$\begin{aligned}
 u_c = & \frac{Um}{z\omega C} \sin\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \\
 & + \frac{Um \cos(\alpha - \varphi)}{z\omega C \sin \Theta} e^{-\beta t} \sin(\omega_c t - \Theta) - \\
 & - \frac{Um \sin(\alpha - \varphi)}{z\omega_c C} e^{-\beta t} \sin(\omega_c t)
 \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
 i = & \frac{Um}{z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) - \frac{Um \cos(\alpha - \varphi)}{z\omega\omega_c LC} e^{-\beta t} \sin(\omega_c t) + \\
 & + \frac{Um \sin(\alpha - \varphi)}{z \sin \Theta} e^{-\beta t} \sin(\omega_c t - \Theta)
 \end{aligned} \tag{69}$$

Как видно из этих выражений, свободные составляющие тока и напряжения на конденсаторе состоят каждая из двух колебаний, сдвинутых между собой на угол

$$\Theta = \arctg \frac{\omega_c}{\beta}.$$

Частоты свободной и принужденной составляющих в общем случае различны ( $\omega \neq \omega_c$ ). та из составляющих, частота которой меньше, служит криволинейной осью для другой составляющей, колеблющейся относительно нее. На рисунке 17 приведен график  $i(t)$  при  $\omega < \omega_c$ .

При каждом колебании часть энергии будет расходоваться, выделяясь в виде тепла в активном сопротивлении цепи  $r$ . Поэтому процесс будет затухающим.

По мере затухания свободной составляющей кривая тока (напряжения) приближается к принужденной составляющей, т.е. к кривой установившегося режима.

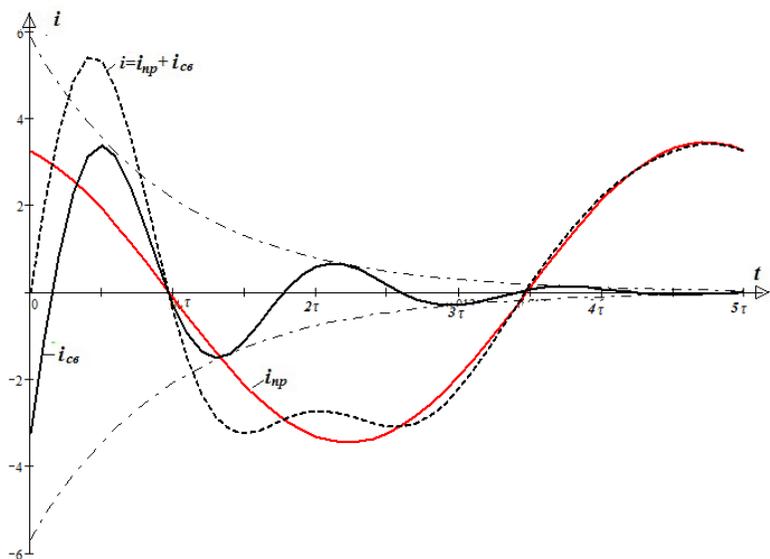


Рисунок 17 – Графики тока переходного процесса для условия  $\omega < \omega_c$

При близком совпадении частот  $\omega$  и  $\omega_c$  в цепи возникают **биения**, когда амплитуда гармонически меняющегося тока (напряжения) меняется также гармонически, но с очень малой частотой  $(\omega - \omega_c)/2$ , до тех пор, пока режим не станет установившимся (рисунок 18).

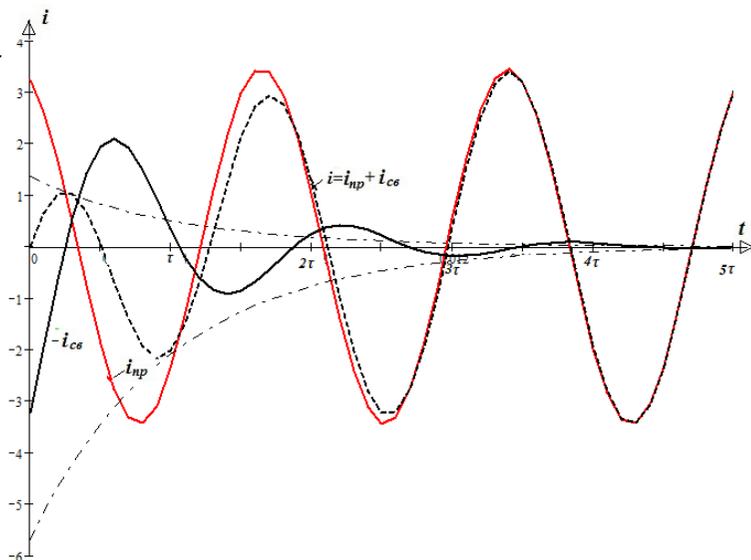


Рисунок 18 – График переходного процесса при близком совпадении частот собственных и вынужденных колебаний

### Контрольные вопросы

1. Какой процесс называется переходным процессом?
2. В каких электрических цепях возникают переходные процессы?
3. Какова длительность переходного процесса?
4. Какую величину называют постоянной времени?
5. От каких параметров зависит постоянная времени?
6. В каком случае, при включении цепи на синусоидальное напряжение, переходный процесс отсутствует?
7. Из каких условий определяется принужденная составляющая переходного процесса?
8. Условия возникновения апериодического переходного процесса?
9. Условия возникновения колебательного переходного процесса?
10. Частота собственных колебаний зависит от частоты приложенного напряжения?

### 1.3 Примеры расчета переходных процессов классическим методом

Рассмотрим примеры расчета переходных процессов классическим методом при включении цепи на постоянное и синусоидальное напряжение. Порядок расчета рассмотрен выше.

#### 1.3.1 Примеры расчета цепей первого порядка при постоянных и синусоидальных источниках

##### Задача 1.3.1

В цепи с постоянной ЕДС происходит замыкание (рисунок 19) :  $E = 100$  В,  $L = 0,01$  Гн и  $r = 2$  Ом. Определить ток и напряжение на индуктивности в переходном режиме.

**Решение:**

1. Записываем уравнение по второму закону Кирхгофа для послекоммутационной схемы

$$E = U_r + U_L$$

2. В полученном уравнении выделяем функцию переходного процесса. В цепи с индуктивностью, ток не может изменяться скачком. Получаем дифференциальное уравнение:

$$E = I \cdot r + L \frac{di}{dt}$$

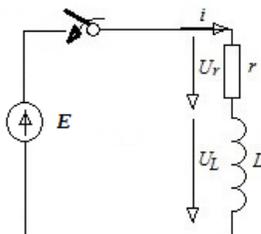


Рисунок 19 – Схема к задаче 1.3.1

3. Полное решение тока представим в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i(t) = i_{np} + i_{ce}$$

4. Принужденный ток равен току установившегося режима. Этот ток определяется для схемы после коммутации. Поскольку индуктивность не оказывает сопротивление постоянному току, принужденную составляющую вычисляем по закону Ома:

$$i_{np} = i_{ycm} = \frac{E}{r} = \frac{100}{2} = 50 \text{ A.}$$

5. Свободная составляющая определяется по выражению:

$$i_{ce} = Ae^{pt}$$

6. Для определения корня  $p$  составляем характеристическое уравнение:

$$0 = r + Lp$$

Откуда

$$p = -\frac{r}{L} = -\frac{2}{0,01} = -200 \text{ сек}^{-1}.$$

7. Для определения постоянной интегрирования  $A$  составляют уравнение по первому закону коммутации:

$$i(0_-) = i(0_+)$$

Ток до коммутации в цепи отсутствовал, а после коммутации ток в цепи равен сумме принужденной и свободной составляющих:

$$i(0_-) = 0 \text{ A};$$

$$i(0_+) = i_{np} + i_{св} = i_{np} + Ae^{pt}.$$

Записываем выражение полного тока для времени  $t=0$ :

$$0 = i_{np} + Ae^{pt} = i_{np} + A = 50 + A$$

Получаем

$$A = -50 \text{ A}.$$

Свободная составляющая тока изменяется по закону:

$$i_{св} = Ae^{pt} = -50e^{-200t}$$

8. Тогда полный ток переходного процесса можно выразить:

$$i(t) = 50 - 50e^{-200t}.$$

Для построения графика  $i(t)$  необходимо определить постоянную времени  $\tau$ :

$$\tau = \left| \frac{1}{p} \right| = \frac{L}{r} = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ сек.}$$

Тогда решение можно записать через  $\tau$ :

$$i(t) = i_{np} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = 50 - 50e^{-\frac{t}{0,005}}$$

Задаваясь временами  $0\tau$ ,  $\tau$ ,  $2\tau$ ,  $3\tau$ ,  $4\tau$ ,  $5\tau$  находим свободную составляющую тока:

$$i(0) = -50e^0 = -50 \text{ A};$$

$$i(\tau) = -50e^{-1} = \frac{-50}{2,72} = -18,38 \text{ A};$$

$$i(2\tau) = -50e^{-2} = \frac{-18,38}{2,72} = -6,75 \text{ A};$$

$$i(3\tau) = -50e^{-3} = \frac{-6,75}{2,72} = -2,48 \text{ A};$$

$$i(4\tau) = -50e^{-4} = \frac{-2,48}{2,72} = -0,91 \text{ A};$$

$$i(5\tau) = -50e^{-5} = \frac{-0,91}{2,72} = -0,335 \text{ A}.$$

По полученным точкам строим график свободной составляющей. Просуммировав ординаты принужденной и свободной составляющих получаем график тока переходного процесса

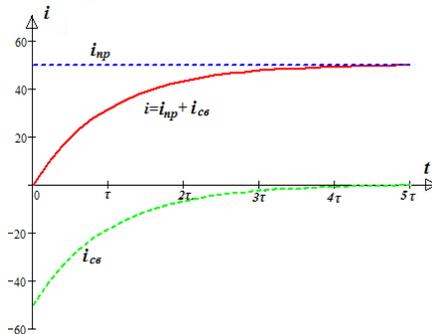


Рисунок 20 – Графики тока переходного процесса к задаче 1.3.1

9. Напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = 0,001 \frac{d(50 - 50e^{-200t})}{dt} = 0,01 \cdot (-50) \cdot (-200) \cdot e^{-200t} = 100 e^{-200t}$$

### Задача 1.3.2

В цепи с постоянной ЭДС замыкается одно из последовательных сопротивлений (рисунок 21) :  $E = 100$  В,  $L = 0,01$  Гн,  $R = 3$  Ом и  $r = 2$  Ом. Определить ток и напряжение на индуктивности в переходном режиме.

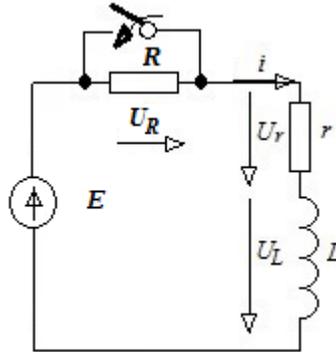


Рисунок 21 – Схема к задаче 1.3.2

### Решение:

Порядок расчета такой же, как в задаче 1.3.1.

1. Записываем уравнение по второму закону Кирхгофа для послекоммутационной схемы

$$E = U_r + U_L$$

2. Записываем дифференциальное уравнение:

$$E = I \cdot r + L \frac{di}{dt}$$

3. Полное решение тока представим в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i(t) = i_{np} + i_{ce}$$

4. Принужденный ток равен току установившегося режима:

$$i_{np} = i_{ycm} = \frac{E}{r} = \frac{100}{2} = 50 \text{ А.}$$

5. Свободная составляющая определяется по выражению:

$$i_{ce} = Ae^{pt}$$

6. Для определения корня  $p$  составляем характеристическое уравнение, используя дифференциальное уравнение (пункт второй) по методу эквивалентного уравнения:

$$0 = r + Lp$$

Откуда

$$p = -\frac{r}{L} = -\frac{2}{0,01} = -200 \text{ сек}^{-1}.$$

7. Для определения постоянной интегрирования  $A$  составляют уравнение по первому закону коммутации:

$$i(0_-) = i(0_+)$$

Ток до коммутации в цепи отсутствовал, а после коммутации ток в цепи равен сумме принужденной и свободной составляющих:

$$i(0_-) = \frac{E}{R+r} = \frac{100}{3+2} = 20 \text{ А};$$

$$i(0_+) = i_{np} + i_{ce} = i_{np} + Ae^{pt} \text{ А.}$$

Записываем выражение полного тока для времени  $t=0$ :

$$20 = i_{np} + Ae^{pt} = i_{np} + A = 50 + A.$$

Получаем

$$A = -30 \text{ A}.$$

Свободная составляющая тока изменяется по закону:

$$i_{cs} = Ae^{pt} = -30e^{-200t}$$

8. Тогда полный ток переходного процесса можно выразить:

$$i(t) = 50 - 30e^{-200t}.$$

9. Напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = 0,001 \frac{d(50 - 30e^{-200t})}{dt} = 0,001 \cdot (-30) \cdot (-200) \cdot e^{-200t} = 60e^{-200t}$$

Графики тока и напряжения на индуктивности приведены на рисунке 22.

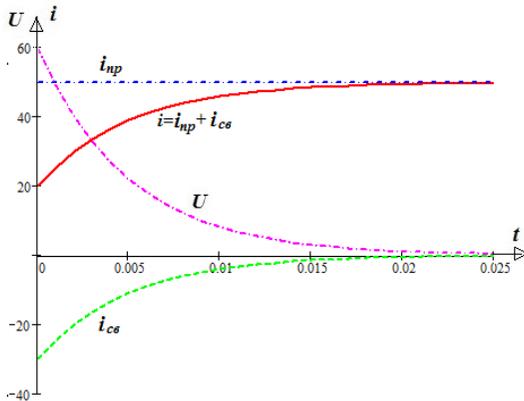


Рисунок 22 – Графики тока и напряжения на индуктивности в переходном процессе к задаче 1.3.2

### Задача 1.3.3

В цепи с постоянной ЭДС происходит замыкание (рисунок 23):  $E = 100$  В,  $C = 100 \cdot 10^{-6}$  Ф и  $r = 5$  Ом. Напряжение до коммутации на конденсаторе составляло  $U_0 = 20$  В. Определить напряжение на конденсаторе и ток в переходном режиме.

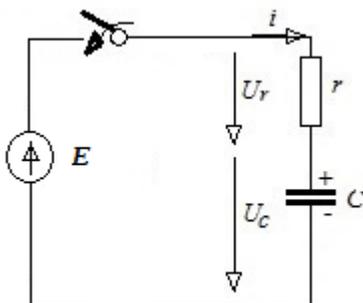


Рисунок 23 – Схема к задаче 1.3.3

#### Решение:

1. Записываем уравнение по второму закону Кирхгофа для послекоммутационной схемы

$$E = U_r + U_c$$

2. В полученном уравнении выделяем функцию переходного процесса. В цепи с емкостью, напряжение на конденсаторе не может изменяться скачком. Получаем дифференциальное уравнение:

$$E = I \cdot r + U_c = rC \frac{du_c}{dt} + U_c$$

так как ток в цепи с конденсатором определяется выражением:

$$i = C \frac{du_c}{dt}$$

3. Полное решение напряжения на конденсаторе представим в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cсв}$$

4. Принужденная составляющая равна напряжению установившегося режима. Это напряжение определяется для схемы после коммутации. В неразветвленной цепи конденсатор зарядится до величины приложенного напряжения:

$$u_{Cnp} = u_{Cуст} = E = 100 \text{ В.}$$

5. Свободная составляющая определяется по выражению:

$$u_{Cсв} = Ae^{pt}$$

6. Для определения корня  $p$  составляем характеристическое уравнение:

$$0 = rC + 1$$

Откуда

$$p = -\frac{1}{rC} = -\frac{1}{5 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -2000 \text{сек}^{-1}.$$

7. Для определения постоянной интегрирования  $A$  составляют уравнение по второму закону коммутации:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+)$$

Конденсатор до коммутации был заряжен до напряжения  $U_0$ , а после коммутации в цепи равен сумме принужденной и свободной составляющих:

$$u_C(0_-) = 20 \text{ В};$$

$$u_C(0_+) = u_{Cnp} + u_{Cсв} = u_{Cnp} + Ae^{pt}.$$

Записываем выражение полного напряжения для времени  $t=0$ :

$$20 = u_{Cnp} + Ae^{pt} = u_{Cnp} + A = 100 + A$$

Получаем

$$A = -80 \text{ В.}$$

Свободная составляющая напряжения изменяется по закону:

$$u_{Cсв} = Ae^{pt} = -80e^{-2000t}$$

8. Тогда полное напряжение на конденсаторе в переходный период можно выразить:

$$u(t) = 100 - 80e^{-2000t}.$$

9. Для построения графика  $u(t)$  необходимо определить постоянную времени  $\tau$ :

$$\tau = \left| \frac{1}{p} \right| = rC = 5 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,0005 \text{ сек.}$$

Тогда решение можно записать через  $\tau$ :

$$u_C(t) = u_{Cnp} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = 100 - 80e^{-\frac{t}{0,0005}}$$

Задаваясь временами  $0\tau$ ,  $\tau$ ,  $2\tau$ ,  $3\tau$ ,  $4\tau$ ,  $5\tau$  находим свободную составляющую напряжения:

$$u_C(0) = -80e^0 = -80 \text{ В;}$$

$$u_C(\tau) = -80e^{-1} = \frac{-80}{2,72} = -29,4 \text{ В;}$$

$$u_C(2\tau) = -80e^{-2} = \frac{-29,4}{2,72} = -10,8 \text{ В;}$$

$$u_C(3\tau) = -80e^{-3} = \frac{-10,8}{2,72} = -3,97 \text{ В};$$

$$u_C(4\tau) = -80e^{-4} = \frac{-3,97}{2,72} = -1,46 \text{ В};$$

$$u_C(5\tau) = -80e^{-5} = \frac{-1,46}{2,72} = -0,54 \text{ В}.$$

По полученным точкам строим график свободной составляющей. Просуммировав ординаты принужденной и свободной составляющих получаем график полного напряжения (рисунок 24).

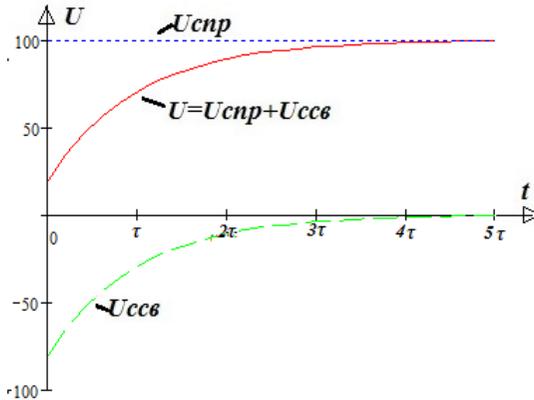


Рисунок 24 – Графики напряжения на конденсаторе в переходном периоде к задаче 1.3.3

10. Ток в цепи с конденсатором определяем по выражению:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(100 - 80e^{-2000t})}{dt} = 100 \cdot 10^{-6} \cdot (-80) \cdot (-2000)e^{-2000t} = 16e^{-2000t}$$

Задаваясь временами  $0\tau$ ,  $\tau$ ,  $2\tau$ ,  $3\tau$ ,  $4\tau$ ,  $5\tau$  находим свободную составляющую тока:

$$i(0) = 16e^0 = 16 \text{ A};$$

$$i(\tau) = 16e^{-1} = \frac{16}{2,72} = 5,88 \text{ A};$$

$$i(2\tau) = 16e^{-2} = \frac{5,88}{2,72} = 2,16 \text{ A};$$

$$i(3\tau) = 16e^{-3} = \frac{2,16}{2,72} = 0,79 \text{ A};$$

$$i(4\tau) = 16e^{-4} = \frac{0,79}{2,72} = 0,29 \text{ A};$$

$$i(5\tau) = 16e^{-5} = \frac{0,29}{2,72} = 0,1 \text{ A}.$$

По полученным точкам строим график тока (рисунок 25).

