

**ЫҚТИМАЛДЫҚТАР
ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ
СТАТИСТИКА**

Берденова Г.Ж.

ҚОСТАНАЙ, 2021

Қазақстан Республикасының білім және ғылым министрлігі

А. Айтмухамбетов атындағы инженерлік және техникалық институты

Математика кафедрасы

Г.Ж.Берденова

**ЫҚТИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯСЫ
ЖӘНЕ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА**

Оқу-әдістемелік құрал

Қостанай, 2021

КБЖ 22.151.54

ӘОЖ 514.122 (075.8)

Автор:

Берденова Гульнар Жалғасовна - А. Байтұрсынов атындағы ҚӨУ А.Айтмұхамбетов атындағы инженерлік және техникалық институтының математика кафедрасының аға оқытушысы

Рецензенттер:

Мусабаева Гулия Кабидулаевна – Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, іргелі математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD докторы

Ысмагул Роза Сапабековна – А. Байтұрсынов атындағы ҚӨУ А.Айтмұхамбетов атындағы инженерлік және техникалық институтының математика кафедрасының доценті, физико-математикалық ғылымдарының кандидаты

Утемисова Анар Алтаевна – А. Байтұрсынов атындағы ҚӨУ А.Айтмұхамбетов атындағы инженерлік және техникалық институтының математика кафедрасының жетекшісі, педагогикалық ғылымдарының кандидаты

Берденова Г.Ж.

Б 45 Ықтималдық теориясы және математикалық статистика. Оқу-әдістемелік құрал. Костанай: А. Байтұрсынов атындағы ҚӨУ, 2021. – 99 б.

ISBN 978-601-356-069-4

«Ықтималдық теориясы және математикалық статистика» оқу-әдістемелік құралда теориялық материалдарға шолу жасалған, оқу программасына сай мысалдар келтіріліп оның шығару жолдары көрсетілген, сонымен қатар өз еркімен шығаруға есептер берілген және өзінің білімін тексеру тест жинағы кіргізілген.

Ұсынылатын оқулық университеттің математика және оларға жақын мамандарды дайындайтын факультеттердің студенттеріне арналған.

ӘОЖ 514.122 (075.8)

Б 45

А. Байтұрсынов атындағы Қостанай өңірлік университетінің оқу-әдістемелік кеңесінде жариялау үшін мақұлданған және ұсынылған

23. 06. 2021ж., протокол № 5 .

ISBN 978-601-356-069-4

© А. Байтұрсынов атындағы
Қостанай өңірлік университеті

Мазмұны

Кіріспе	5
1 тақырып Кездейсоқ оқиғалар.....	7
1.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	7
1.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар	10
1.3 Жаттығулар	11
2 тақырып Қосу және көбейту теоремалары.....	12
2.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	12
2.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар	14
2.3 Жаттығулар	14
3 тақырып Толық ықтималдық формуласы. Байес формуласы.....	16
3.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	16
3.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар	18
3.3 Жаттығулар	18
4 тақырып Тәуелсіз қайталамалы тәжірибелер.....	19
4.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	19
4.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар	22
4.3 Жаттығулар	23
5 тақырып Дискретті кездейсоқ шамалар.....	24
5.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	24
5.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар	28
5.3 Жаттығулар	28
6 тақырып Үзіліссіз кездейсоқ шамалар.....	30
6.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	30
6.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар	35
6.3 Жаттығулар	35
7 тақырып Үлкен сандар заңы	37
7.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	37
7.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар	44
7.3 Жаттығулар	44
8 тақырып Кездейсоқ шамалардың жүйелері.....	46
8.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	46
8.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар	51
8.3 Жаттығулар	51
9 тақырып Таңдамалық тәсіл.....	54
9.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	54
9.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар	60
9.3 Жаттығулар	60
10 тақырып Үлестірім параметрлерін статистикалық бағалау.....	63
10.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	63
10.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар	66
10.3 Жаттығулар	67
11 тақырып Статистикалық болжамдарды тексеру.....	68

11.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	68
11.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұғар.....	71
11.3 Жаттығулар	71
12 тақырып Таңдаманың регрессиялық тендеуі	75
12.1 Негізгі теориялық мәлімет.....	75
12.2 Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар	82
12.3 Жаттығулар	82
Тест жинағы.....	85
Қортынды.....	94
Әдебиеттер тізімі	95
Қосымша 1.....	96
Қосымша 2.....	97