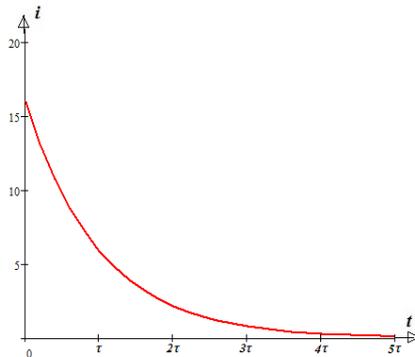


Рисунок 25 – График ток в цепи с конденсатором к задаче 1.3.3

### Задача 1.3.4

В цепи с постоянной ЭДС происходит короткое замыкание (рисунок 26) :  $E = 100 \text{ В}$ ,  $L = 0,01 \text{ Гн}$ ,  $r = 2 \text{ Ом}$  и  $r_1 = 3 \text{ Ом}$ . Определить ток через индуктивность в переходном режиме.

**Решение:**

Расчет данной цепи проводим аналогично рассмотренным выше. После замыкания катушки индуктивности накоротко, ЭДС в контуре с индуктивностью будет равна 0.

$$0 = U_r + U_L$$

$$0 = I \cdot r + L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = i_{np} + i_{ce}$$

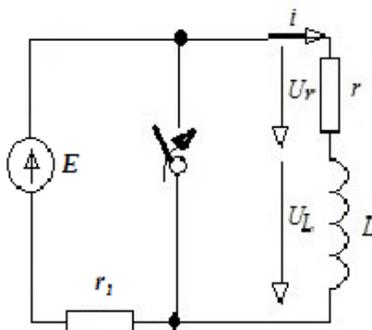


Рисунок 26 – Схема к задаче 1.3.4

В данном случае :

$$i_{np} = i_{уст} = 0 \text{ А.}$$

Свободная составляющая определяется по выражению:

$$i_{ce} = Ae^{pt}$$

Характеристическое уравнение примет вид:

$$0 = r + Lp$$

Откуда

$$p = -\frac{r}{L} = -\frac{2}{0,01} = -200 \text{ сек}^{-1}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  определяют из уравнение по первому закону коммутации:

$$i(0_-) = i(0_+)$$

Ток до коммутации в цепи ограничен двумя сопротивлениями, а после коммутации ток в цепи равен сумме принужденной и свободной составляющих:

$$i(0_-) = \frac{E}{r + r_1} = \frac{100}{2 + 3} = 20 \text{ A};$$

$$i(0_+) = i_{np} + i_{св} = i_{np} + Ae^{pt}.$$

Записываем выражение полного тока для времени  $t=0$ :

$$20 = i_{np} + Ae^{pt} = i_{np} + A = 0 + A$$

Получаем

$$A = 20 \text{ A}.$$

Свободная составляющая тока изменяется по закону:

$$i_{св} = Ae^{pt} = 20e^{-200t}$$

Полный ток переходного процесса будет равен свободной составляющей:

$$i(t) = 20e^{-200t}.$$

### Задача 1.3.5

В цепи с постоянной ЕДС происходит замыкание (рисунок 27).  $E = 100$  В,  $C = 100 \cdot 10^{-6}$  Ф,  $L = 0,01$  Гн и  $r = 50$  Ом.

Определить напряжение на конденсаторе и ток в переходном режиме.

#### Решение:

Порядок расчета для цепи с двумя энергонакопительными элементами аналогичен цепям с одним накопителем энергии. В этом случае расчет ведется через напряжение на конденсаторе:

$$E = U_r + U_L + U_C$$

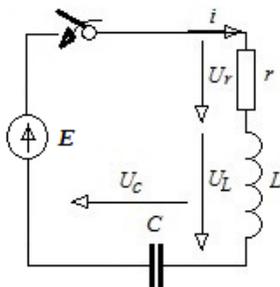


Рисунок 27 – Схема к задаче 1.3.5

Дифференциальное уравнение примет вид:

$$E = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + U_C$$

так как ток в цепи с конденсатором определяется выражением:

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

Полное решение напряжения на конденсаторе представим в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cce}$$

Принужденная составляющая равна напряжению установившегося режима:

$$u_{Cnp} = u_{Ccm} = E = 100 \text{ В.}$$

Свободная составляющая определяется по выражению:

$$u_{Cce} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Корни  $p_1$  и  $p_2$  вычисляются по выражению:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{U_C}{LC} = 0$$

Откуда

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = 0$$

$$p_1 = -208,7 \text{ сек}^{-1};$$

$$p_2 = -4791 \text{ сек}^{-1}.$$

Для определения постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  составляют систему уравнений по законам коммутации:

$$\left. \begin{aligned} u_C(0_-) &= u_C(0_+) \\ i(0_-) &= i(0_+) \end{aligned} \right\}$$

Конденсатор до коммутации не был заряжен и ток в цепи отсутствовал. После коммутации конденсатор зарядился полностью до приложенного напряжения и ток стал равен нулю:

$$u_C(0_-) = 0 \text{ В}; \quad i(0_-) = 0 \text{ А};$$

$$u_C(0_+) = u_{Cnp} + u_{Cce} = u_{Cnp} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$i(0_+) = i_{np} + Cp_1 A_1 e^{p_1 t} + Cp_2 A_2 e^{p_2 t}$$

Можно записать выражения для времени  $t=0$ :

$$0 = u_{Cnp} + u_{Cce} = u_{Cnp} + A_1 + A_2$$

$$0 = i_{np} + Cp_1 A_1 + Cp_2 A_2$$

Решив систему уравнений, определяют постоянные интегрирования:

$$A_1 = -104,5$$

$$A_2 = 4,5$$

Свободная составляющая напряжения изменяется по закону:

$$u_{Cce} = -104,5e^{-208,7t} + 4,5e^{-4791t}$$

Тогда полное напряжение на конденсаторе в переходный период можно выразить:

$$u(t) = 100 - 104,5e^{-208,7t} + 4,5e^{-4791t}$$

Графики напряжения на конденсаторе и его составляющих в переходном процессе представлены на рисунке 28.

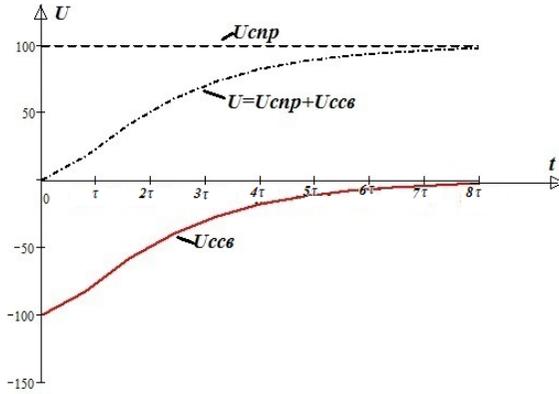


Рисунок 28 – Графики напряжения на конденсаторе при аperiodическом переходном процессе

Ток в цепи будет изменяться по закону:

$$i(t) = C p_1 A_1 e^{p_1 t} + C p_2 A_2 e^{p_2 t} = 2,18 e^{-208,7t} - 2,16 e^{-4791t}$$

График тока представлен на рисунке 29.

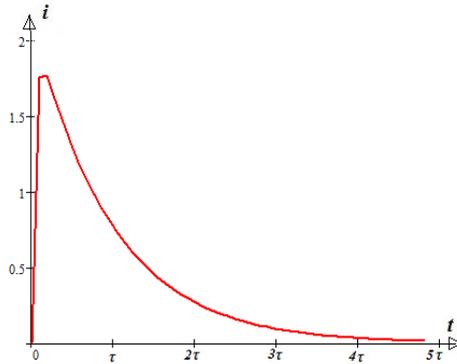


Рисунок 29 – График тока аperiodического переходного процесса

### Задача 1.3.6

В цепи с синусоидальной ЕДС происходит замыкание (рисунок 30) :  $e(t) = 100 \cdot \sin(314t + 33)$  В,  $L=0,01$  Гн и  $r = 2$  Ом. Определить закон изменения тока в переходном режиме.

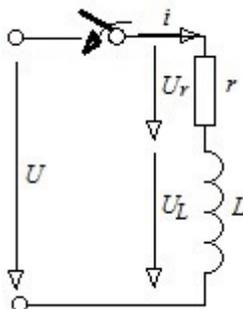


Рисунок 30 – Схема к задаче 1.3.6

### Решение:

Порядок расчета прежний.

Записываем уравнение по второму закону Кирхгофа для послекоммутационной схемы и затем записываем дифференциальное уравнение:

$$E = U_r + U_L$$

$$E = I \cdot r + L \frac{di}{dt}$$

Полное решение тока представим в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i(t) = i_{np} + i_{ce}$$

Принужденный ток равен току установившегося режима:

$$i_{np} = i_{ycm} = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) \cdot$$

Полное сопротивление и угол сдвига фаз определяют по выражениям:

$$Z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{2^2 + (314 \cdot 0.01)^2} = 3.723 \text{ Ом};$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{r}\right) = \arctg\frac{314 \cdot 0.01}{2} = 57,5^\circ.$$

Тогда принужденный ток будет представлен выражением:

$$i_{np} = i_{ycm} = \frac{100}{3,723} \sin(314t + 33 - 57,5) = 26,861 \cdot \sin(314t + -24,5)$$

Свободная составляющая определяется по выражению:

$$i_{св} = Ae^{pt}$$

Для определения корня  $p$  составляем характеристическое уравнение:

$$0 = r + Lp$$

Откуда

$$p = -\frac{r}{L} = -\frac{2}{0,01} = -200 \text{ сек}^{-1}.$$

Для определения постоянной интегрирования  $A$  составляют уравнение по первому закону коммутации:

$$i(0_-) = i(0_+)$$

Ток до коммутации в цепи отсутствовал, а после коммутации ток в цепи равен сумме принужденной и свободной составляющих:

$$i(0_-) = 0 \text{ A};$$

$$i(0_+) = i_{np} + i_{св} = i_{np} + Ae^{pt}.$$

Записываем выражение полного тока для времени  $t=0$ :

$$0 = i_{np} + Ae^{pt} = 26,861 \cdot \sin(314t + -24,5) + A$$

Получаем

$$A = 11,141 \text{ A}.$$

Свободная составляющая тока изменяется по закону:

$$i_{св} = Ae^{pt} = 11,141 e^{-200t}$$

Тогда полный ток переходного процесса можно выразить (рисунок 31):

$$i(t) = 26,861 \cdot \sin(314t - 24,5) + 11,141 e^{-200t}.$$

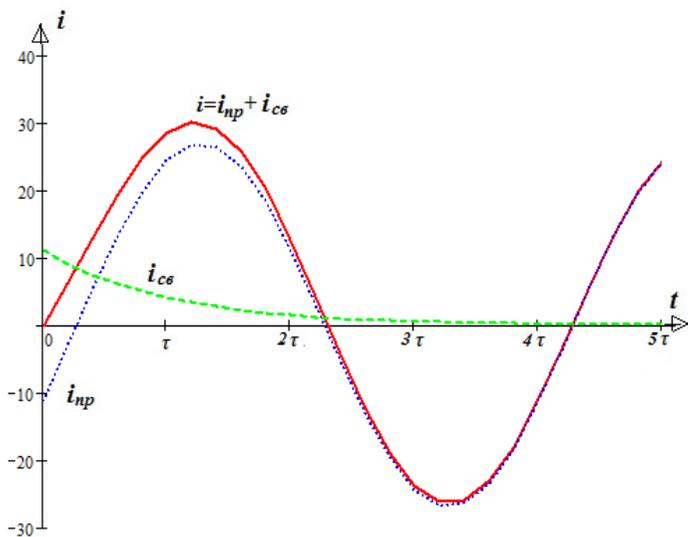


Рисунок 31 – Графики тока переходного процесса при включении цепи на синусоидальное напряжение

## 1.4 Применение программы Mathcad к расчету переходных процессов классическим методом

### Задача 1.4.1

Рассмотрим задачу 1.3.1 пункта 1.3 (рисунок 19).

#### Решение

Исходные данные

$$r := 2$$

$$L := 0.01$$

$$U := 100$$

Расчетная формула для определения принужденного тока

$$i_p := \frac{U}{r}$$

$$i_p = 50$$

Расчетная формула для определения корня характеристического уравнения

$$r + L \cdot p = 0 \text{ solve, } p \rightarrow -200.$$

$$p := -200$$

Расчетная формула для определения постоянной интегрирования

$$0 = ip + A \text{ solve, } A \rightarrow -50$$

$$A := -50$$

Расчетная формула для определения постоянной времени

$$\tau := \frac{-1}{p}$$

$$\tau = 5 \times 10^{-3}$$

Выражения принужденной и свободной составляющих, тока переходного процесса для построения графиков

$$ip(t) := ip$$

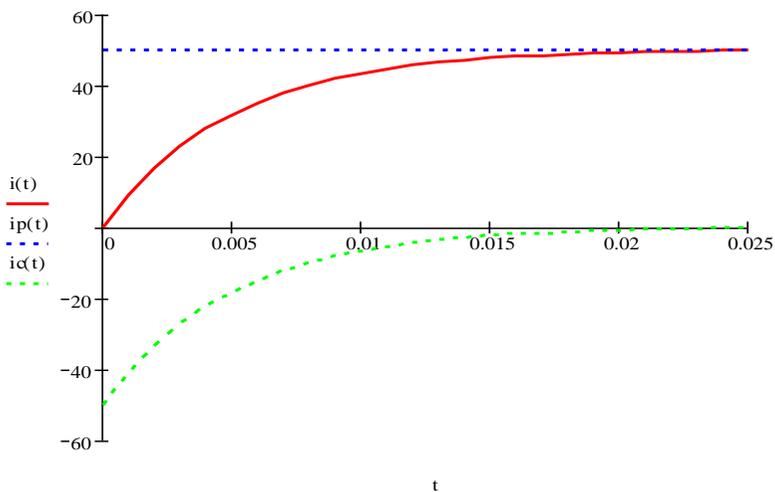
$$ic(t) := A \cdot e^{p \cdot t}$$

$$i(t) := ip(t) + ic(t)$$

Временной диапазон для построения графиков, выраженный через постоянную времени

$$t := 0, \frac{\tau}{5} \dots 5 \cdot \tau$$

## Графики составляющих тока и тока переходного процесса



### Задача 1.4.2

Рассмотрим задачу 1.3.2 пункта 1.3 (рисунок 21).

### Решение

Исходные данные

$$r := 3 \quad R := 2 \quad L := 0.01 \quad U := 100$$

Расчетная формула для определения принужденного тока

$$i_p := \frac{U}{R}$$

$$i_p = 50$$

Расчетная формула для определения корня характеристического уравнения

$$R + L \cdot p = 0 \text{ solve } , p \rightarrow -200.$$

$$p := -200$$

Расчетная формула для определения постоянной интегрирования

$$\frac{U}{r + R} = ip + A \text{ solve, } A \rightarrow -30$$
$$A := -30$$

Расчетная формула для определения постоянной времени

$$\tau := \frac{-1}{p}$$

$$\tau = 5 \times 10^{-3}$$

Выражения принужденной и свободной составляющих, тока переходного процесса для построения графиков

$$ip(t) := ip$$

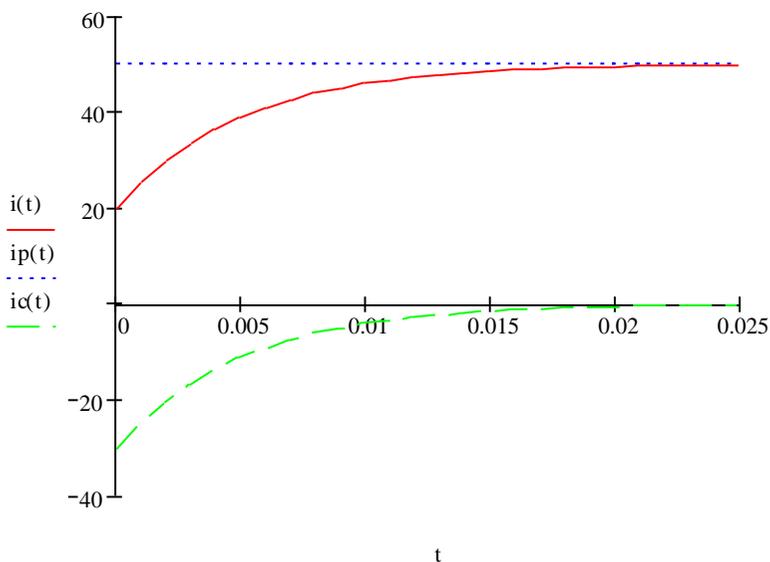
$$ic(t) := A \cdot e^{p \cdot t}$$

$$i(t) := ip(t) + ic(t)$$

Временной диапазон для построения графиков, выраженный через постоянную времени

$$t := 0, \frac{\tau}{5} \dots 5 \cdot \tau$$

Графики составляющих тока и тока переходного процесса



### Задача 1.4.3

Рассмотрим задачу 1.3.3 пункта 1.3 (рисунок 23).

#### Решение

Исходные данные

$$r := 5 \quad U_0 := 20 \quad C := 100 \cdot 10^{-6} \quad U := 100$$

Расчетная формула для определения принужденного напряжения

$$U_{cp} := U$$

$$U_{cp} = 100$$

Расчетная формула для определения корня характеристического уравнения

$$1 + r \cdot C \cdot p = 0 \text{ solve } , p \rightarrow -2000$$

$$p := -2000$$

Расчетная формула для определения постоянной интегрирования

$$U_0 = U_{cp} + A \text{ solve, } A \rightarrow -80$$

$$A_1 := -80$$

Расчетная формула для определения постоянной времени

$$\tau := \frac{-1}{p}$$

$$\tau = 5 \times 10^{-4}$$

Выражения принужденной и свободной составляющих, напряжения переходного процесса для построения графиков

$$U_{cp}(t) := U_{cp}$$

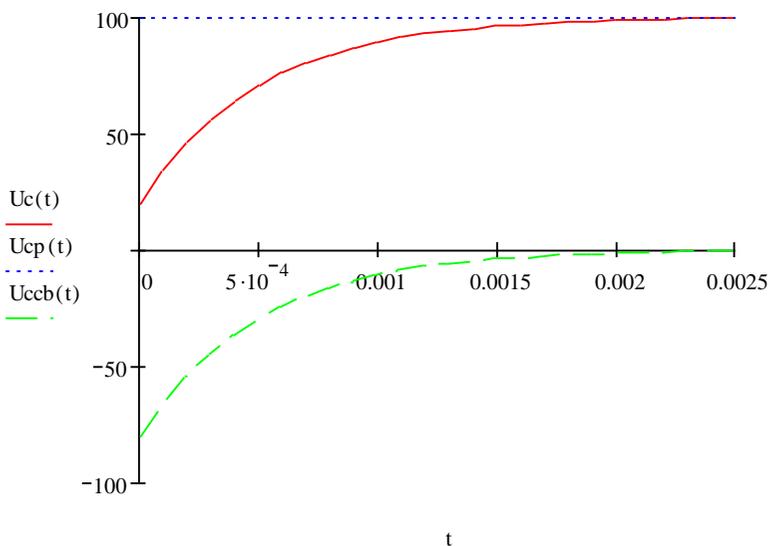
$$U_{ccb}(t) := A \cdot e^{p \cdot t}$$

$$U_c(t) := U_{cp}(t) + U_{ccb}(t)$$

Временной диапазон для построения графиков, выраженный через постоянную времени

$$t := 0, \frac{\tau}{5} \dots 5 \cdot \tau$$

Графики составляющих тока и тока переходного процесса



#### Задача 1.4.4

Рассмотрим задачу 1.3.4 пункта 1.3 (рисунок 26).