Кіріспе

Қазіргі әлемде математикалық статистика мен ықтималдықтар теориясын күнделікті өмірде көп қолданылады. Жалпы біз бақылайтын барлық оқиғаларды үш түрге бөлуге болады: сенімді, мүмкін емес, кездейсоқ. Ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканы зерттеу объектілері болып қарастырылатын кездейсоқ құбылысты сипаттайтын кездейсоқ оқиғалар, шамалар мен функциялар табылады. Кездейсоқ оқиға оның пайда болуының белгілі бір ықтималдығымен сипатталуы мүмкін. Ықтималдық дегеніміз - берілген оқиғаның мүмкін болатын жағдайда болу мүмкіндігін сандық түрде өлшеу.

Кездейсоқ шамалар ықтималдық теориясының маңызды құрылымдық компоненттерінің бірі болып саналады. Тарату заңдарының негізінде кездейсоқ шамалар құрылады, өз кезегінде, үлестіру заңдары кездейсоқ шамалардың мәндерін олардың ықтималдықтарымен байланыстырады. Бұл әртүрлі типтік жағдайларда кездейсоқ шамалардың өзгеру заңдылықтарын орнатуға мүмкіндік береді. Бұл заңдылықтар кездейсоқ шаманың ықтималдылықты бөлу функциясын және кездейсоқ шаманың ықтималдық тығыздығын көрсетеді.

Математикалық статистикада жалпы жиынтық пен іріктеме (таңдама) ұғымдары негізгі болып саналады. Кездейсоқ шамалардың таралу заңдарының бағалары математикалық статистикамен өзара әрекеттеседі. Математикалық күту (үміт) және дисперсия сияқты сипаттамалар анықталады, сонымен қатар кездейсоқ шаманың белгілі бір мәндер аралығына түсу ықтималдығын бағалауға мүмкіндік беретін қолданбалы есептер шешіледі.

Математикалық статистика регрессия мен корреляциялық талдаудың арнайы математикалық аппаратын қолдана отырып, тиімді индикатордың параметрлерге тәуелділік формасын орнатуға және олардың маңыздылығы мен өзара байланысының дәрежесін бағалауға көмектеседі.

Болашақ мамандар ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканы жақсы игерулері үшін оларға оқулықтар мен есеп жинақтары қажет. Ал қазақ тілінде есеп жинақтары өте аз болғандықтан сол тапшылықты жою мақсатында осы оқу-әдістемелік құралы дайындалды.

Студенттерді ықтималдықтар теориясы және математикалық статистиканың негізгі ұғымдарымен таныстыру, қолайлы ықтималдық тәсілдерді таңдауға, сапалы зерттеулер жүргізуге, жүргізілген талдаулар негізінде тиімді нұсқалар ұсынуға үйрету.

Ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика курсы 6B05401-Математика білім беру бағдарламасының студенттеріне арналған. Курста ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканың негізгі түсініктері, кездейсоқ шамалардың таралуының негізгі заңдылықтары, үлестірімдердің белгісіз параметрлерін бағалау әдістері, статистикалық гипотезаларды тексеру негіздері қарастырылады.

Теориялық материалдар тақырыптарға бөлінген, тақырыптар бойынша негізгі теориялық материалдарға шолу жасалған, мысалдар келтіріліп оның шығару жолдары көрсетілген, сонымен қатар өз еркімен шығаруға есептер берілген, өзін-өзі тексеру сұрақтары және соңында тест келтірілген. Оқу-әдістемесі, оқу программасына сай, кездесөк оқиғалар, кездесөк шамалар, екі өлшемді кездесөк шамалар, математикалық статистика және корреляция элементтері бөлімдерінің тақырыптарын қамтиды.

1-тақырып Кездейсоқ оқиғалар

Мақсат: Студенттерді ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарымен таныстыру. Студенттерді комбинаторика формулаларын пайдаланып ықтималдықты табуға үйрету.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. Ықтималдықтар теориясы пәні.
2. Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдары
3. Ықтималдықтың анықтамалары.
4. Комбинаторика элементтері.

Ықтималдықтар теориясы- кездейсоқ құбылыстардың заңдылықтарын зерттейтін математикалық ғылым.

Ықтималдықтар теориясының негізі ұғымы- *оқиға*. Оқиға тәжірибенің нәтижесі. Нәтижесін бақылауға болатын белгілі бір шарттар комплексінің орындалуы *тәжірибе* деп аталады. Оқиғалар жиыны оқиғалар кеңістігі деп аталады және $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ деп жазылады. Оқиға латынның бас әріптері $A, B, C, \dots$ арқылы белгіленеді.

Мысалдар.

1. Тиын лақтырылды – тәжірибе. A - елтаңба түсті, B - сан түсті – оқиғалар. $\Omega = \{A, B\}$
2. Екі кісі шахмат ойнады- тәжірибе. A - Бірінші кісі жеңді, B - Бірінші кісі жеңілді, C - тең ойнады – оқиғалар. $\Omega = \{A, B, C\}$
3. Мұғалім оқушыдан сабақ сұрады- тәжірибе. Оқушы «5» алды- оқиға.
4. Ауа райын бақылады- тәжірибе. Бүгін қар жауады; күн ашық болды- оқиға.
5. Нысанаға оқ атылды- тәжірибе. Нысанаға оқ тиді; оқ тимеді – оқиғалар.
6. Тиын лақтырылды- тәжірибе. Елтаңба түсті; сан түсті - оқиғалар

Анықтама Белгілі бір шарттар комплексі орындалғанда болуы да болмауы да мүмкін оқиға *кездейсоқ оқиға* деп аталады.

Анықтама Егер тәжірибе нәтижесінде оқиға міндетті түрде пайда болса (пайда болмаса), онда ол *ақиқат (мүмкін емес)* оқиға деп аталады.

Мысал. Ойын сүйегі лақтырылды. 7 ұпай түсті - мүмкін емес, жұп ұпай түсті – кездейсоқ, ал алтыдан артық емес ұпай түсті – ақиқат оқиға.

Анықтама A және B оқиғалары бірге пайда бола алса (бола алмаса) олар үйлесімді (үйлесімсіз) деп аталады.

Анықтама Егер A оқиғасы пайда болуы нәтижесінде B оқиғасы да пайда болса, онда A оқиғасы B оқиғасына *қолайлы* деп аталады.

Мысал. A - 3 ұпай түсті, B – тақ ұпай түсті.

Анықтама A оқиғасы пайда болмады дегенді білдіретін $\bar{A}$ оқиғасы A оқиғасына қарама-қарсы оқиға деп аталады.

A - оқ нысанаға тиді, $\bar{A}$ - оқ нысанаға тимеді.

Анықтама Тәжірибе нәтижесінде ең болмағанда біреуі пайда болатын оқиғалар жиыны *толық топ* деп аталады.

Мысал. Ойын сүйегі лақтырылды. A_i – i ұпай түсті $i=1,6$. Осы оқиғалар $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ толық топ құрады.

Оқиғаның пайда болу мүмкіншілігінің дәрежесін сипаттайтын сан *ықтималдық* деп аталады. $P(A)$ деп белгіленеді.

Анықтама (классикалық) A оқиғасының *ықтималдығы* деп осы оқиғаға қолайлы жағдайлар санының барлық жағдайлар санына қатынасы аталады, яғни

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ мұнда } n - \text{тәжірибенің өзара үйлесімсіз, теңмүмкінді нәтижелерінің}$$

саны; ал m – A оқиғасы пайда болуына қолайлы нәтижелер саны.

Мысал. Екі тиын лақтырылды сонда ең болмағанда бір рет елтаңба түсу ықтималдығын тап. $P(A) = \frac{3}{4} = 0,75$.

Ықтималдықтың қасиеттері:

1. Ақиқат оқиға ықтималдығы 1-ге тең
2. Мүмкін емес оқиға ықтималдығы 0-ге тең
3. кездейсоқ оқиға ықтималдығы $0 < P(A) < 1$.

Анықтама Оқиға пайда болған тәжірибелер санының барлық тәжірибелер санына қатынасы салыстырмалы жиілік деп аталады

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Мысал. Атқыш нысанаға 20 оқ атты. Оның 18-і нысанаға тиді. Оқтың нысанаға тиюінің салыстырмалы жиілігін тап.