#### Решение

Исходные данные

$$r := 2 \quad r_1 := 3 \quad L := 0.01 \quad U := 10C$$

Расчетная формула для определения принужденного тока

$$i_p := 0$$

$$i_p = 0$$

Расчетная формула для определения корня характеристического уравнения

$$r + L \cdot p = 0 \text{ solve } p \rightarrow -200.$$

$$p := -200$$

Расчетная формула для определения тока до коммутации

$$i := \frac{E}{r + r1}$$

$$i = 20$$

Расчетная формула для определения постоянной интегрирования

$$A := 20 = ip + A \text{ solve } , A \rightarrow 20$$

$$A = 20$$

Расчетная формула для определения постоянной времени

$$\tau := \frac{-1}{p}$$

$$\tau = 5 \times 10^{-3}$$

Поскольку принужденная составляющая тока равна нулю, а следовательно ток переходного процесса равен свободной составляющей, запишем выражение свободной составляющей тока, тока переходного процесса для построения графика

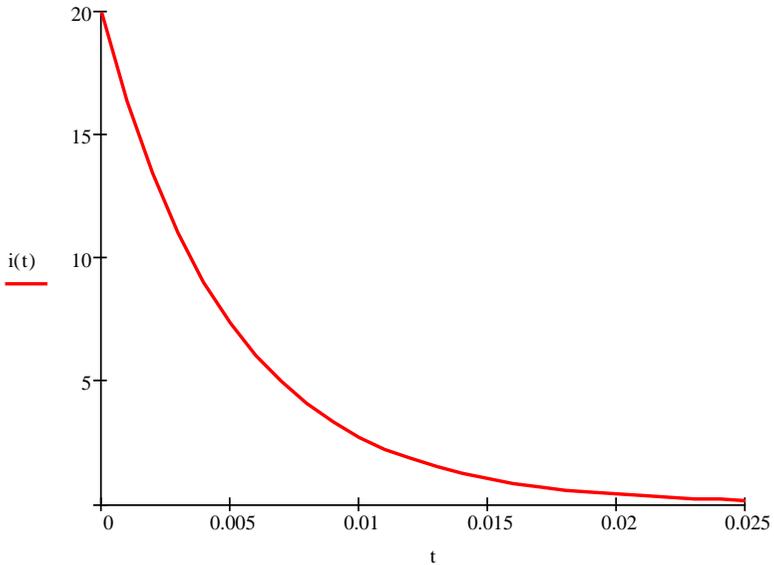
$$ic(t) := A \cdot e^{p \cdot t}$$

$$i(t) := ic(t)$$

Временной диапазон для построения графиков, выраженный через постоянную времени

$$t := 0, \frac{\tau}{5} \dots 5 \cdot \tau$$

График тока переходного процесса



### Задача 1.4.5

Рассмотрим задачу 1.3.5 пункта 1.3 (рисунок 27).

### Решение

Исходные данные

$$r := 50 \quad C := 100 \cdot 10^{-6} \quad U := 100 \quad L := 0.01$$

Расчетные формулы для определения принужденного напряжения и тока

$$U_{\text{ср}} := U$$

$$U_{cp} = 100$$

$$i_p := 0$$

Расчетные формулы для определения корней характеристического уравнения

$$p1 := \frac{-r}{2 \cdot L} + \sqrt{\frac{r^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}} = p \text{ solve, } p \rightarrow -208.712152522079996$$

$$p1 = -208.712$$

$$p2 := \frac{-r}{2 \cdot L} - \sqrt{\frac{r^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}} = p \text{ solve, } p \rightarrow -4791.28784747792000$$

$$p2 = -4.791 \times 10^3$$

Расчетные формулы для определения постоянных интегрирования

Given

$$0 = U_{cp} + A1 + A2$$

$$0 = C \cdot A1 \cdot p1 + C \cdot A2 \cdot p2$$

$$\begin{pmatrix} A1 \\ A2 \end{pmatrix} := \text{Find}(A1, A2) \rightarrow \begin{pmatrix} -104.554472558998095 \\ 4.554472558998095395 \end{pmatrix}$$

$$A1 = -104.554$$

$$A2 = 4.554$$

Расчетная формула для определения постоянной времени

$$\tau := \frac{-1}{p}$$

$$\tau = 4.791 \times 10^{-3}$$

Выражения принужденной и свободной составляющих, напряжения переходного процесса для построения графиков

$$U_{cp}(t) := U_{cp}$$

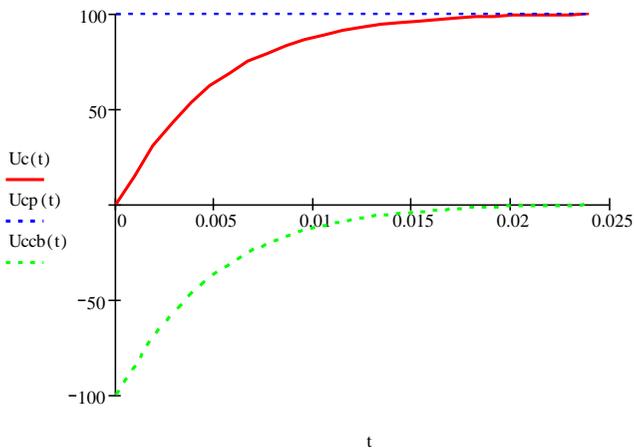
$$U_{ccb}(t) := A1 \cdot e^{p1 \cdot t} + A2 \cdot e^{p2 \cdot t}$$

$$U_c(t) := U_{cp}(t) + U_{ccb}(t)$$

Временной диапазон для построения графиков, выраженный через постоянную времени

$$t := 0, \frac{\tau}{5} \dots 5 \cdot \tau$$

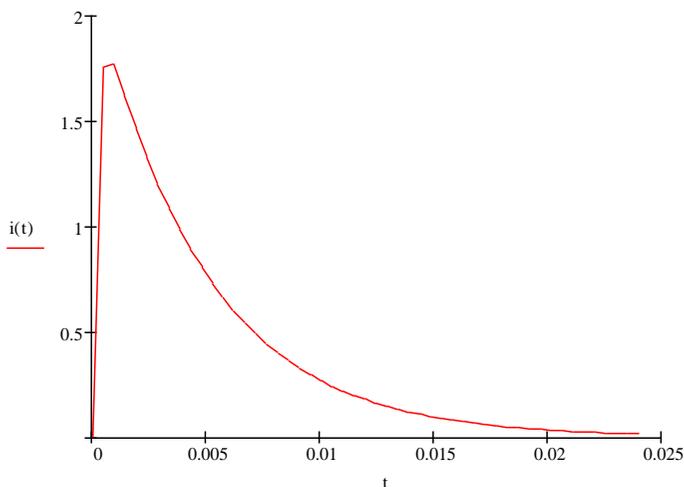
Графики составляющих напряжения и напряжение на конденсаторе в переходном периоде



Принужденная составляющая тока равна нулю, поэтому ток переходного процесса равен свободной составляющей. Выражение тока переходного процесса для построения графиков

$$i(t) := (C \cdot p1 \cdot A1 \cdot e^{p1 \cdot t} + C \cdot p2 \cdot A2 \cdot e^{p2 \cdot t})$$

График тока переходного процесса



### Задача 1.4.6

Рассмотрим задачу 1.3.6 пункта 1.3 (рисунок 30).

#### Решение

Исходные данные

$$r := 2 \quad L := 0.01 \quad w := 314 \quad u := 100 \quad \alpha := 33\text{-deg}$$

$$U(t) := u \cdot \sin(w \cdot t + \alpha)$$

Расчетные формулы для определения полного сопротивления цепи и угла сдвига фаз между активной и реактивной составляющими

$$Z := \sqrt{r^2 + (w \cdot L)^2} \quad Z = 3.723$$

$$\phi := \text{atan}\left(\frac{w \cdot L}{r}\right)$$

$$\phi = 57.5051 \text{deg}$$

Расчетная формула для определения принужденного тока

$$ip(t) := \frac{u}{Z} \cdot \sin(w \cdot t + \alpha - \phi)$$

$$ip(t) \text{ float}, 3 \rightarrow 26.9 \sin(314 \cdot t + 33 \cdot \text{deg} - 1.00)$$

Расчетная формула для определения корня характеристического уравнения

$$p := r + L \cdot p = 0 \text{ solve}, p \rightarrow -200.$$

$$p = -200$$

Расчетная формула для определения постоянной интегрирования

$$A := 0 = \frac{u}{Z} \cdot \sin(\alpha - \phi) + A \text{ solve}, A \rightarrow \cdot$$

$$A = 11.141$$

Расчетная формула для определения постоянной времени

$$\tau := \frac{-1}{p}$$

$$\tau = 5 \times 10^{-3}$$

Выражения принужденной и свободной составляющих, тока переходного процесса для построения графиков

$$ip(t) := \frac{u}{Z} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha - \phi)$$

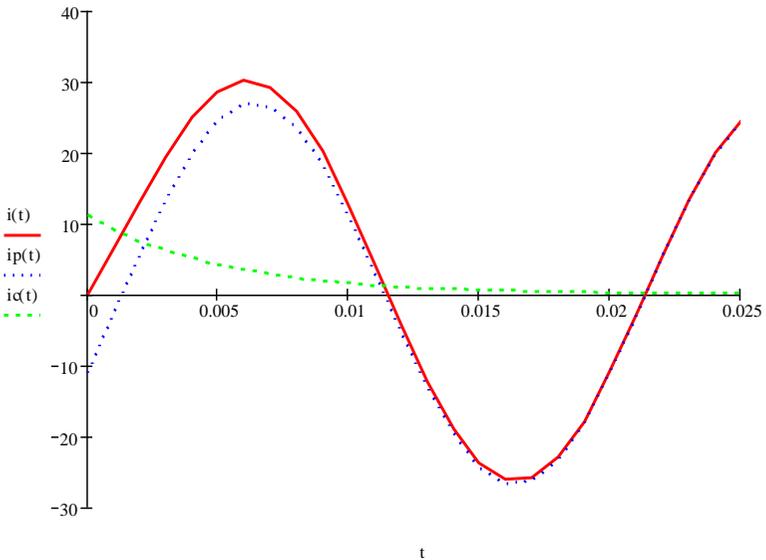
$$ic(t) := A \cdot e^{P \cdot t}$$

$$i(t) := ip(t) + ic(t)$$

Временной диапазон для построения графиков, выраженный через постоянную времени

$$t := 0, \frac{\tau}{5} \dots 5 \cdot \tau$$

Графики составляющих тока и тока переходного процесса



## 1.5 Тесты

Примерные тесты по теме «Переходные процессы в электрических цепях»:

1. Переходный процесс в электрической цепи можно представить в виде:

- A) установившегося процесса
- B) свободного процесса
- C) установившегося и свободного процессов
- D) неустановившегося и несвободного процессов
- E) свободного и неустановившегося процессов

2.  $i_L(0_-) = i_L(0_+)$ - приведенное уравнение описывает:

- A) первый закон коммутации
- B) второй закон коммутации
- C) закон полного тока
- D) ток переходного процесса
- E) ток до начала коммутации

3.  $U_c(0_-) = U_c(0_+)$ - приведенное уравнение описывает:

- A) первый закон коммутации
- B) второй закон коммутации
- C) напряжение переходного процесса
- D) напряжение до начала коммутации
- E) правильный ответ отсутствует

4. Что называется постоянной времени цепи  $\tau$ ?

- A) это время, за которое свободная составляющая уменьшается в  $e$  (основание натурального логарифма) раз
- B) это время, за которое заканчивается переходный процесс
- C) это время коммутации
- D) это время разряда конденсатора
- E) это время заряда конденсатора

5. Длительность переходного процесса, выраженная через  $\tau$ , составляет:

- A)  $\tau$
- B)  $2\tau$
- C)  $3\tau$
- D)  $4\tau$
- E)  $5\tau$

6. В каких электрических цепях возникают переходные процессы?

- A) в электрических цепях, содержащих энергонакопительные элементы
- B) в электрических цепях, не содержащих энергонакопительные элементы
- C) в электрических цепях постоянного тока с резистивными элементами
- D) в электрических цепях переменного тока, содержащих только резистивные элементы
- E) в трехфазных электрических цепях, содержащих только резистивные элементы

7. Ток на индуктивности непосредственно до коммутации равен току на индуктивности после коммутации:

- A) первый закон коммутации
- B) второй закон коммутации
- C) закон полного тока
- D) ток переходного процесса
- E) правильный ответ отсутствует

8.  $i = i_n + i_{св}$  - приведенное уравнение описывает:

- A) первый закон коммутации
- B) второй закон коммутации
- C) закон полного тока
- D) ток переходного процесса
- E) ток до начала коммутации

9.  $U_c = U_{\pi} + U_{св}$ - приведенное уравнение описывает:

- A) первый закон коммутации
- B) второй закон коммутации
- C) закон полного тока
- D) напряжение в переходном периоде на конденсаторе
- E) напряжение до начала коммутации

10. Напряжение на конденсаторе непосредственно до коммутации равно напряжению на конденсаторе после коммутации:

- A) первый закон коммутации
- B) второй закон коммутации
- C) напряжение переходного процесса
- D) напряжение до начала коммутации

11. Для расчета и анализа переходных процессов в электрических цепях применяются следующие методы:

- A) классический
- B) операторный
- C) частотный
- D) с помощью интеграла Дюамеля
- E) все выше перечисленные

12. Ток до начала коммутации обозначают:

- A)  $i(0_+)$
- B)  $i(0_-)$
- C)  $i(0)$
- D)  $i$
- E)  $i(t)$

13. Ток после коммутации обозначают:

- A)  $i(0_+)$
- B)  $i(0_-)$
- C)  $i(0)$
- D)  $i$
- E)  $i(+0)$

14. Выражение свободной составляющей при переходном процессе:

A)  $i_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$

B)  $i_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k e$

C)  $i_{\text{св}} = A_k e^{p_k t}$

D)  $A_k e^t$

Е) соответствует току установившегося режима после коммутации

15. Выражение принужденной составляющей при переходном процессе:

A)  $i_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$

B)  $i_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k e$

C)  $i_{\text{св}} = A_k e^{p_k t}$

D)  $A_k e^t$

Е) соответствует току установившегося режима после коммутации

16. В каком случае ток переходного процесса будет равен току установившегося режима, при включении цепи на синусоидальное напряжение, если начальная фаза напряжения- $\alpha$ , угол сдвига фаз-  $\varphi$ :

A)  $\alpha - \varphi = 0$

B)  $\alpha - \varphi = \pm \pi/2$

C)  $\alpha + \varphi = 0$

D)  $\alpha + \varphi = \pm \pi/2$

E)  $\alpha + \varphi = \pm \pi/3$

17. В каком случае ток переходного процесса принимает наибольшее значение, при включении цепи на синусоидальное напряжение, если начальная фаза напряжения-  $\alpha$ , угол сдвига фаз-  $\varphi$ :

- A)  $\alpha - \varphi = 0$
- B)  $\alpha - \varphi = \pm \pi/2$
- C)  $\alpha + \varphi = 0$
- D)  $\alpha + \varphi = \pm \pi/2$
- E)  $\alpha + \varphi = \pm \pi/3$

18. Какому соотношению соответствует аperiodический режим переходного процесса:

- A)  $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- B)  $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- C)  $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- D)  $r > 3\sqrt{\frac{L}{C}}$
- E)  $r > \sqrt{\frac{L}{C}}$

19. Какому соотношению соответствует периодический режим переходного процесса:

- A)  $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- B)  $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- C)  $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ;
- D)  $r > 3\sqrt{\frac{L}{C}}$

E)  $r > \sqrt{\frac{L}{C}}$

20. Какому соотношению соответствует колебательный режим переходного процесса:

A)  $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

B)  $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

C)  $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

D)  $r > 3\sqrt{\frac{L}{C}}$

E)  $r > \sqrt{\frac{L}{C}}$

21. По какому выражению определяют коэффициент затухания колебательного режима:

A)  $\beta = \frac{r}{L}$

B)  $\beta = \frac{r}{2L}$

C)  $\beta = \frac{r}{C}$

D)  $\beta = \frac{r}{CL}$

E)  $\beta = \frac{r}{2CL}$

22. По какому выражению определяют угловую частоту собственных колебаний колебательного режима:

A)  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{r^2}{4L^2}}$

$$B) \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}$$

$$C) \omega = \sqrt{\frac{1}{C} - \frac{r^2}{L^2}}$$

$$D) \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{r}{4L^2}}$$

$$E) \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{r^2}{4L}}$$

23. Какова длительность переходного процесса в последовательной цепи, содержащей индуктивность  $L = 0.01$  Гн и резистор  $R = 1$  Ом?

A) 0,01 с

B) 0,05 с

C) 100 с

D) 500 с

E) 10 с

24. Какова постоянная времени переходного процесса в последовательной цепи, содержащей индуктивность  $L = 0.01$  Гн и резистор  $R = 1$  Ом?

A) 0,01 с

B) 0,05 с

C) 100 с

D) 500 с

E) 10 с

25. Какова длительность переходного процесса в последовательной цепи, содержащей конденсатор  $C = 500$  мкФ и резистор  $R = 1$  кОм?

A) 5 с

B) 2,5 с

C) 1 с

D) 0,5 с

Е) 0,01 с

26. Какова постоянная времени переходного процесса в последовательной цепи, содержащей конденсатор  $C=500$  мкФ и резистор  $R=1$  кОм?

А) 5 с

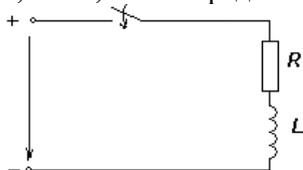
В) 2,5 с

С) 1 с

Д) 0,5 с

Е) 0,01 с

27. В электрической цепи напряжение источника  $U=100$  В,  $R=5$  Ом,  $L=0,1$  Гн. Определить ток в первый момент включения.



А) 5 А

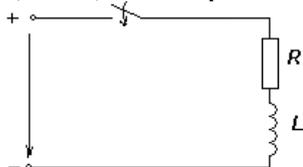
В) 20 А

С) 0,02 А

Д) -200 А

Е) 0

28. В электрической цепи напряжение источника  $U=100$  В,  $R=5$  Ом,  $L=0,1$  Гн. Определить принужденную составляющую.



А) 5 А

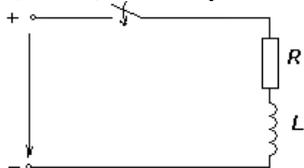
В) 20 А

С) 0,02 А

Д) -200 А

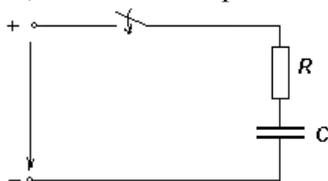
Е) 0

29. В электрической цепи напряжение источника  $U=100$  В,  $R=5$  Ом,  $L=0,1$  Гн. Определить время переходного процесса.



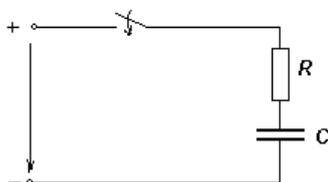
- A) 5 с
- B) 20 с
- C) 0,02 с
- D) -200 с
- E) 0,1 с

30. В электрической цепи напряжение источника  $U=100$  В,  $R=5$  Ом,  $C=1$  мкФ. Определить ток в первый момент включения.



- A) 5 А
- B) 20 А
- C) 0,02 А
- D)  $\infty$
- E) 0

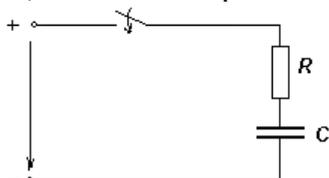
31. В электрической цепи напряжение источника  $U=100$  В,  $R=100$  Ом,  $C=100$  мкФ. Определить напряжение в первый момент включения.



- A) 5 В
- B) 20 В
- C) 0,02 В

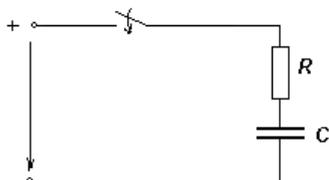
- D) 100 В
- E) 0

32. В электрической цепи напряжение источника  $U=100$  В,  $R=5$  Ом,  $C=1$  мкФ. Определить ток в первый момент включения.



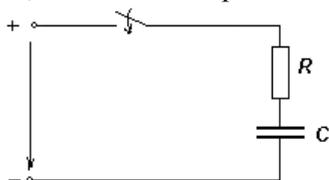
- A) 5 А
- B) 20 А
- C) 0,02 А
- D)  $\infty$
- E) 0

33. В электрической цепи напряжение источника  $U=100$  В,  $R=5$  Ом,  $C=1$  мкФ. Определить напряжение установившегося режима.



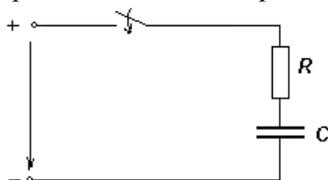
- A) 5 В
- B) 20 В
- C) 0,02 В
- D) 100 В
- E) 0

34. В электрической цепи напряжение источника  $U=100$  В,  $R=5$  Ом,  $C=1$  мкФ. Определить время переходного процесса.



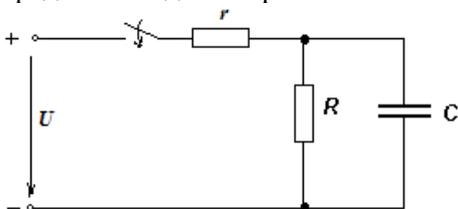
- A) 5 с
- B) 20 с
- C) 0,02 с
- D) 0,05 с
- E) 0

35. При замыкании электрической цепи до какого значения зарядится конденсатор?



- A) до величины приложенного напряжения
- B) величина напряжения зависит от времени заряда
- C) величина напряжения зависит от падения напряжения на сопротивлении  $R$
- D) величина напряжения зависит от приложенного напряжения и падения напряжения на сопротивлении  $R$
- E) величина напряжения зависит от соотношения приложенного напряжения и падения напряжения на сопротивлении  $R$

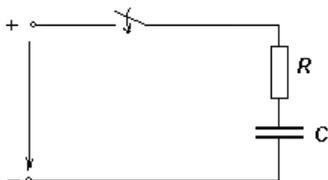
36. При замыкании электрической цепи до какого значения зарядится конденсатор?



- A) до величины приложенного напряжения
- B) величина напряжения зависит от времени заряда
- C) величина напряжения зависит от падения напряжения на сопротивлении  $R$
- D) величина напряжения зависит от приложенного напряжения и падения напряжения на сопротивлении  $R$

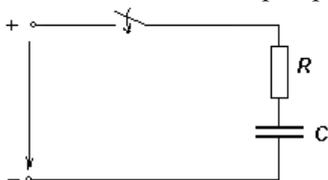
Е) величина напряжения зависит от соотношения приложенного напряжения и падения напряжения на сопротивлении  $R$

37. Ток на конденсаторе в первый момент после коммутации равен:



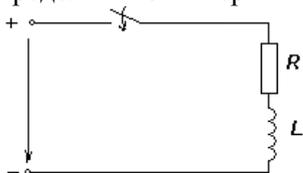
- А) току установившегося режима
- В) нулю
- С) току короткого замыкания
- Д) току при коротком замыкании конденсатора
- Е) току, изменяющемуся по экспоненциальному закону

38. Ток на конденсаторе при полном заряде конденсатора равен:



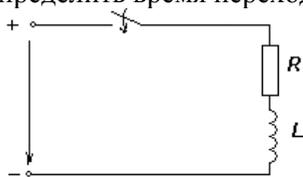
- А) току установившегося режима
- В) нулю
- С) току короткого замыкания
- Д) току при коротком замыкании конденсатора
- Е) току, изменяющемуся по экспоненциальному закону

39. В электрической цепи, включенной на синусоидальное напряжение  $U=100\sin(312t+30)$  В,  $R=5$  Ом,  $L=0,1$  Гн. Определить ток в первый момент включения.



- A) 5 A
- B) 20 A
- C) 0,02 A
- D) -200 A
- E) 0

40. В электрической цепи, включенной на синусоидальное напряжение  $U=100\sin(312t+30)$  В,  $R=5$  Ом,  $L=0,1$  Гн. Определить время переходного процесса.



- A) 5 с
- B) 20 с
- C) 0,02 с
- D) -200 с
- E) 0,1 с

## 2.1 Операторный метод расчета переходных процессов

### 2.1.1 Теоретические основы операторного метода

Идея операторного метода заключается в том, что функции вещественной переменной—времени  $t$ —заменяются функциями некоторой комплексной переменной, называемой оператором:

$$p = s + j \delta, \quad (70)$$

В результате этой замены дифференциально-интегральные уравнения, описывающие соотношение токов и напряжений при переходном режиме, заменяются уравнениями алгебраическими. Поскольку решение системы алгебраических уравнений много легче, чем решение системы дифференциально-интегральных уравнений, то преимущества операторного метода очевидны, и

этот метод нашел самое широкое применение не только в электротехнике, но и в других областях науки.

Заданная функция времени  $f(t)$  называется **исходной функцией**, или **оригиналом**. Функция  $F(p)$ , полученная в результате замены переменной, называется **изображением**. Эти функции не равны друг другу. Поэтому между ними ставится знак не равенства, а соответствия:

$$f(t) = F(p) \quad (71)$$

Расчет переходного процесса операторным методом можно разделить на два этапа:

1. Перевод заданных временных функций в операторные, что позволяет свести расчет к решению системы алгебраических уравнений.

2. Перевод операторных функций, полученных в результате проведенного расчета, во временные, то есть определение действительных значений токов, напряжений и т. д.

Первая часть задачи решается с помощью преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (72)$$

или преобразования Карсона

$$F_K(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad , \quad (73)$$

о

где  $t$  — время;

$p = s + j\delta$  — оператор;

$f(t)$  — заданный оригинал;

$F(p)$  — изображение.

Для того, чтобы можно было провести преобразование (72) или (73), функция  $f(t)$  при  $t > 0$  должна быть непрерывной или кусочно-непрерывной, а также должна иметь ограниченный

порядок возрастания, то есть для данной функции можно указать такие положительные числа  $M$  и  $s_0$ , при которых

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}, \quad (74)$$

поэтому при  $s_0 < s = \text{Re}(p)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-pt} f(t)] \rightarrow 0. \quad (75)$$

При этих ограничениях интеграл  $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$  существует, а

значит можно найти операторное изображение функции. Следует отметить, что и для постоянных, и для синусоидальных, и для прочих других практически используемых токов и напряжений эти ограничения выполняются, то есть к их расчету применим операторный метод.

При использовании для перехода от оригинала к изображению преобразования Карсона (73), известного еще под названием преобразования Карсона—Хевисайда, размерности оригиналов и изображений совпадают, а постоянная величина остается постоянной. Это, естественно, упрощает и расчет, и его проверку.

Однако в значительной части литературы отдается предпочтение преобразованию Лапласа (72), которое соответствует преобразованию Фурье, а это последнее служит основой частотного метода, весьма широко используемого для анализа цепей (этот метод будет рассмотрен ниже). Поскольку принципиального различия между системами Лапласа и Карсона — Хевисайда нет, и, научившись пользоваться одной из них, можно при желании без особого труда перейти к пользованию другой системой, предложено пользоваться преобразованием Лапласа, принятым в большинстве учебников, тем более, что и в специальных главах высшей математики также дается это преобразование.

Вторая часть задачи — отыскание оригинала по известному изображению — может быть решена с помощью обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s_0 - j\infty}^{s_0 + j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (76)$$

На основании (76) выведен ряд практических приемов обратного перехода, в которые этот интеграл входит только в скрытом виде.

### 2.1.2 Операторные изображения простейших функций и некоторые теоремы операторного исчисления

**1. Изображение постоянной величины.** Если рассматриваемая величина не зависит от времени,

$$f(t) = A = const,$$

то ее изображение по (72)

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} A dt = A \left| \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{\infty} = \frac{A}{p} \quad (77)$$

оказывается зависящим от нового аргумента — оператора  $p$ .

Изменилась и размерность. Размерность оператора  $[p] = c^{-1}$ , поэтому размерность изображения равна размерности оригинала, умноженной на размерность времени.

**2. Изображение суммы двух функций (свойство линейности)**

Пусть известны изображения двух функций

$$f_1(t) = F_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) dt$$

$$f_2(t) = F_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt$$

и нужно найти изображение  $F(p)$  функции  $f(t)$ , равной их сумме (72).

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} [f_1(t) + f_2(t)] dt = \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt = F_1(p) + F_2(p)
 \end{aligned}$$

То же можно сказать и об изображении разности. Таким образом.

$$f_1(t) \pm f_2(t) = F_1(p) \pm F_2(p). \quad (78)$$

**3. Изображение показательной функции.** Если задана функция  $f(t) = e^{-at}$ , где  $a$  — постоянная величина, то изображение

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-at} dt = \left| \frac{e^{-(p+a)t}}{-(p+a)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p+a}$$

Очевидно, что в случае положительной степени в знаменателе изображения будет не сумма, а разность. Следовательно,

$$e^{\pm at} = \frac{1}{p \mp a}. \quad (79)$$

#### 4. Изображение синуса и косинуса.

Зная изображение показательной функции и свойство линейности преобразования Лапласа, можно определить изображения  $\sin wt$  и  $\cos wt$ , не прибегая к (72).

В самом деле, по формулам Эйлера

$$\sin wt = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (80)$$

$$\cos wt = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (81)$$

В соответствии с (78) и (79)

$$\begin{aligned} \sin wt &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{p-jw} - \frac{1}{p+jw} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{p+jw-p+jw}{p^2+w^2} = \\ &= \frac{w}{p^2+w^2} \quad .(82) \\ \cos wt &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-jw} + \frac{1}{p+jw} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p+jw+p-jw}{p^2+w^2} = \\ &= \frac{p}{p^2+w^2} \end{aligned}$$

Используя (81), легко найти изображение синуса с начальным фазовым углом  $\alpha \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \sin wt &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{p-jw} - \frac{1}{p+jw} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{p+jw-p+jw}{p^2+w^2} = \\ &= \frac{w}{p^2+w^2} \\ \cos wt &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-jw} + \frac{1}{p+jw} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p+jw+p-jw}{p^2+w^2} = \\ &= \frac{p}{p^2+w^2} \end{aligned}$$

## 5. Изображение производной (теорема дифференцирования) .

Пусть известно, что  $t(t) = F(p)$ . Найдем изображение первой производной

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) \quad (83)$$

Интегрируем по частям:

$$\int_A^B u dv = |u \cdot v|_A^B - \int_A^B v du$$

Если принять

$$e^{-pt} = u,$$

$$df(t) = dv,$$

то

$$v = f(t)$$

$$du = -pe^{-pt} dt,$$

и интеграл (83) примет вид:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) = \left[ e^{-pt} f(t) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f(t) pe^{-pt} dt =$$

$$= -f(0) + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

так как в соответствии с (75)

$$\left[ e^{-pt} f(t) \right]_{t=\infty} = 0.$$

Второе слагаемое представляет собой не что иное, как изображение  $F(p)$ , умноженное на оператор  $p$ .

Окончательно имеем

$$f'(t) = pF(p) - f(0). \quad (84)$$

В частном случае, когда  $f(0) = 0$ , то есть при нулевых начальных условиях,

$$f'(t) = pF(p). \quad (85)$$

Аналогично можно определить изображение второй производной:

$$f''(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \quad (86)$$

При нулевых начальных условиях, когда  $f(0) = 0$  и  $f'(0) = 0$ ,

$$f''(t) = p^2 F(p). \quad (87)$$

Примером такого частного случая может служить включение цепи  $r, L, C$  (рисунок 27), где  $u_c(0) = 0$  и

$$i(0) = \left[ C \frac{du_c}{dt} \right]_{t=0} = 0$$

Таким образом, при нулевых начальных условиях изображение производной  $n$ -го порядка равно изображению самой функции, умноженному на  $p^n$ .

### 6. Изображение интеграла (теорема интегрирования).

Найдем изображение функции  $\varphi(t) = \int f(t)dt$ , если известно, что  $f(t) = F(p)$ .

Поскольку  $f(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = F(p)$ ,

а по (84)

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = p\Phi(p) - \varphi(0) \quad (88)$$

где  $\varphi(0) = \left[ \int f(t)dt \right]_{t=0}$ , то

$$\varphi(t) = \Phi(p) = \frac{1}{p} [F(p) + \varphi(0)]$$

Так, если  $f(t)$  — ток, протекающий через конденсатор, то  $\varphi(t)$  — заряд на его пластинах ( $q = \int idt$ ). Если в начальный момент конденсатор не заряжен,  $\varphi(t) = 0$ , то

$$\varphi(t) = \int f(t)dt = \frac{F(p)}{p}. \quad (89)$$

Следовательно, интегрированию функции времени соответствует в операторной форме деление изображения этой функции на оператор  $p$ .

### 7. Теорема подобия.

Теорема подобия используется при изменении масштаба независимого переменного.

Пусть некоторая функция

$$f(t) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

Считая изображение  $F(p)$  неизвестным, найдем изображение функции  $f(at)$ , где  $a$  — вещественное положительное число. Для решения этой задачи обозначим  $at = t_1$ . Тогда

$$dt_1 = d(at) = a dt, \quad t = \frac{t_1}{a} \quad \text{и} \quad dt = \frac{dt_1}{a}$$

По (72)

$$\begin{aligned} f(t_1) &= \int_0^{\infty} e^{-p \frac{t_1}{a}} f(t_1) \frac{dt_1}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-p \frac{t_1}{a}} f(t_1) dt_1 = \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \end{aligned}$$

Следовательно, если аргумент  $t$  увеличен в  $a$  раз, то аргумент  $p$  нужно во столько же раз уменьшить и, кроме того, поделить полученное изображение на  $a$ :

$$f(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (90)$$

Теорема подобия остается справедливой и для комплексного числа  $a$ .

Рассмотрим некоторые примеры.

**Пример 1.**  $f(t) = 1 - e^{-at}$

Определить  $F(p)$ .

**Решение.** Изображение  $F(p)$  можно найти как разность изображений постоянной величины и показательной функции

$$f(t) = 1 - e^{-at} = F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} = \frac{a}{p(p+a)} \quad (91)$$

**Пример 2.** С помощью операторного метода найти ток  $i(f)$  при включении цепи  $r, L$  (рисунок 19) на постоянное напряжение  $U$ .

**Решение.**

1. Уравнение обхода цепи по второму закону Кирхгофа имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + ri = U$$

2. Переходим к операторным изображениям:

$$i(t) = I(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} i(t) dt$$

Расчетное уравнение в операторной форме будет:

$$LpI(p) + rI(p) = \frac{U}{p}$$

и изображение тока

$$I(p) = \frac{U}{p(Lp + r)} \quad (91)$$

3. Для обратного перехода к временным функциям преобразуем выражение (91)

$$I(p) = \frac{U}{pL\left(\frac{r}{L} + p\right)} \cdot \frac{U}{r} = \frac{U}{r} \cdot \frac{\frac{r}{L}}{p\left(p + \frac{r}{L}\right)}$$

Но  $\frac{\frac{r}{L}}{p\left(p + \frac{r}{L}\right)}$  — сходно с (90). Поэтому можно записать

$$I(p) = i(t) = \frac{U}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right)$$

то есть то же, что мы получили классическим методом (20).

Однако расчет более сложных цепей не всегда можно свести к известным табличным формулам. Поэтому для нахождения оригинала приходится пользоваться **теоремой разложения**, а в общем случае — обратным преобразованием Лапласа (72).

### 2.1.3 Теорема разложения

Если операторное изображение  $F(p)$  может быть представлено в виде дроби:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (92)$$

где  $A(p)$  и  $B(p)$  — многочлены различных степеней « $p$ », то оригинал определяется с помощью теоремы разложения, применимой в том случае, если дробь

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1. Степень числителя меньше степени знаменателя, то есть  $m < n$ ;
2. Все корни знаменателя  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , определяемые из условия  $B(p) = 0$ , различны;

3. Ни одни из корней знаменателя не равен корням числителя.

Согласно математическому анализу дробь, удовлетворяющая этим условиям, может быть представлена в виде ряда простых дробей

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{C_1}{p-p_1} + \frac{C_2}{p-p_2} + \dots + \frac{C_k}{p-p_k} + \frac{C_n}{p-p_n} \quad (93)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - корни знаменателя.

Найдем коэффициенты выражения (93). Для определения коэффициента  $C_k$  умножим обе части равенства (93) на  $(p-p_k)$ , а затем примем  $p = p_k$ .

$$\frac{A(p)}{B(p)}(p-p_k) = C_1 \frac{p-p_k}{p-p_1} + C_2 \frac{p-p_k}{p-p_2} + \dots + C_k + C_n \frac{p-p_k}{p-p_n}. \quad (94)$$

При  $p = p_k$  в правой части равенства (94) останется только  $C_k$ .

Подставив найденные значения коэффициентов в  $F(p)$ , получим

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k} \right]$$

Но

$$\frac{1}{p-p_k} = e^{p_k t}$$

Следовательно,

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k) \cdot e^{p_k t}}{B'(p_k)} \quad (95)$$

(95)—это и есть теорема разложения.

Производная знаменателя может быть найдена или обычным путем, или при помощи излагаемого ниже нехитрого приема. Пусть

$$B(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_k) \dots (p - p_n)$$

Этот знаменатель можно представить в виде

$$B(p) = (p - p_k)H(p),$$

где

$$H(p) = \frac{B(p)}{p - p_k}$$

Производная знаменателя

$$B'(p) = 1 \cdot H(p) + H'(p)(p - p_k).$$

При  $p=p_k$  множитель  $(p-p_k)$  обратится в нуль и

$$B'(p_k) = H(p_k) = \left[ \frac{B(p)}{p - p_k} \right]_{p=p_k} \quad (96)$$

Рассмотрим некоторые примеры применения теоремы разложения.

**Пример 1.**

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p+3)}, \text{ найти } f(t)$$

**Решение:**

По теореме разложения

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k) \cdot e^{p_k t}}{B'(p_k)}$$

где  $n = 2$ .