Анықтама (статистикалық) A оқиғасының ықтималдығы деп тәжірибе саны өте үлкен болғанда төңірегінде салыстырмалы жиілік топталатын $P(A)$ саны аталады.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(A)$$

Мысал. Төмендегі кесте бойынша статистикалық анықтама көмегімен елтаңба түсу ықтималдығын тап.

Лақтыру саны	Елтаңба түсті	Салыстырмалы жиілік
4040	2048	0,5080
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

$$P(A) = 0,5$$

Анықтама (геометриялық) A оқиғасы пайда болуына қолайлы облыс өлшемінің барлық облыс өлшеміне қатынасы геометриялық ықтималдық деп аталады.

$$P(A) = \frac{m(g)}{m(G)}$$

Түрлі комбинациялар санын есептеумен айналысатын математика бөлімі комбинаторика деп аталады.

Анықтама Берілген n элементтен m элемент бойынша орналастырулар деп бір-бірінен элементтерінің не құрамы, не орналасу реті бойынша ажыратылатын m элементтен тұратын комбинациялар аталады.

Орналастырулар саны мына формуламен есептеледі:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) \text{ немесе } A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Мысал 1,2,3,4 цифрларынан қанша үш таңбалы сан құруға болады?

Анықтама n элементтен құрылған алмастырулар деп бір-бірінен элементтерінің орналасу реті бойынша ажыратылатын n элементтен тұратын комбинациялар аталады.

Алмастырулар санын есептеу формуласы: $P_n = n!$ (эн факториал).

Мысал. 1,2,3,4 цифрларынан қанша төрт таңбалы сан құруға болады?

Анықтама n элементтен m элемент бойынша *терулер* деп бір-бірінен элементтерінің құрамы бойынша ажыратылатын m элементтен тұратын комбинациялар аталады.

Терулер санын есептеу формуласы $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Мысал 1. Дүкенге 30 тоңазытқыш түсті, оның бесеуі ақау. Одан кездейсоқ бір тоңазытқыш алынды. Алынған тоңазытқыш ақау болмау ықтималдығын тап

Шешуі: A - тоңазытқыш ақау емес.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Мысал 2. Қорапта тұрпаты бірдей және диаметрлері әртүрлі алты бұранда жатыр. Қораптан бұрандалар біртіндеп алынды. Сонда бұрандалар өсу ретімен шығу ықтималдығын тап.

Шешуі: A - бұрандалар өсу ретімен шықты.

$$n = 6! = 720, \quad m = 1, \quad P(A) = \frac{1}{720}.$$

Мысал 3. Айына бір рет сапа комиссиясы ішінде екі жиһаз дүкені бар қаладағы отыз дүкеннің екеуін тексереді. Сонда бір ай ішінде екі жиһаз дүкені тексерілу ықтималдығын тап.

Шешуі: A -екі жиһаз дүкені тексерілді.

$$n = C_{30}^2, \quad m = C_2^2 = 1, \quad P(A) = \frac{1}{C_{30}^2} = \frac{1}{435}.$$

Мысал 4. 25 студенті бар топтан кезекшілікке 3 студентті қанша тәсілмен алуға болады?

Шешуі: Терулер санын есептеу формуласын пайдаланып шығарамыз

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, яғни $n=25$, $m=3$, формулаға қойып табамыз:

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{25!}{3!22!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300$$

Мысал 5. Станцияға түрлі өнім салынған 10 вагон келді. Вагондар бірден онға дейінгі сандармен нөмірленген. Тексеруге одан кездейсоқ 5 вагон алынды. Алынған вагондар ішінде екі және бес сандарымен нөмірленген вагондар болу ықтималдығын тап.

Шешуі: А - бақылауға алынған вагондар ішінде 2 және 5 сандарымен нөмірленген вагондар бар.

$$n = C_{10}^5 \quad m = C_8^3 \quad P(A) = \frac{2}{9}$$

Мысал 6. 200 өнімнен тұратын партияда үш ақау өнім бар. Одан бес өнім таңдап алынды. Мына оқиғалардың ықтималдығын тап:

а) таңдамада бірде-бір ақау өнім жоқ;

б) таңдамада бір ақау өнім бар.

Шешуі: А- таңдамада бірде-бір ақау өнім жоқ. В- таңдамада бір ақау өнім бар.