Поэтому

$$F(p) = f(t) = \frac{A(p_1) \cdot e^{p_1 t}}{B'(p_1)} + \frac{A(p_2) \cdot e^{p_2 t}}{B'(p_2)} \quad (97)$$

В соответствии с (97) порядок решения таков:

1. Определяем корни знаменателя

$$B(p) = (p+1)(p+3) = 0;$$

$$p_1 = -1, p_2 = -3.$$

2. Производная знаменателя определяется по (96):

$$B'(p_1) = \left[ \frac{B(p)}{p - p_1} \right]_{p=-1} = p_1 + 3 = -1 + 3 = 2,$$

$$B'(p_2) = \left[ \frac{B(p)}{p - p_2} \right]_{p=-3} = p_2 + 3 = -3 + 3 = -2$$

3. При подстановке  $p_1$  и  $p_2$  в числитель дроби  $F(p)$  получим

$$A(p_1) = p_1 + 2 = -1 + 2 = 1;$$

$$A(p_2) = p_2 + 2 = -3 + 2 = -1.$$

4. Подставляем все найденные величины в (97) и определяем искомый оригинал:

$$f(t) = \frac{1 \cdot e^{-1t}}{2} + \frac{-1 \cdot e^{-3t}}{-2} = 0,5(e^{-t} + e^{-3t}).$$

Проверка:

$$F(p) = 0,5 \left( \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3} \right) = 0,5 \frac{p+3+p+1}{(p+1)(p+3)} = \frac{p+2}{(p+1)(p+3)}$$

**Пример 2.**

$$F(p) = \frac{p+2}{p(p+1)(p+3)}, \text{ найти } f(t).$$

**Решение.**

1. Из условия

$$B(p) = p(p+1)(p+3) = 0;$$

получим:

$$p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -3.$$

В случае, когда один из корней равен нулю, первое слагаемое оригинала получится постоянным числом. При этом теорему разложения можно записать в виде, отличном от (95). Знаменатель  $B(p)$  можно представить как

$$B(p) = pN(p)$$

где  $N(p) = \frac{B(p)}{p}$  — многочлен, ни один из корней которого

не равен нулю.

Производная знаменателя  $B(p)$  при любом другом значении  $p$  (например, при  $p = p_k$ , где  $k \neq 1$ ) определяется как

$$B'(p_k) = \left[ \frac{B(p)}{p - p_k} \right]_{p=p_k} = \left[ \frac{pN(p)}{p - p_k} \right]_{p=p_k} = p_k N'(p_k)$$

И теорема разложения может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p)}{pN(p)} = \frac{A(p_1)}{N(p_1)} + \sum_{k=2}^n \frac{A(p_k) \cdot e^{p_k t}}{B'(p_k)} = \\
 &= \frac{A(0)}{N(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{A(p_k) \cdot e^{p_k t}}{p_k N'(p_k)}
 \end{aligned} \tag{98}$$

2. В нашем примере  $N(p) = (p+1)(p+3)$ .  
Поэтому

$$\begin{aligned}
 N(0) &= 1 \cdot 3, \\
 N'(p_2) &= \left[ \frac{N(p)}{p - p_2} \right]_{p=p_2} = p_2 + 3 = -1 + 3 = 2
 \end{aligned}$$

$$N'(p_3) = \left[ \frac{N(p)}{p - p_3} \right]_{p=p_3} = p_3 + 1 = -3 + 1 = -2.$$

3. Подставляем корни знаменателя в числитель:

$$A(p_1) = A(0) = 2$$

$$A(p_2) = -1 + 2 = 1$$

$$A(p_3) = -3 + 2 = -1$$

4. Искомый оригинал

$$f(t) = \frac{A(0)}{N(0)} + \frac{A(p_2) \cdot e^{p_2 t}}{p_2 N'(p_2)} + \frac{A(p_3) \cdot e^{p_3 t}}{p_3 N'(p_3)} = \frac{2}{3} + \frac{1e^{-1t}}{-1 \cdot 2} + \frac{-1e^{-3t}}{-3(-2)} = \frac{2}{3} - \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-3t}}{6}$$

## 2.1.4 Операторные схемы замещения основных элементов электрической цепи

Для определения операторных расчетных схем замещения запишем зависимости между токами и напряжениями на различных элементах цепи и операторные изображения этих зависимостей.

Ток и напряжение на активном сопротивлении  $r$  (рисунок 32) связаны законом Ома:  $u=ri$ .

В операторной форме это выражение запишется как:

$$U(p)=rI(p) \quad (99)$$

то есть сопротивление в операторной форме осталось тем же:  $Z_r(p)=r$ .

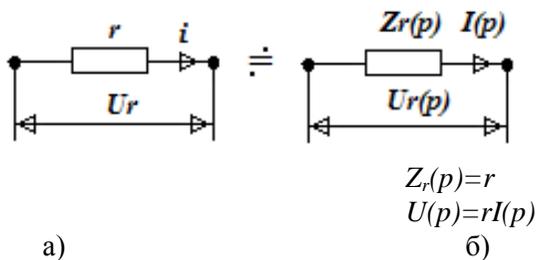


Рисунок 32 – Схема замещения и операторное изображение активного сопротивления

В случае идеальной катушки с индуктивностью  $L$  (рисунок 33), напряжение на катушке индуктивности определяется по выражению:

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}$$

Тогда операторное изображение напряжения:

$$U_L(p) = LpI(p) - E_L(p) = LpI(p) - Li(0) \quad (100)$$

где  $Z_L(p) = Lp$  – операторное сопротивление индуктивности;

$E_L(p) = Li(0)$  – некоторая ЭДС, получившаяся в следствие ненулевых начальных условий и совпадающую по направлению с током.

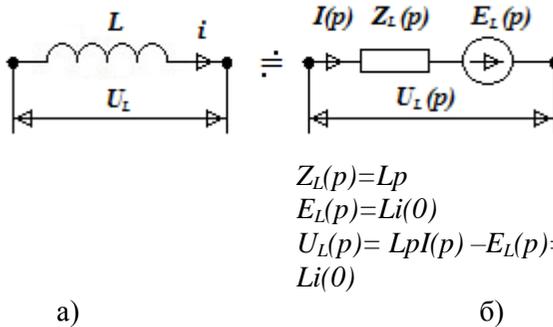


Рисунок 33 – Схема замещения и операторные изображение катушки индуктивности

Напряжение на конденсаторе  $C$  (рисунок 34), определяется по выражению:

$$u_c = \frac{1}{C} \int idt$$

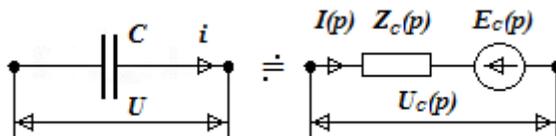
Тогда операторное изображение напряжения:

$$U_c(p) = I(p)Z_c(p) + E_c(p) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{U_c(0)}{p} \quad (101)$$

где  $Z_c(p) = \frac{1}{Cp}$  – операторное сопротивление конденсатора;

$E_c(p) = \frac{U_c(0)}{p}$  – операторное изображение ЭДС,

получившаяся от имевшегося на конденсаторе начального напряжения  $u_c(0)$  и направленная встречно току.



а)

б)

$$Z_c(p) = \frac{1}{Cp}$$

$$E_c(p) = \frac{U_c(0)}{p}$$

$$U_c(p) = I(p)Z_c(p) + E_c(p) =$$

$$= \frac{I(p)}{Cp} + \frac{U_c(0)}{p}$$

Рисунок 34 – Схема замещения и операторные изображение конденсатора

## 2.1.5 Основные законы электротехники в операторной форме

### 1. Закон Ома

Этот закон применяется только при включении строго пассивной цепи, не имеющей никаких источников энергии, то есть при нулевых начальных условиях.

Пусть для цепи (рисунок 35,а) известно, что  $i(0)=0$  и  $u_c(0)=0$ . Расчетная схема замещения такой цепи имеет вид, приведенный на рисунке 35,б, и для нее можно определить  $U(p)$  как

$$U(p) = I(p)Z(p) \quad (102)$$

где  $Z(p) = r + Lp + \frac{1}{Cp}$  – полное сопротивление цепи в операторной форме.

Тогда выражение (102) можно записать

$$U(p) = I(p) \left( r + Lp + \frac{1}{Cp} \right)$$

Полное сопротивление всей цепи можно получить, записав сопротивление всей цепи в комплексной форме, и заменив в этом выражении « $j\omega$ » на « $p$ » (рисунок 35,б):

$$Z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}.$$

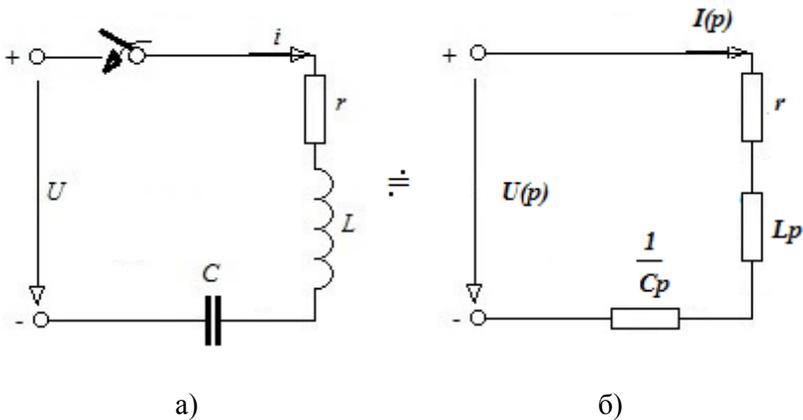


Рисунок 35 – Схема электрической цепи и схема замещения для пояснения закона Ома в операторной форме

## 2. Первый закон Кирхгофа

Для любого узла электрической цепи алгебраическая сумма мгновенных значений токов тождественно равна нулю. Так для узла, приведенного на рисунке 36, запишем

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

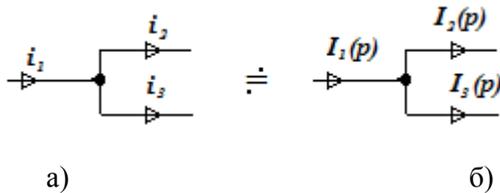


Рисунок 36 – Схема для пояснения первого закона Кирхгофа в операторной форме

Но операторное изображение суммы равно сумме изображений. Следовательно,

$$I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0$$

В общем случае, если в узле сходятся  $n$  ветвей, первый закон Кирхгофа в операторной форме примет вид:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0 \quad (103)$$

### 3. Второй закон Кирхгофа

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура на рисунке 37,а:

$$e = u_r + u_L + u_C$$

$$e = r \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

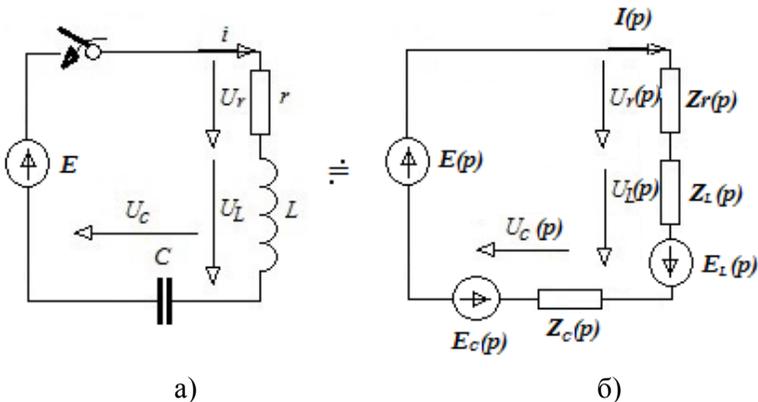


Рисунок 37 – Схема электрической цепи и схема замещения для пояснения второго закона Кирхгофа в операторной форме

Переходя к операторной форме, получим:

$$U(p) = U_r(p) + U_L(p) + U_C(p)$$

Тот же результат можно получить, заменив заданную цепь

расчетной схемой замещения (рисунок 37,б) и составив уравнение по второму закону Кирхгофа для рассматриваемого контура:

$$E(p) + E_L(p) - E_C(p) = U_r(p) + U_L(p) + U_C(p) \quad (104)$$

В общем случае для любого замкнутого контура

$$\sum E_k(p) = \sum I_k(p)Z_k(p) \quad (105)$$

причем при обходе контура необходимо учитывать и ЭДС, получившиеся за счет ненулевых начальных условий.

Как видно из формул (102), (103) и (105), запись основных законов электрической цепи в операторной форме получилась аналогичной, как при расчете цепей постоянного тока. Следовательно, расчет операторных схем замещения можно вести любым из методов, известных для расчета цепей постоянного тока при установившемся режиме.

### **Контрольные вопросы**

1. Какую функцию называют оригиналом?
2. Какую функцию называют изображением?
3. Как осуществляется переход от оригинала к изображению и обратно?
4. В чем преимущества операторного метода по сравнению с классическим методом?
5. Каков порядок расчета переходных процессов операторным методом?
6. Какие схемы замещения элементов электрической цепи существуют?
7. Как записываются изображения для схем замещения электрической цепи?
8. Как записываются основные законы электротехники в операторной форме?
9. Какие методы расчета электрических цепей можно применять совместно с операторным методом?

10. Какими особенностями обладает расчет переходных процессов в цепи с синусоидальной ЭДС?

## 2.2 Расчет переходных процессов операторным методом

Порядок расчета переходных процессов операторным методом следующий:

1. Заменить заданную цепь расчетной операторной схемой замещения для послекоммутационного режима.
2. Для полученной схемы записать операторные изображения.
3. Выполнить расчет любым из известных методов относительно изображений.
4. По полученным изображениям определить оригиналы, то есть действительные токи и напряжения при переходном процессе.

### Задача 2.2.1

В цепи с постоянной ЕДС происходит замыкание (рисунок 38,а):  $E = 100$  В,  $L = 0,01$  Гн и  $r = 2$  Ом. Определить ток и напряжение на индуктивности в переходном режиме.

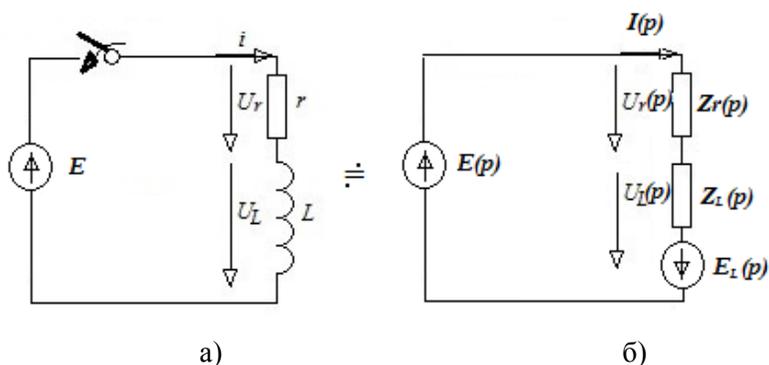


Рисунок 38 – Схема к задаче 2.2.1

**Решение:**

1. Составляем операторную схему замещения для полеккоммутиционного режима (рисунок 38,б).

2. Записываем изображения всех элементов схемы замещения:

$$E(p) = \frac{E}{p} = \frac{100}{p};$$

$$Z_r = r = 2;$$

$$Z_L = Lp = 0,01p.$$

Так как ток через индуктивность до коммутации был равен нулю, то

$$E_L(0) = L \cdot i(0) = 0,01 \cdot 0 = 0$$

3. Ток в цепи определяем по закону Ома:

$$I(p) = \frac{E(p) + E_L(0)}{Z_r(p) + Z_L(p)} = \frac{\frac{100}{p} + 0}{2 + 0,01p} \cdot \frac{p}{p} = \frac{100}{p(2 + 0,01p)}.$$

4. Напряжение на индуктивности составит:

$$U_L(p) = I(p)Z_L(p) - E_L(0) = \frac{100}{p(2 + 0,01p)} \cdot 0,01p - 0 = \frac{p}{p(2 + 0,01p)}$$

5. Определяем оригинал тока, используя теорему разложения:

$$B(p) = 0$$

$$p(2 + 0,01p) = 2p + 0,01p^2 = 0$$

$$p_1 = 0 \text{ сек}^{-1}$$

$$p_2 = -\frac{2}{0,01} = -200 \text{сек}^{-1}$$

$$A_1(p_1) = 100$$

$$A_2(p_2) = 100$$

$$B'(p) = 2 \cdot 0,01p + 2 = 0,02p + 2$$

$$B'(p_1) = 0,02 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$B'(p_2) = 0,02 \cdot (-200) + 2 = -2$$

Оригинал тока запишется:

$$i(t) = \frac{100}{2} e^{0t} - \frac{100}{2} e^{-200t} = 50 - 50e^{-200t}$$

Результаты расчета операторным методом совпадают с результатами расчета классическим методом (задача 1.3.1).

6. Определяем оригинал напряжения, используя теорему разложения:

$$B(p) = 0$$

$$p(2 + 0,01p) = 2p + 0,01p^2 = 0$$

$$p_1 = 0 \text{сек}^{-1}$$

$$p_2 = -\frac{2}{0,01} = -200 \text{сек}^{-1}$$

$$A_1(p_1) = 0$$

$$A_2(p_2) = -200$$

$$B'(p) = 2 \cdot 0,01p + 2 = 0,02p + 2$$

$$B'(p_1) = 0,02 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$B'(p_2) = 0,02 \cdot (-200) + 2 = -2$$

Оригинал напряжения запишется:

$$i(t) = \frac{0}{2} e^{0t} + \frac{-200}{-2} e^{-200t} = 0 + 100e^{-200t} = 100e^{-200t}$$

Результаты расчета операторным методом совпадают с результатами расчета классическим методом (задача 1.3.1).

### Задача 2.2.2

В цепи с постоянной ЕДС замыкается одно из последовательных сопротивлений (рисунок 39, а) :  $E = 100$  В,  $L = 0,01$  Гн,  $R = 3$  Ом и  $r = 2$  Ом. Определить ток на индуктивности в переходном режиме.

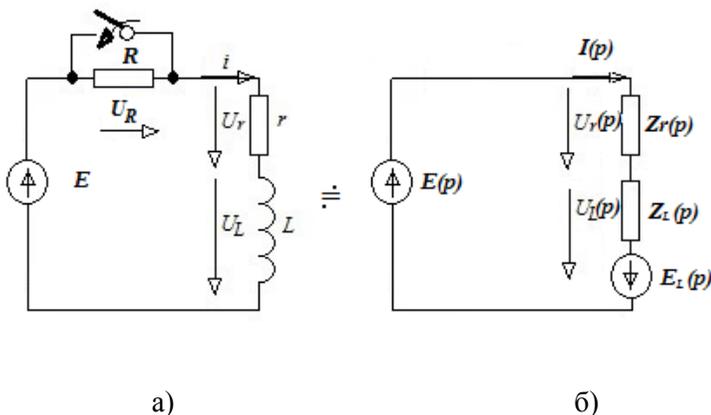


Рисунок 39 – Схема к задаче 2.2.2

### Решение:

Порядок расчета такой же, как в задаче 2.2.1.

1. Составляем операторную схему замещения для полекоммутиационного режима (рисунок 39,б).

2. Записываем изображения всех элементов схемы замещения:

$$E(p) = \frac{E}{p} = \frac{100}{p};$$

$$Z_r = r = 2;$$

$$Z_L = Lp = 0,01p.$$

Так как ток через индуктивность до коммутации не был равен нулю, то

$$i(0) = \frac{E}{r+R} = \frac{100}{2+3} = 20\text{A};$$

$$E_L(0) = L \cdot i(0) = 0,01 \cdot 20 = 0,2.$$

3. Ток в цепи определяем по закону Ома:

$$I(p) = \frac{E(p) + E_L(0)}{Z_r(p) + Z_L(p)} = \frac{\frac{100}{p} + 0,2}{2 + 0,01p} \cdot \frac{p}{p} = \frac{100 + 0,2p}{p(2 + 0,01p)}.$$

4. Определяем оригинал тока, используя теорему разложения:

$$B(p) = 0$$

$$p(2 + 0,01p) = 2p + 0,01p^2 = 0$$

$$p_1 = 0 \text{ сек}^{-1}$$

$$p_2 = -\frac{2}{0,01} = -200 \text{сек}^{-1}$$

$$A_1(p_1) = 100 + 0,2 \cdot 0 = 100$$

$$A_2(p_2) = 100 + 0,2 \cdot (-200) = 60$$

$$B'(p) = 2 \cdot 0,01p + 2 = 0,02p + 2$$

$$B'(p_1) = 0,02 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$B'(p_2) = 0,02 \cdot (-200) + 2 = -2$$

Оригинал тока запишется:

$$i(t) = \frac{100}{2} e^{0t} - \frac{60}{2} e^{-200t} = 50 - 30e^{-200t}$$

Результаты расчета операторным методом совпадают с результатами расчета классическим методом (задача 1.3.2).

### Задача 2.2.3

В цепи с постоянной ЕДС происходит замыкание (рисунок 40,а) :  $E=100$  В,  $C=100 \cdot 10^{-6}$  Ф и  $r=5$  Ом. Напряжение до коммутации на конденсаторе составляло  $U_0=20$  В. Определить напряжение на конденсаторе и ток в переходном режиме.

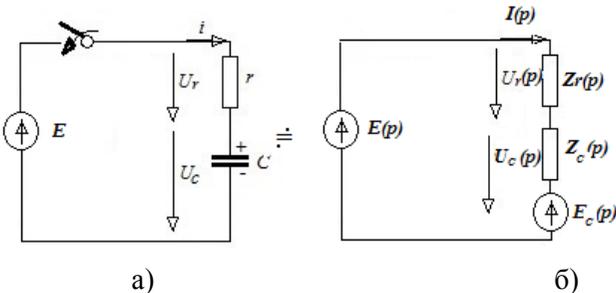


Рисунок 40 – Схема к задаче 2.2.3

**Решение:**

1. Составляем операторную схему замещения для полеконмутационного режима (рисунок 40,б).

2. Записываем изображения всех элементов схемы замещения:

$$E(p) = \frac{E}{p} = \frac{100}{p};$$

$$Z_r = r = 5;$$

$$Z_c = \frac{1}{Cp} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} p} = \frac{10^4}{p}.$$

Так конденсатор был заряжен до коммутации, то

$$E_c(0) = \frac{U_c(0)}{p} = \frac{20}{p}$$

3. Ток в цепи определяем по закону Ома:

$$I(p) = \frac{E(p) - E_c(0)}{Z_r(p) + Z_c(p)} = \frac{\frac{100}{p} - \frac{20}{p}}{5 + \frac{10^4}{p}} \cdot \frac{p}{p} = \frac{100 - 20}{5p + 10^4} = \frac{80}{5p + 10^4} = \frac{16}{p + 2000}$$

4. Напряжение на конденсаторе определяется по выражению:

$$\begin{aligned} U_c(p) &= I(p)Z_c(p) + E_c(0) = \frac{80}{5p + 10^4} \cdot \frac{10^4}{p} + \frac{20}{p} = \frac{80 \cdot 10^4 + 20 \cdot (5p + 10^4)}{p(5p + 10^4)} = \\ &= \frac{80 \cdot 10^4 + 100p + 20 \cdot 10^4}{p(5p + 10^4)} = \frac{100 \cdot 10^4 + 100p}{p(5p + 10^4)} = 100 \cdot \frac{10^4 + p}{p(5p + 10^4)} \end{aligned}$$

5. Определяем оригинал тока по стандартному выражению:

$$i(t) = 16e^{-2000t}$$

6. Определяем оригинал напряжения, используя теорему разложения:

$$B(p) = 0$$

$$p(5p + 10^4) = 5p^2 + 10^4 p = 0$$

$$p_1 = 0 \text{ сек}^{-1}$$

$$p_2 = -\frac{10^4}{5} = -2000 \text{ сек}^{-1}$$

$$A_1(p_1) = 10^4 + p = 10000 + 0 = 10000$$

$$A_2(p_2) = 10^4 + p = 10000 - 2000 = 8000$$

$$B'(p) = 2 \cdot 5p + 10000 = 10p + 10000$$

$$B'(p_1) = 10 \cdot 0 + 10000 = 10000$$

$$B'(p_2) = 10 \cdot (-2000) + 10000 = -10000$$

Оригинал напряжения запишется:

$$\begin{aligned} U_C(t) &= 100 \cdot \left( \frac{10000}{10000} e^{0t} - \frac{8000}{10000} e^{-2000t} \right) = 100 \cdot \left( 1 - 0,8e^{-2000t} \right) = \\ &= 100 - 80e^{-2000t} \end{aligned}$$

Результаты расчета операторным методом совпадают с результатами расчета классическим методом (задача 1.3.3).

#### **Задача 2.2.4**

В цепи с постоянной ЕДС происходит короткое замыкание (рисунок 41,а) :  $E = 100 \text{ В}$ ,  $L = 0,01 \text{ Гн}$ ,  $r = 2 \text{ Ом}$  и

$r_1 = 3$  Ом. Определить ток и напряжение на индуктивности в переходном режиме.

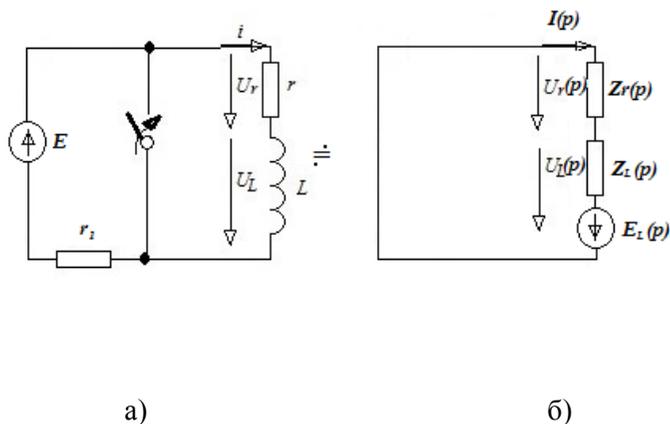


Рисунок 41 – Схема к задаче 2.2.4

**Решение:**

Расчет данной цепи проводим аналогично рассмотренным выше.

1. Составляем операторную схему замещения для полекоммутиционного режима (рисунок 41,б).
2. Записываем изображения всех элементов схемы замещения:

$$E(p) = \frac{E}{p} = \frac{100}{p};$$

$$Z_r = r = 2;$$

$$Z_L = Lp = 0,01 p.$$

Так как ток через индуктивность до коммутации был не равен нулю, то

$$i(0) = \frac{E}{r+r_1} = \frac{100}{2+3} = 20 \text{ A}$$

$$E_L(0) = L \cdot i(0) = 0,01 \cdot 20 = 0,2$$

3. Ток в цепи определяем по закону Ома:

$$I(p) = \frac{E_L(0)}{Z_r(p) + Z_L(p)} = \frac{0,2}{2 + 0,01p} = \frac{0,2}{2 + 0,01p} = \frac{20}{200 + p} = 20 \cdot \frac{1}{200 + p}$$

4. Напряжение на индуктивности составит:

$$\begin{aligned} U_L(p) &= I(p)Z_L(p) - E_L(0) = \frac{0,2}{2 + 0,01p} \cdot 0,01p - 0,2 = \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,01p - 0,2 \cdot (2 + 0,01p)}{2 + 0,01p} = \frac{0,2 \cdot (0,01p - 2 - 0,01p)}{2 + 0,01p} = \frac{-0,4}{2 + 0,01p} = \\ &= \frac{-40}{200 + p} = -40 \cdot \frac{1}{200 + p} \end{aligned}$$

5. Определяем оригинал тока. Поскольку изображение тока соответствует изображению показательной функции, получаем:

$$i_L(t) = 20e^{-200t}$$

Результаты расчета операторным методом совпадают с результатами расчета классическим методом (задача 1.3.4).

6. Определяем оригинал напряжения. Поскольку изображение напряжения соответствует изображению показательной функции, получаем:

$$U_{iL}(t) = -40e^{-200t}$$

Результаты расчета операторным методом совпадают с результатами расчета классическим методом (задача 1.3.4).

### Задача 2.2.5

В цепи с постоянной ЕДС происходит замыкание (рисунок 42).  $E=100$  В,  $C=100 \cdot 10^{-6}$  Ф,  $L=0,01$  Гн и  $r=50$  Ом. Определить напряжение на конденсаторе и ток в переходном режиме.

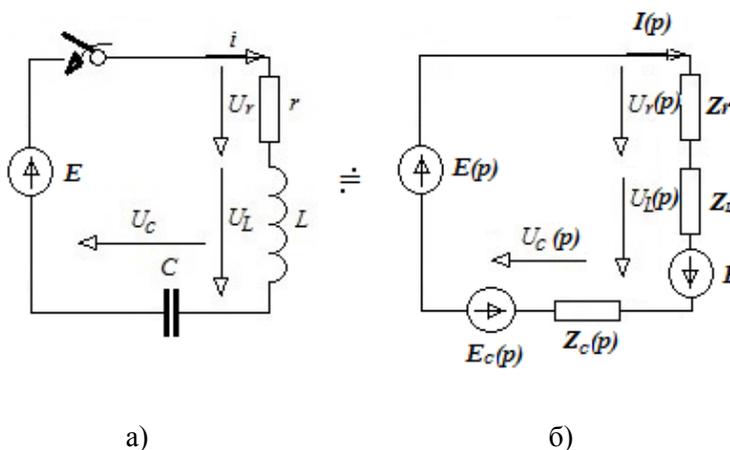


Рисунок 42 – Схема к задаче 2.2.5

### Решение:

Порядок расчета для цепи с двумя энергонакопительными элементами аналогичен цепям с одним накопителем энергии.

1. Запишем изображения для операторной схемы замещения (рисунок 42, б):

$$E(p) = \frac{E}{p} = \frac{100}{p};$$

$$Z_r = r = 50;$$

$$Z_L = Lp = 0,01p;$$

$$Z_C = \frac{1}{Cp} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} p} = \frac{10^4}{p}.$$

Так как до коммутации ток в цепи отсутствовал, получаем:

$$E_L(p) = 0$$

$$E_C(p) = \frac{E(0)}{p} = \frac{0}{p} = 0$$

2. Ток в цепи определяем по закону Ома:

$$I(p) = \frac{E(p) + E_L(0) + E_C(p)}{Z_r(p) + Z_L(p) + Z_C(p)} = \frac{\frac{100}{p}}{50 + 0,01p + \frac{10^4}{p}} \cdot \frac{p}{p} = \frac{100}{50p + 0,01p^2 + 10^4}$$

3. Напряжение на конденсаторе определяется по выражению:

$$U_C(p) = I(p)Z_C(p) + E_C(0) = \frac{100}{50p + 0,01p^2 + 10^4} \cdot \frac{10^4}{p} = \frac{100 \cdot 10^4}{p(50p + 0,01p^2 + 10^4)}$$

4. Напряжение на катушке индуктивности определяется по выражению:

$$\begin{aligned} U_L(p) &= I(p)Z_L(p) + E_L(0) = \frac{100}{50p + 0,01p^2 + 10^4} \cdot 0,01p = \\ &= \frac{100 \cdot 0,01p}{p(50p + 0,01p^2 + 10^4)} = \frac{1}{50p + 0,01p^2 + 10^4} \end{aligned}$$

5. Определяем оригинал тока, используя теорему разложения:

$$B(p) = 0$$

$$50p + 0,01p^2 + 10^4 = 0$$

$$p_1 = -4791 \text{ сек}^{-1}$$

$$p_2 = -208,7 \text{ сек}^{-1}$$

$$A_1(p_1) = 100$$

$$A_2(p_2) = 100$$

$$B'(p) = 2 \cdot 0,01p + 50 = 0,02p + 50$$

$$B'(p_1) = 0,02 \cdot (-4791) + 50 = -45,82$$

$$B'(p_2) = 0,02 \cdot (-208,7) + 50 = 45,82$$

Оригинал тока запишется:

$$i(t) = \frac{100}{-45,82} e^{-4791t} + \frac{100}{45,82} e^{-208,7t} = -2,18e^{-4791t} + 2,18e^{-208,7t}$$

6. Определяем оригинал напряжения, используя теорему разложения:

$$B(p) = 0$$

$$p(50p + 0,01p^2 + 10^4) = 0$$

$$p_1 = 0 \text{ сек}^{-1}$$

$$p_2 = -4791 \text{ сек}^{-1}$$

$$p_3 = -208,7 \text{ сек}^{-1}$$

$$A_1(p_1) = 100 \cdot 10^4$$

$$A_2(p_2) = 100 \cdot 10^4$$

$$A_3(p_3) = 100 \cdot 10^4$$

$$B'(p) = 3 \cdot 0,01 p^2 + 50 \cdot 2p + 10^4 = 0,03 p^2 + 100 p + 10^4$$

$$B'(p_1) = 0,03 \cdot 0 + 100 \cdot 0 + 10^4 = 10^4$$

$$B'(p_2) = 0,03 \cdot (-4791)^2 + 100 \cdot (-4791) + 10^4 = 219500$$

$$B'(p_3) = 0,03 \cdot (-208,7)^2 + 100 \cdot (-208,7) + 10^4 = -9569$$

Оригинал напряжения на конденсаторе запишется:

$$\begin{aligned} U_c(t) &= \frac{100 \cdot 10^4}{10^4} e^{0t} + \frac{100 \cdot 10^4}{219500} e^{-4791t} + \frac{100 \cdot 10^4}{-9563} e^{-208,7t} = \\ &= 100 + 4,55e^{-4791t} - 104,5e^{-208,7t} \end{aligned}$$

Результаты расчета операторным методом совпадают с результатами расчета классическим методом (задача 1.3.5).

### Задача 2.2.6

В цепи с постоянной ЕДС происходит замыкание (рисунок 43,а).  $U = 100 \text{ В}$ ,  $C = 100 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$  и  $r_1 = r_2 = 50 \text{ Ом}$ . Определить напряжение на конденсаторе.

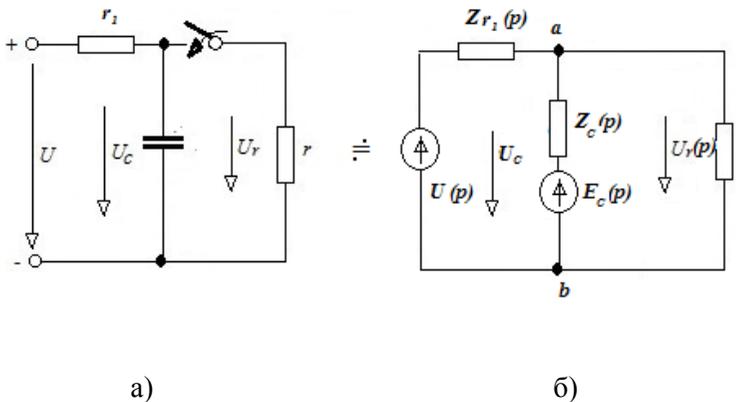


Рисунок 43 – Схема к задаче 2.2.6

**Решение:**

Расчетная схема замещения (рисунок 43,б) имеет два узла, поэтому расчет удобнее всего провести методом двух узлов. Тем более, что узловое напряжение является так же напряжением на конденсаторе.

1. Изображения схемы замещения:

$$U(p) = \frac{U}{p} = \frac{100}{p} ;$$

$$Z_{r_1} = Z_{r_2} = r_1 = 50 ;$$

$$Z_c = \frac{1}{Cp} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} p} = \frac{10^4}{p} .$$

Напряжение на конденсаторе до коммутации:

$$E_c(p) = 100$$

$$E_c(p) = \frac{E(0)}{p} = \frac{100}{p}$$

2. Напряжение на конденсаторе по методу двух узлов составит:

$$U_c(p) = U_{ab}(p) = \frac{U(p) \frac{1}{Z_{r_1}(p)} + E_c(p) \frac{1}{Z_c(p)}}{\frac{1}{Z_{r_1}(p)} + \frac{1}{Z_c(p)} + \frac{1}{Z_{r_2}(p)}} = \frac{\frac{100}{p} \cdot \frac{1}{50} + \frac{100}{p} \cdot \frac{p}{10^4}}{\frac{1}{50} + \frac{p}{10^4} + \frac{1}{50}} \cdot \frac{p}{p} =$$

$$= \frac{2 + 0,01p}{0,02p + 10^{-4} p^2 + 0,02p} = \frac{2 + 0,01p}{0,04p + 10^{-4} p^2}$$

3. Определяем оригинал напряжения на катушке индуктивности, используя теорему разложения:

$$B(p) = 0$$

$$0,04p + 10^{-4} p^2 = 0$$

$$p_1 = 0 \text{ сек}^{-1}$$

$$p_2 = -400 \text{ сек}^{-1}$$

$$A_1(p_1) = 2 + 0,01p = 2$$

$$A_2(p_2) = 2 + 0,01p = -2$$

$$B'(p) = 2 \cdot 10^{-4} p + 0,04$$

$$B'(p_1) = 2 \cdot 10^{-4} \cdot (-0) + 0,04 = 0,04$$

$$B'(p_2) = 2 \cdot 10^{-4} \cdot (-400) + 0,04 = -0,04$$

Оригинал напряжения на конденсаторе:

$$U_c(t) = \frac{2}{0,04} e^{0t} + \frac{-2}{-0,04} e^{-400t} = 50 + 50e^{-400t}$$

### 2.3 Применение операторного метода к расчету переходного процесса в цепи с синусоидальной ЭДС

Пусть некоторый сложный приемник  $Z(t)$ , в состав которого входят активные сопротивления, индуктивности и емкости, подключается к источнику синусоидального напряжения

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

где  $\alpha$  – начальная фаза, определяемая моментом включения рубильника

«К» (рисунок 44).

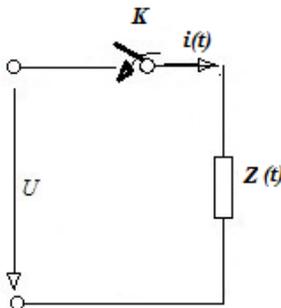


Рисунок 44 – Расчетная схема

При переходе к расчетной схеме замещения сопротивление  $Z(t)$  определяется обычным путем, а операторное изображение напряжения источника запишется:

$$U(p) = U_m \cdot \frac{\omega \cos \alpha + p \sin \alpha}{p^2 + \omega^2}.$$

Изображение тока можно найти по закону Ома:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

а его действительное значение  $i(t)$  – по теореме разложения.

Однако этот метод очень громоздкий. Проще решить задачу, используя символическую запись.

Известно, что

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \alpha) = I_m \left[ \dot{U}_m e^{j\omega t} \right],$$

где  $\dot{U}_m = U_m e^{j\alpha}$  - комплексная амплитуда напряжения.

Поэтому можно изобразить синусоидальное напряжение в несколько ином виде:

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_m(p) = U_m \frac{1}{p - j\omega}. \quad (106)$$

Операторное изображение вращающегося в комплексной плоскости вектора тока  $\dot{u}_m e^{j\omega t}$  определяется по закону Ома:

$$(107)$$

По теореме разложения

$$(108)$$

А искомый ток  $i(t)$  определяется как мнимая часть этого комплекса:

$$(109)$$

Рассмотрим применение этого способа на примере цепи, приведенной на рисунке 45 (задача 1.3.6).

### Пример 1.

В цепи с синусоидальной ЕДС происходит замыкание (рисунок 45) :  $e(t) = 100 \cdot \sin(314t + 33)$  В,  $L=0,01$  Гн и  $r = 2$  Ом. Определить закон изменения тока в переходном режиме.