а) $n = C_{200}^5 \quad m = C_3^0 \cdot C_{197}^5$

$$P(A) = \frac{C_3^0 \cdot C_{197}^5}{C_{200}^5} = \frac{243373}{262680} = 0,926$$

$$P(B) = \frac{C_3^1 \cdot C_{197}^4}{C_{200}^5} = \frac{1261}{17512}.$$

Мысал 7. Жиырма акционерлік қоғамның (АҚ) төртеуі банкрот болды. Азамат алты акционерлік қоғамнан бір-бірден акция алған болатын. Сонда алынған акциялардың екеуі банкрот акционерлік қоғамның акциясы болу ықтималдығын тап.

Шешуі: А- сатып алынған акциялардың екеуі банкрот қоғамның акциясы

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_{16}^4}{C_{20}^6} = 0.28.$$

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Кездейсоқ оқиға деп не аталады?
2. Қандай оқиға ақиқат, мүмкін емес, қолайлы, қарама-қарсы деп аталады?
3. Қандай оқиғалар үйлесімді, үйлесімсіз деп аталады?
4. Оқиғалардың толық тобы деп не аталады?
5. Оқиғаның салыстырмалы жиілігі дегеніміз не?
6. Оқиға ықтималдығының классикалық анықтамасын тұжырымда.

7. Алмастырулар, орналастырулар, терулер деп не аталады?

Жаттығулар

1. Қорапта 4ақ,9 қара және 7 қызыл бірдей шарлар салынған. Қораптан кез-келген бір шар алынады.Сонда ақ шар пайда болуының ықтималдылығы қандай?

2. а) Ө, Н, С, Е, Д, У әріптері бөлек карталарға жазылған. Содан кейін карталар араластырып кез-келген ретпен бір қатарға орналастырылған. Сонда сәндеу сөзінің пайда болуының ықтималдығы қандай?

б) Әрқайсысында бір әріп жазылған карталардан “Жарлық”сөзі құрылған.Карталарды араластырып, содан кейін бір-бірлеп алған ретімен сөз құрастырылады.Сонда ЖАҚ сөзінің пайда болуының ықтималдығы қандай?

3. Ұйымда 6 ер адам, 4 әйел адам жұмыс істейді. Табельдегі нөмірлері бойынша 7 адам таңдап алынды. Таңдап алынған адамдардың ішінде 3 әйел бар болуының ықтималдығын табу керек.

4. Кітап сөресінде кездейсоқ ретпен 5 томнан тұратын анықтама қойылған: а)кітаптар бірінші томнан бесінші томға дейін дұрыс ретпен орналасуының ықтималдығын табу керек;

б) ең болмағанда бір томның ретті орнында тұрмаған жағдайдың ықтималдығын табу керек.

5. Қорапта бірдей 5 бұйым бар. Оның үшеуі боялған. Қораптан кез-келген екі бұйым алынды:

1) алынған екі бұйымның біреуі боялған бұйым болуының ықтималдығын табу керек;

2) алынған бұйымның екеуі де боялған бұйым болуының ықтималдығын табу керек.

6. Екі 4 және 5 цифрларының көмегімен әртүрлі үш орынды қанша сан жазуға болады?

7. Мына 5;3;1;5;5;1 цифрлардың көмегімен алты таңбалы қанша сан жазуға болады.

8. Гүл дүкенінде 3 түрлі гүлдер бар. Алынған 7 гүлден қанша әдіспен букет жасауға болады?

9. 1-ден 35-ке дейінгі бүтін сандар арқылы нөмірленген 35 емтихан билеттерінің ішінен қалай болса солай бір билет алынған. Суырылған билеттің нөмірі үшке еселі сан болу ықтималдығы қандай?

10. Группадағы 15 студентке, оның сегізі қыздар, театрға 8 билет берілді.Сонда театрға билет алған 8 студенттің екеуі қыздар болуының ықтималдығы қандай?

2-тақырып Қосу және көбейту теоремалары

Мақсат: Оқиғалардың қосындысы мен көбейтіндісі ұғымдарын енгізу және студенттерді қосу мен көбейту теоремаларымен таныстыру. Студенттерді қосу мен көбейту теоремаларын есеп шығаруға қолданып үйрету.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі

1. Оқиғаларға қолданылатын амалдар.
2. Қосу теоремалары.
3. Көбейту теоремалары.

Анықтама A және B оқиғаларының қосындысы деп олардың ең болмағанда біреуі пайда болатын $C=A+B$ оқиғасы аталады.