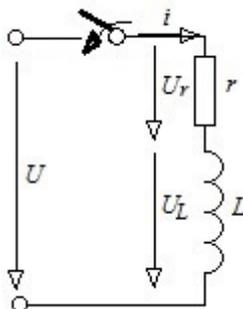


Рисунок 45 – Схема к задаче 1.3.6

### Решение:

1. Находим операторное изображение вращающегося вектора напряжения

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_m(p) = U_m \frac{1}{p - j\omega}.$$

и сопротивление цепи в операторной форме

$$Z(p) = r + Lp.$$

2. Операторное изображение вращающегося вектора тока:

$$\dot{I}_m(p) = \frac{\dot{U}_m(p)}{Z(p)} = \dot{U}_m \frac{1}{(p - j\omega)(r + Lp)} = \dot{U}_m \frac{A(p)}{B(p)}.$$

3.Используем теорему разложения. Поскольку знаменатель  $B(p)$  – многочлен второй степени « $p$ », то оригинал будет иметь вид:

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_m \left[ \frac{A(p_1)e^{p_1 t}}{B'(p_1)} + \frac{A(p_2)e^{p_2 t}}{B'(p_2)} \right] \quad (110)$$

Найдем величины, входящие выражение (110):

$$B(p) = (p - j\omega)(r + Lp) = 0.$$

Отсюда

$$p_1 = j\omega, \quad p_2 = -\frac{r}{L},$$

$$A(p) = 1 = A(p_1) = A(p_2),$$

$$B'(p_1) = r + Lp_1 = r + j\omega L,$$

$$B'(p_2) = L(p_2 - j\omega) = -r - j\omega L.$$

Но сопротивление можно записать

$$r + j\omega L = \underline{Z} = z e^{j\varphi},$$

где

$$z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{r}.$$

Поэтому окончательно можно записать:

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} = \frac{\dot{U}_m}{Z} \left( e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{L}t} \right) = \frac{U_m}{Z} \left[ e^{j(\omega t + \alpha - \varphi)} - e^{-\frac{r}{L}t} e^{j(\alpha - \varphi)} \right].$$

4.Мгновенное значение тока

$$i(t) = \text{Im}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] = \frac{\dot{U}_m}{z} \left[ \sin(\omega t + \alpha - \varphi) - e^{-\frac{r}{L}t} \sin(\alpha - \varphi) \right].$$

Результат получился тот же, что при расчете классическим методом:

$$i(t) = 26,861 \cdot \sin(314t + -24,5) + 11,141 e^{-200t}.$$

При ненулевых начальных условиях можно решить задачу методом наложения: отдельно найти частичные токи, определяемые ненулевыми начальными значениями, и частичные токи, которые возникнут при включении данной цепи (с нулевыми начальными условиями) на синусоидальное напряжение сети. Рассмотрим такое решение на примере.

### Пример 2.

В цепь с сопротивлением  $r_1 = 100$  Ом и емкостью  $C = 100$  мкФ дополнительно вводится сопротивление  $r_2 = 150$  (рисунок 46). Напряжение сети  $u(t) = 220\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 22^\circ 45')$  В, частота 50 Гц.

Найти ток в цепи после размыкания рубильника «К».

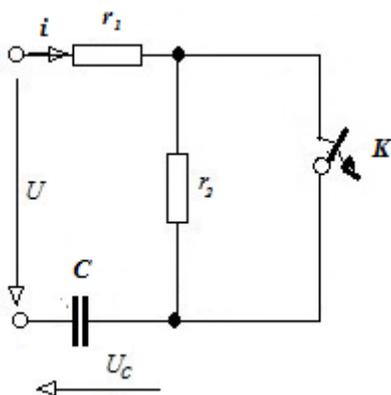


Рисунок 46 – Расчетная схема к примеру 2

**Решение.**

1. До начала переходного процесса на конденсаторе было напряжение

$$u_c = \frac{U_m}{z} \frac{1}{wC} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi_0 - \frac{\pi}{2}),$$

где

$$U_m = 220\sqrt{2} \text{ В}; \quad \alpha = 22^\circ 45';$$

$$\frac{1}{wC} = \frac{1}{314 \cdot 10^{-4}} = 31,8 \text{ Ом};$$

$$z = \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{1}{wC}\right)^2} = \sqrt{100^2 + 31,8^2} = 105 \text{ Ом};$$

$$\varphi_0 = -\arctg \frac{1}{wCr_1} = -\arctg 0,318 = -17^\circ 40'.$$

Подставляя эти величины в выражение  $u_c$ , получим:

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{220\sqrt{2}}{105} \cdot 31,8 \cdot \sin(\omega t + 22^\circ 45' + 17^\circ 40' - 90^\circ) = \\ &= 94,4 \sin(\omega t - 49^\circ 35') \end{aligned}$$

Начальное напряжение на конденсаторе

$$u_c(0) = 94,4 \sin(-49^\circ 35') = -72 \text{ В}.$$

2. Частичный ток от напряжения  $u_c(0) = -72 \text{ В}$  может быть определен из схемы (рисунок 47,а) по выражению:

$$i'(t) = -\frac{u_c(0)}{r_1 + r_2} e^{-\frac{t}{(r_1 + r_2)C}} = \frac{72}{100 + 150} e^{-\frac{t}{(100 + 150) \cdot 10^{-4}}} =$$

$$= 0,288e^{-40t}$$

3. Частичный ток от напряжения сети при нулевых начальных условиях определяется из схемы (рисунок 47,б) операторным методом.

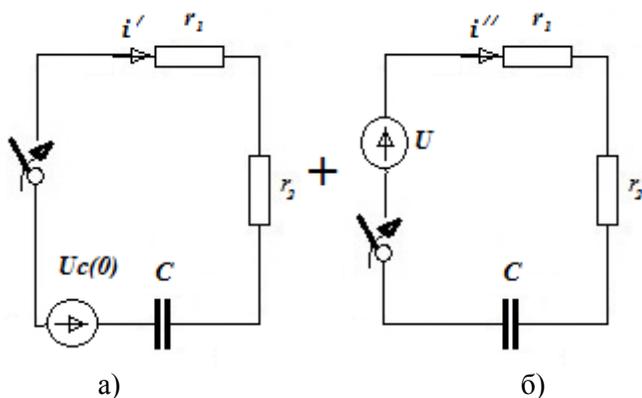


Рисунок 47 – Расчетная схема

$$\dot{U}_m(p) = \frac{\dot{U}_m}{(p - j\omega)} = \frac{U_m e^{j\alpha}}{p - j\omega};$$

$$Z(p) = r_1 + r_2 \frac{1}{Cp} = \frac{(r_1 + r_2)Cp + 1}{Cp};$$

$$i_m(p) = \frac{\dot{U}_m(p)}{Z(p)} = \dot{U}_m \frac{Cp}{(p - j\omega)[(r_1 + r_2)Cp + 1]} = \dot{U}_m \frac{A(p)}{B(p)}$$

Из условия

$$B(p) = (p - j\omega)[(r_1 + r_2)Cp + 1] = 0$$

находим корни знаменателя:

$$p_1 = j\omega = j314 \text{ сек}^{-1}$$

$$p_2 = -\frac{1}{(r_1 + r_2)C} = -40 \text{ сек}^{-1}$$

По теореме разложения

$$\dot{I}_m(p) = \dot{U}_m \left[ \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B(p_2)} e^{p_2 t} \right] \quad (113)$$

$$A_1(p_1) = j\omega C = j314 \cdot 10^{-4}$$

$$A_2(p_2) = \frac{1}{(r_1 + r_2)C} \cdot C = -4 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} B'(p_1) &= (r_1 + r_2)Cp_1 + 1 = 250 \cdot 10^{-4} j314 + 1 = \\ &= 1 + j7,85 = 7,92e^{j82,45^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'(p_2) &= (r_1 + r_2)C(p_2 - j\omega) = -1 - 250 \cdot 10^{-4} \cdot j314 = \\ &= -1 - j7,85 = -7,92e^{j82,45^\circ} \end{aligned}$$

Подставляя эти числа в (113), получим:

$$\begin{aligned} \dot{i}_m(p) &= \frac{220\sqrt{2}e^{j82^\circ 45'}}{7,92e^{j82^\circ 45'}} \left( j314 \cdot 10^{-4} e^{j314t} + 4 \cdot 10^{-3} e^{-40t} \right) = \\ &= 1,23e^{j(\omega t - 60^\circ + 90^\circ)} + 0,157e^{-40t} e^{-j60^\circ} \end{aligned}$$

Частичный ток  $i''(t)$  определяется как мнимая часть комплекса  $\dot{I}_m e^{j\omega t}$

$$\begin{aligned} i''(t) &= 1,235 \sin(\omega t + 30^\circ) + 0,157e^{-40t} \sin(-60^\circ) = \\ &= 1,235 \sin(\omega t + 30^\circ) - 0,136e^{-40t} \end{aligned} \quad (114)$$

4. Действительный ток переходного процесса

$$i(t) = i'(t) + i''(t) = 1,235 \sin(\omega t + 30^\circ) + 0,152e^{-40t} \text{ A.}$$

5. Проверим правильность полученного ответа. Напряжение на конденсаторе

$$\begin{aligned} u_c(t) &= U - (r_1 + r_2)i(t) = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 22^\circ 45') - \\ &- 250 \cdot 1,235e^{-40t} \sin(\omega t + 30^\circ) - 250 \cdot 0,152e^{-40t} = \\ &= 311,5 \sin(\omega t + 22^\circ 45') - 309 \sin(\omega t + 30^\circ) - 37,8e^{-40t} \end{aligned}$$

При  $t = 0$

$$\begin{aligned} u_c(t) &= 311,5 \sin(22^\circ 45') - 309 \sin(30^\circ) - 37,8 = \\ &= 120,5 - 154,5 - 37,8 = -71,8 \approx -72 \end{aligned}$$

Ток в цепи при установившемся режиме по закону Ома равен

$$i_{ycm}(t) = \frac{U_m}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$$

$$i_{ycm}(t) = \frac{220\sqrt{2}}{\sqrt{250^2 + 31,8^2}} \sin(\omega t + 22^\circ 45' + 7^\circ 15') =$$

$$= 1,235 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

где

$$\varphi = -\arctg \frac{1}{(r_1 + r_2)\omega C} = -\arctg \frac{10^4}{250 \cdot 314} = -\arctg 0,1275 = -7^\circ 15'$$

$$i_{ycm}(t) = \frac{220\sqrt{2}}{\sqrt{250^2 + 31,8^2}} \sin(\omega t + 22^\circ 45' + 7^\circ 15') =$$

$$= 1,235 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

что совпадает с (114) при , когда свободная составляющая обратиться в нуль.

## 2.4 Применение программы Mathcad к расчету переходных процессов операторным методом

### Задача 2.4.1

Рассмотрим задачу 2.2.1 пункта 2.2 (рисунок 38).

#### Решение

Исходные данные

$$r := 2$$

$$L := 0.01$$

$$U := 100$$

Изображения схемы замещения

$$Zr(p) := r$$

$$Zl(p) \rightarrow 2$$

$$ZL(p) := L \cdot p \qquad ZL(p) \rightarrow 1 \cdot 10^{-2} \cdot p$$

$$U(p) := \frac{U}{p} \qquad U(p) \rightarrow \frac{100}{p}$$

Расчетная формула для определения изображения тока в операторной форме

$$I(p) := \frac{U(p)}{Zr(p) + ZL(p)} \qquad I(p) \rightarrow \frac{100}{p \cdot (2 + 1 \cdot 10^{-2} \cdot p)}$$

Для определения оригинала тока можно использовать оператор инверсного преобразования Лапласа **invlaplace**:

$$I(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 50 \cdot \exp(-200 \cdot t)$$

Аналогично определяем оригинал напряжения на индуктивности

$$UL(p) := I(p) \cdot ZL(p) \qquad UL(p) \rightarrow \frac{1 \cdot 00}{(2 + 1 \cdot 10^{-2} \cdot p)}$$

$$UL(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 100 \cdot \exp(-200 \cdot t)$$

Полученный результат совпадает с расчетом классическим и операторным методами.

### Задача 2.4.2

Рассмотрим задачу 2.2.2 пункта 2.2 (рисунок 39).

#### Решение

Исходные данные

$$r := 2 \quad R := 3 \quad L := 0.01 \quad U := 100$$

Изображения схемы замещения

$$Zr(p) := r$$

$$Zr(p) \rightarrow 2$$

$$ZL(p) := L \cdot p$$

$$ZL(p) \rightarrow 1 \cdot 10^{-2} \cdot p$$

$$U(p) := \frac{U}{p}$$

$$U(p) \rightarrow \frac{100}{p}$$

Ток до начала коммутации

$$i_0 := \frac{U}{R + r}$$

$$i_0 = 20$$

Изображение ЭДС индуктивности

$$EL(p) := L \cdot i_0$$

$$EL(p) \rightarrow .20$$

Ток через индуктивность определяем по закону Ома:

$$I(p) := \frac{U(p) + EL(p)}{Zr(p) + ZL(p)}$$

$$I(p) \text{ simplify} \rightarrow 20 \cdot \frac{(500 + p)}{p \cdot (200 + p)}$$

Оригинал тока в цепи

$$I(p) \text{ invlaplace, p} \rightarrow 50 - 30 \cdot \exp(-200 \cdot t)$$

Полученный результат совпадает с расчетом классическим и операторным методами.

### Задача 2.4.3

Рассмотрим задачу 2.2.3 пункта 2.2 (рисунок 40).

#### Решение

Исходные данные

$$r := 5$$

$$U_0 := 20$$

$$C := 100 \cdot 10^{-6} \quad U := 100$$

Операторные изображения для схемы замещения

$$Z_r(p) := r \qquad Z_r(p) \rightarrow 5$$

$$Z_c(p) := \frac{1}{C \cdot p} \qquad Z_c(p) \rightarrow \frac{10000}{p}$$

$$U(p) := \frac{U}{p} \qquad U(p) \rightarrow \frac{100}{p}$$

$$EC(p) := \frac{U_0}{p} \qquad EC(p) \rightarrow \frac{20}{p}$$

Ток в цепи с конденсатором определяется по закону Ома:

$$I(p) := \frac{U(p) - EC(p)}{Z_r(p) + Z_c(p)} \qquad I(p) \text{ simplify} \rightarrow \frac{16}{(p + 2000)}$$

Оригинал тока

$$I(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 16 \cdot \exp(-2000 \cdot t)$$

Напряжение на конденсаторе определяется по выражению

$$U_c(p) := I(p) \cdot Z_c(p) + EC(p) \qquad U_c(p) \text{ simplify} \rightarrow \frac{20}{p} \cdot \frac{(10000 + p)}{(p + 2000)}$$

Оригинал напряжения на конденсаторе

$$U_c(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 100 - 80 \cdot \exp(-2000 \cdot t)$$

Полученный результат совпадает с расчетом классическим и операторным методами.

#### Задача 2.4.4

Рассмотрим задачу 2.2.4 пункта 2.2 (рисунок 41).

#### Решение

Исходные данные

$$r := 2 \quad r1 := 3 \quad L := 0.01 \quad E := 100$$

Операторные изображения для схемы замещения

$$Zr(p) := r \qquad Zr(p) \rightarrow 2$$

$$ZL(p) := L \cdot p \qquad ZL(p) \rightarrow 1 \cdot 10^{-2} \cdot p$$

Ток через индуктивность до коммутации

$$i0 := \frac{E}{r + r1} \qquad i0 = 20$$

Изображение ЭДС индуктивности

$$EL(p) := L \cdot i0 \qquad EL(p) \rightarrow .20$$

Ток переходного процесса определяется по закону Ома для операторной схемы замещения

$$I(p) := \frac{EL(p)}{Zr(p) + ZL(p)} \qquad I(p) \text{ simplify} \rightarrow \frac{20.}{(200.+ p)}$$

Оригинал ток

$$I(p) \text{ invlaplace, p} \rightarrow 20 \cdot \exp(-200 \cdot t)$$

Изображение напряжения на индуктивности определяется по выражению

$$UL(p) := I(p) \cdot ZL(p) - EL(p)$$

$$UL(p) \text{ simplify } \rightarrow \frac{-40.}{(200.+ p)}$$

Оригинал напряжения на индуктивности

$$UL(p) \text{ invlaplace, p } \rightarrow -40. \cdot \exp(-200. \cdot t)$$

Полученный результат совпадает с расчетом классическим и операторным методами.

### Задача 2.4.5

Рассмотрим задачу 2.2.5 пункта 2.2 (рисунок 42).

#### Решение

Исходные данные

$$r := 50 \quad C := 100 \cdot 10^{-6} \quad U := 100 \quad L := 0.01$$

Операторные изображения для схемы замещения

$$Zr(p) := r$$

$$Zr(p) \rightarrow 50$$

$$ZL(p) := L \cdot p$$

$$ZL(p) \rightarrow 1. \cdot 10^{-2} \cdot p$$

$$Zc(p) := \frac{1}{C \cdot p}$$

$$Zc(p) \rightarrow \frac{10000}{p}$$

$$U(p) := \frac{U}{p}$$

$$U(p) \rightarrow \frac{100}{p}$$

$$Ec(p) := 0$$

$$EL(p) := 0$$

Изображение тока определяем по закону Ома

$$I(p) := \frac{U(p) - Ec(p) + EL(p)}{Zr(p) + Zc(p) + ZL(p)} \quad I(p) \text{ simplify} \rightarrow \frac{10000.}{(5000. \cdot p + 1000000 + p^2)}$$

Для вычисления оригинала тока используем терему разложения:

$$A(p) := 10000$$

$$B(p) := 5000. \cdot p + 1000000 + p^2$$

$$b(p) := \frac{d}{dp} B(p) \quad b(p) \rightarrow 5000. + 2 \cdot p$$

$$p_0 = -4.791 \times 10^3 \quad p_1 = -208.712$$

$$b(p_0) = -4.583 \times 10^3$$

$$b(p_1) = 4.583 \times 10^3$$

Оригинал тока по теореме разложения

$$i(t) := \frac{A(p)}{b(p_0)} \cdot e^{p_0 t} + \frac{A(p)}{b(p_1)} \cdot e^{p_1 t}$$

$$i(t) \text{ float, 3} \rightarrow -2.18 \cdot \exp(-4.79 \cdot 10^3 \cdot t) + 2.18 \cdot \exp(-209. \cdot t)$$

Напряжение на катушке индуктивности определяется по выражению

$$UL(p) := I(p) \cdot ZL(p) - EL(p) \quad UL(p) \text{ simplify} \rightarrow 100. \cdot \frac{p}{(5000. \cdot p + 1000000 + p^2)}$$

Для вычисления оригинала напряжения на индуктивности используем терему разложения:

$$A(p) := 100 \cdot p$$

$$B(p) := 5000 \cdot p + 1000000 + p^2$$

$$b(p) := \frac{d}{dp} B(p) \quad b(p) \rightarrow 5000 + 2 \cdot p$$

$$p := B(p) = 0 \text{ solve } , p \rightarrow \begin{bmatrix} -4791.28784747792000 \\ -208.712152522079996 \end{bmatrix}$$

$$p_0 = -4.791 \times 10^3 \quad p_1 = -208.712$$

$$A(p_0) = -4.791 \times 10^5 \quad A(p_1) = -2.087 \times 10^4$$

$$b(p_0) = -4.583 \times 10^3 \quad b(p_1) = 4.583 \times 10^3$$

Оригинал напряжения на индуктивности

$$UL(t) := \frac{A(p_0)}{b(p_0)} \cdot e^{p_0 t} + \frac{A(p_1)}{b(p_1)} \cdot e^{p_1 t}$$

$$UL(t) \text{ float, 3 } \rightarrow 105 \cdot \exp(-4.79 \cdot 10^3 \cdot t) - 4.55 \cdot \exp(-209 \cdot t)$$

Напряжение на конденсаторе определяется по выражению

$$Uc(p) := I(p) \cdot Zc(p) + Ec(p)$$

$$Uc(p) \text{ simplify } \rightarrow \frac{100000000}{p \cdot (5000 \cdot p + 1000000 + p^2)}$$

Для вычисления оригинала напряжения на конденсаторе используем терему разложения:

$$A(p) := 100000000$$

$$B(p) := p \cdot (5000 \cdot p + 1000000 + p^2)$$

$$b(p) := \frac{d}{dp} B(p)$$

$$b(p) \rightarrow 5000 \cdot p + 1000000 + p^2 + p \cdot (5000 + 2 \cdot p)$$

$$p := B(p) = 0 \text{ solve, } p \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -4791.28784747792000 \\ -208.7121525220799967 \end{pmatrix}$$

$$p_0 = 0 \quad p_1 = -4.791 \times 10^3 \quad p_2 = -208.712$$

$$A(p_0) = 1 \times 10^8 \quad A(p_1) = 1 \times 10^8 \quad A(p_2) = 1 \times 10^8$$

$$b(p_0) = 1 \times 10^6 \quad b(p_1) = 2.196 \times 10^7 \quad b(p_2) = -9.564 \times 10^5$$

Оригинал напряжения на конденсаторе

$$UL(t) := \frac{A(p_0)}{b(p_0)} \cdot e^{p_0 t} + \frac{A(p_1)}{b(p_1)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{b(p_2)} \cdot e^{p_2 t}$$

$$UL(t) \text{ float,3} \rightarrow 100. + 4.55 \cdot \exp(-4.79 \cdot 10^3 \cdot t) - 105. \cdot \exp(-209. \cdot t)$$

Полученный результат совпадает с расчетом классическим и операторным методами.

### Задача 2.4.6

Рассмотрим задачу 2.2.6 пункта 2.2 (рисунок 43).

#### Решение

Исходные данные

$$r1 := 50 \quad r2 := 50 \quad C := 100 \cdot 10^{-6} \quad U := 100$$

До коммутации конденсатор зарядиться до величины приложенного напряжения

$$U_0 := 100$$

Операторные изображения для схемы замещения

$$Zr1(p) := r1 \quad Zr1(p) \rightarrow 50$$

$$Zr2(p) := r2 \quad Zr2(p) \rightarrow 50$$

$$Zc(p) := \frac{1}{C \cdot p} \quad Zc(p) \rightarrow \frac{10000}{p}$$

$$U(p) := \frac{U}{p} \quad U(p) \rightarrow \frac{100}{p}$$

$$Ec(p) := \frac{U_0}{p} \quad Ec(p) \rightarrow \frac{100}{p}$$

Напряжение на конденсаторе определяем по методу двух узлов:

$$Uc(p) := \frac{U(p) \cdot \frac{1}{Zr1(p)} + Ec(p) \cdot \frac{1}{Zc(p)}}{\frac{1}{Zr1(p)} + \frac{1}{Zc(p)} + \frac{1}{Zr2(p)}}$$

$$U_c(p) \text{ simplify} \rightarrow 100 \cdot \frac{(200 + p)}{p \cdot (400 + p)}$$

Оригинал напряжения на конденсаторе

$$U_c(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 50 + 50 \cdot \exp(-400 \cdot t)$$

Полученный результат совпадает с расчетом классическим и операторным методами.

## 2.5 Тесты

1. Изображение индуктивности?

- A)  $Z_L(p) = \frac{1}{pL}$  ;
- B)  $Z_L(p) = Lp$  ;
- C)  $Z_L(p) = R + Lp$  ;
- D)  $Z_L(p) = RLp$  ;
- E)  $Z_L(p) = Lp + \frac{L}{R}$  .

2. Изображение емкости?

- A)  $Z_C(p) = \frac{1}{Cp}$  ;
- B)  $Z_C(p) = Cp$  ;
- C)  $Z_C(p) = R + Cp$  ;
- D)  $Z_C(p) = RCp$  ;
- E)  $Z_C(p) = Cp + \frac{C}{R}$  .

3. Изображение напряжения на индуктивности при ненулевых начальных условиях, т.е.  $i(0) \neq 0$ ?

- A)  $U_L(p) = \frac{1}{pL} I(p) - Li(0);$   
 B)  $U_L(p) = LpI(p) + Li(0);$   
 C)  $U_L(p) = LpI(p) - Li(0);$   
 D)  $U_L(p) = LpI(p);$   
 E)  $U_L(p) = LpI(p) + \frac{Lpi(0)}{p}.$

4. Изображение напряжения на емкости при ненулевых начальных условиях, т.е.  $U_c(0) \neq 0$ ?

- A)  $U_c(p) = \frac{1}{pC} I(p) - Ci(0);$   
 B)  $U_c(p) = \frac{1}{Cp} I(p) + \frac{U_c(0)}{p};$   
 C)  $U_c(p) = \frac{1}{Cp} I(p) - \frac{U_c(0)}{p};$   
 D)  $U_c(p) = CpI(p);$   
 E)  $U_c(p) = CpI(p) - \frac{U_c(0)}{p}.$

5. Определить оригинал, если известно изображение  $\frac{100\omega}{p^2 + \omega^2}$  :

- A)  $\sin\omega t;$   
 B)  $100 \sin\omega t$   
 C)  $100e^t;$   
 D)  $100e^{\omega t};$   
 E)  $\cos\omega t;$

6. Определить оригинал, если известно изображение  $\frac{100}{p - j\omega}$  :

- A)  $\sin\omega t;$   
 B)  $100 \sin\omega t$   
 C)  $100e^t;$   
 D)  $100e^{j\omega t};$

E)  $\cos\omega t$ ;

7. Определить оригинал, если известно изображение  $\frac{100}{p + j\omega}$  :

- A)  $\sin\omega t$ ;
- B)  $100 \sin\omega t$
- C)  $100e^t$ ;
- D)  $100e^{-j\omega t}$ ;
- E)  $\cos\omega t$ ;

8. Определить оригинал, если известно изображение  $\frac{100 p}{p^2 + \omega^2}$  :

- A)  $\sin\omega t$ ;
- B)  $100 \sin\omega t$
- C)  $100e^t$ ;
- D)  $100e^{j\omega t}$ ;
- E)  $100\cos\omega t$ ;

9. Закон Ома в операторной форме:

- A)  $\sum I(p)=0$
- B)  $I(p)=U(p)/Z(p)$
- C)  $\sum I(p)Z(p)=\sum E(p)$
- D)  $\sum Z(p)=0$
- E) правильный ответ отсутствует.

10. Первый закон Кирхгофа в операторной форме:

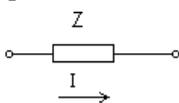
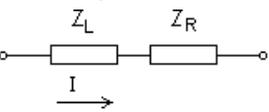
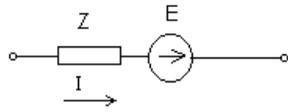
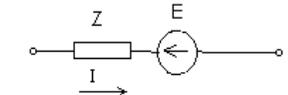
- A)  $\sum I(p)=0$
- B)  $\sum U_k(p)=0$
- C)  $\sum I(p)Z(p)=\sum E(p)$
- D)  $\sum Z(p)=0$
- E) правильный ответ отсутствует.

11. Первый закон Кирхгофа в операторной форме:

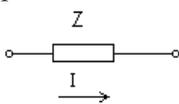
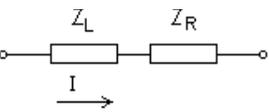
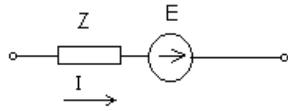
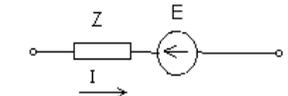
- A)  $\sum I(p)=0$

- B)  $I(p) = U(p) / Z(p)$
- C)  $\sum I(p) Z(p) = \sum E(p)$
- D)  $\sum Z(p) = 0$
- E) правильный ответ отсутствует.

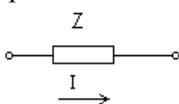
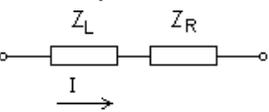
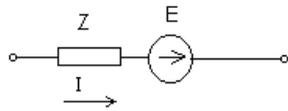
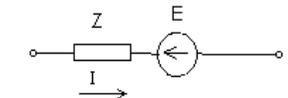
12. Операторная схема замещения сопротивления:

- A) 
- B) 
- C) 
- D) 

13. Операторная схема замещения индуктивности:

- A) 
- B) 
- C) 
- D) 

14. Операторная схема замещения емкости:

- A) 
- B) 
- C) 
- D) 

15. Оригиналом называют:

- A) временную функцию  
B) изображение  
C) функцию, подобную временной  
D) функцию, соответствующую временной  
E) показательную функцию.

16. Изображением называют:

- A) временную функцию  
B) изображение  
C) функцию, подобную временной  
D) функцию, соответствующую временной  
E) показательную функцию.

17. Какое преобразование позволяет получить изображение?

- A) Карсона  
B) Хевисайда  
C) Лапласа  
D) Фурье  
E) Дюамеля.

18. Определить оригинал, если известно изображение  $\frac{10}{p+100}$  :

- A)  $\text{sinc}\omega t$ ;
- B)  $100 \text{sinc}\omega t$
- C)  $10 e^{-100t}$ ;
- D)  $100e^{-j\omega t}$ ;
- E)  $\cos\omega t$ ;

19. Определить оригинал, если известно изображение  $\frac{10}{p-100}$  :

- A)  $\text{sinc}\omega t$ ;
- B)  $100 \text{sinc}\omega t$
- C)  $10e^{-100t}$ ;
- D)  $100e^{-j\omega t}$ ;
- E)  $\cos\omega t$ ;

20. Определить оригинал, если известно изображение  $\frac{1}{p+100}$  :

- A)  $\text{sinc}\omega t$ ;
- B)  $100 \text{sinc}\omega t$
- C)  $e^{-100t}$ ;
- D)  $100e^{-j\omega t}$ ;
- E)  $\cos\omega t$ ;

## 2.6 Индивидуальное домашнее задание №1

**Тема:** Расчет переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами при постоянной эдс источника питания классическим методом.

**Цель работы:** Получить навыки расчета переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами при постоянной эдс источника питания классическим методом.

**Задание:** В электрической цепи в результате коммутации возникает переходный процесс. Параметры цепи для каждого варианта приведены в таблице 2.

1. Определить закон изменения во времени тока катушки и напряжение на конденсаторе и построить их графики в одних осях.

Для построения графиков вычисляют 5 значений токов и напряжений в промежутке времени от  $t = 0$  до  $t = 5\tau$ . Результаты вычислений оформить в виде таблицы.

Таблица 2- Исходные данные к заданию №1

Предпоследняя цифра варианта	$E, В$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$L_1, Гн$	$L_2, Гн$	$C_1, мкФ$	$C_2, мкФ$
1	150	10	20	0,01	0,015	100	150
2	200	14	28	0,012	0,02	80	120
3	180	20	30	0,02	0,03	0	100
4	120	12	24	0,01	0,015	100	120
5	100	25	50	0,05	0,07	40	60
6	250	25	40	0,04	0,07	60	100
7	160	20	36	0,012	0,01	80	120
8	100	10	20	0,012	0,015	100	150
9	140	15	25	0,01	0,02	80	100
0	200	20	40	0,02	0,03	50	75

Последняя цифра варианта соответствует номеру рисунка.

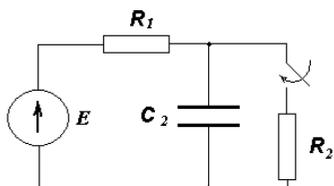


Рисунок 1

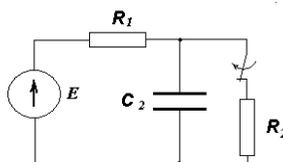


Рисунок 2

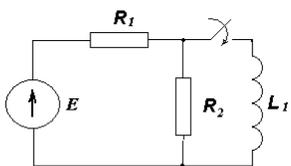


Рисунок 3

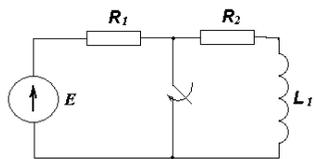


Рисунок 4

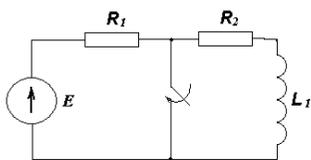


Рисунок 5

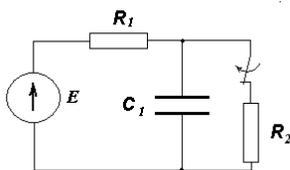


Рисунок 6

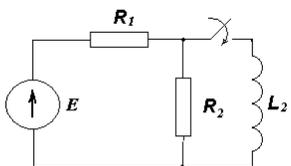


Рисунок 7

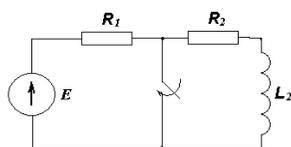


Рисунок 8

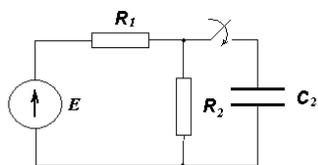


Рисунок 9

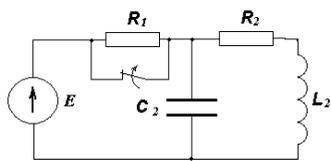


Рисунок 10

## 2.7 Индивидуальное домашнее задание №2

**Тема:** Расчет переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами при постоянной эдс источника питания операторным методом.

**Цель работы:** Получить навыки расчета переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами при постоянной эдс источника питания операторным методом.

**Задание:** В электрической цепи в результате коммутации возникает переходный процесс. Параметры цепи для каждого варианта приведены в таблице 3.

1. Определить закон изменения во времени тока катушки и напряжение на конденсаторе и построить их графики в одних осях.

2. Для построения графиков вычисляются пять значений токов и напряжений в промежутке времени от  $t=0$  до  $t=5\tau$ . Результаты вычислений оформить в виде таблицы.

Исходные данные приведены в таблице 2, схемы цепи показаны на рисунках 1-10

Предпоследняя цифра варианта соответствует номеру строки в таблице.

Таблица 3- Исходные данные к заданию №3

Предпоследняя цифра варианта	R, Ом	L, Гн	C, мкФ
1	10	0,1	100
2	8	0,02	31,3
3	6	0,06	83,3
4	15	0,025	80
5	48	0,06	200
6	8	0,05	100
7	5	0,1	120
8	10	0,08	100
9	15	0,1	40
0	10	0,05	50

Последняя цифра варианта соответствует номеру рисунка.

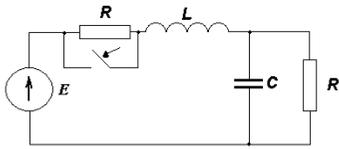


Рисунок 1

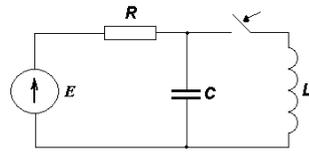


Рисунок 2

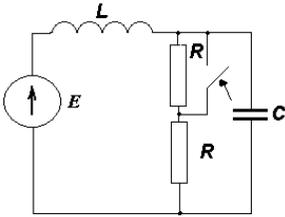


Рисунок 3

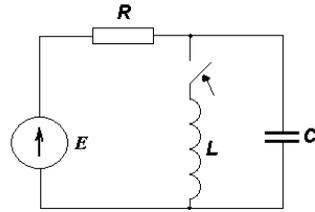


Рисунок 4

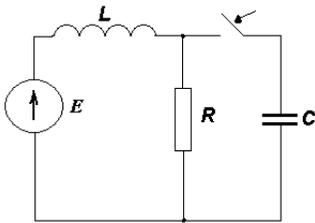


Рисунок 5

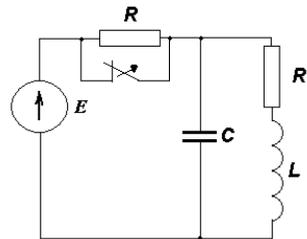


Рисунок 6

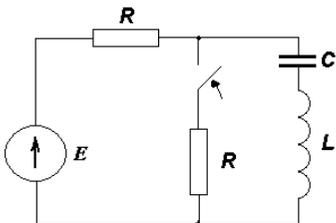


Рисунок 7

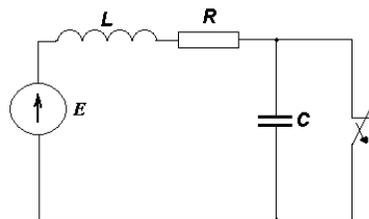


Рисунок 8

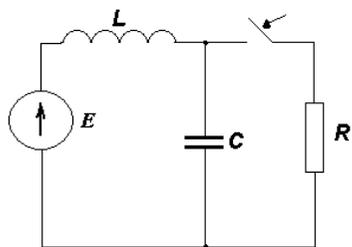


Рисунок 9

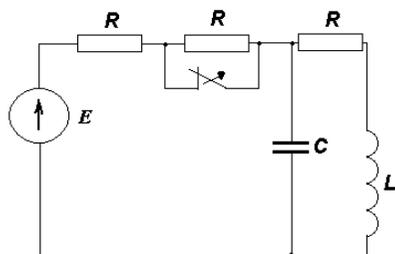


Рисунок 10

## Заключение

Отрасль науки и техники, определяемая термином «электротехника», связана с применением электрических и магнитных явлений для практических целей. Эта отрасль охватывает очень широкий круг вопросов и задач, из числа которых можно выделить теоретические и прикладные, четкую границу между ними провести непросто.

Учебный курс «Теоретические основы электротехники 2» (ТОЭ 2) входит в учебные планы большой группы электроэнергетических и других технических специальностей. При подготовке бакалавров электроэнергетики изучением курса ТОЭ создается теоретическая база для изучения последующих прикладных учебных курсов, которые вместе составляют содержание специальности.

Закончив изучение курса ТОЭ, можно приступить к изучению прикладных курсов по специальности. Но, как показывает опыт, курс ТОЭ еще долго остается настольной книгой студентов, а затем и специалистов. Изучение электротехники, как и многих других технических наук, дается нелегко. Для упрощения расчетов в учебном пособии рассмотрены примеры использования программы MathCAD.

## Список использованных источников

### Основная:

1. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей.- М.: Энергоатомиздат., 1989,-528с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. -М.: Гардарики, 1999.-638 с.
3. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. – т.1.- СПб.: Питер, 2003.-463 с.
4. Теоретические основы электротехники. – т.1. Основы теории цепей. –М.: Высшая школа, 1976.-544 с.
5. Шебес М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей.- М.: Выш. Шк., 1990,-544 с.
6. Сборник задач по теоретическим основам электротехники/ Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди и др. . –М. Высш.шк.,2003.-528 с.
7. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники. Под ред. П.А. Ионкина.- М.: Энергоиздат, 1982-768 с.

### Дополнительная:

- 1 Попов В. С. Теоретическая электротехника.— М.: Энергоатомиздат, 1990. 544 с.
- 2 Нейман Р. Л., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники М.—Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд., 1981.—416 с.
- 3 Зевеке Г. В., Ионкин П. А. и др. Основы теории цепей. — М.: Энергия. 1975.—752 с.
- 4 Зернов Н.В. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. Л.: Энергия, 1972.—816 с.
- 5 Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 2001. —750 с.

6 Херхагер М., Партолле Х.. Mathcad 2000 ВНУ, Киев, 2000.– 415 с.

7 Крьянов Д.В. Самоучитель МАТНСАД., Санкт-Петербург: «БХВ-Петербург» 2003. – 125 с.