Анықтама A және B оқиғаларының көбейтіндісі деп олардың екеуі де пайда болатын $D=A \cdot B$ оқиғасы аталады.

Анықтама Бірнеше оқиғалардың тәжірибе нәтижесінде ең болмағанда біреуі пайда болуы оқиғалардың қосындысы деп аталады.

$$B = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Анықтама Тәжірибе нәтижесінде бірнеше оқиғалардың бірге пайда болуы оқиғалардың көбейтіндісі деп аталады.

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$$

Анықтама Егер A оқиғасының пайда болуы B оқиғасының пайда болуы ықтималдығын өзгертпесе, онда B оқиғасы A оқиғасынан тәуелсіз деп аталады.

Анықтама A оқиғасы пайда болғаннан соң табылған B оқиғасының ықтималдығы *шартты ықтималдық* деп аталады және $P_A(B)$ деп белгіленеді.

Теорема Үйлесімсіз екі оқиғаның қосындысының ықтималдығы олардың ықтималдықтарының қосындысына тең

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Осы теорема жалпы түрде былай оқылады: үйлесімсіз оқиғалардың қосындысының ықтималдығы олардың ықтималдықтарының қосындысына тең $P(A_1 + A_2 + \dots + A_N) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_N)$

Салдар Толық топ құрайтын оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысы бірге тең $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_N) = 1$.

Салдар Қарама- қарсы оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысы бірге тең $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Теорема Тәуелсіз екі оқиғаның көбейтіндісінің ықтималдығы олардың ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Осы теорема жалпы түрде былай оқылады: тәуелсіз оқиғалардың көбейтіндісінің ықтималдығы олардың ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_N) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_N)$$

Теорема Үйлесімді екі оқиғаның ең болмағанда біреуі пайда болу ықтималдығы осы оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысы мен олардың бірге пайда болу ықтималдығының айырмасына тең

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Анықтама Егер бірнеше оқиғалардан тұратын жиынның әр оқиғасы қалған оқиғалардың кез келген комбинациясымен тәуелсіз болса, онда ол оқиғалар *жиынтықта тәуелсіз* деп аталады.

Теорема Жиынтықта тәуелсіз $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының ең болмағанда біреуінің пайда болу ықтималдығы бір мен олардың қарама-қарсы оқиғаларының ықтималдықтарының көбейтіндісінің айырмасына тең

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n)$$

Салдар Егер $A_1, A_2, \dots, A_m$ оқиғаларының пайда болу ықтималдықтары өзара тең және p болса, онда ол оқиғалардың ең болмағанда біреуі пайда болу ықтималдығы $P(A) = 1 - q^m$.

Теорема Екі тәуелді оқиғаның бірге пайда болу ықтималдығы бірінші оқиғаның ықтималдығы мен екінші оқиғаның шартты ықтималдығының көбейтіндісіне тең.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Мысал 1. Бақылаушы өнімнің стандартқа сай болуын тексереді. Өнімнің стандартқа сай болу ықтималдығы 0,9.

а) егер стандартқа сай өнім пайда болу оқиғалары тәуелсіз болса, онда тексерілген екі өнімнің екеуі де стандартқа сай болу ықтималдығы қандай?

б) тексерілген екі өнімнің тек қана біреуі стандартқа сай болу ықтималдығы қандай?

Шешуі: A_1 - бірінші өнім стандартқа сай; A_2 -екінші өнім стандартқа сай;

B - тексерілген екі өнімнің екеуі де стандартты; C -тексерілген екі өнімнің тек қана біреуі стандартты

$$P(A_1)=0,9, \quad P(A_2)=0,9$$

$$P(B)=? \quad P(C)=?$$

$$а) B = A_1 A_2 \quad P(B) = P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81$$

A_1 мен A_2 тәуелсіз болғандықтан тәуелсіз оқиғалар үшін көбейту теоремасы қолданамыз.

$$б) B_1 - \text{тек қана бірінші өнім стандартты. } B_1 = A_1 \bar{A}_2$$

$$B_2 - \text{тек қана екінші өнім стандартты. } B_2 = \bar{A}_1 A_2,$$

$$B = B_1 + B_2, \quad B = A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2,$$

$$P(B) = P(A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2) = 0,9 \cdot (1-0,9) + (1-0,9) \cdot 0,9 = 0,18.$$

Мысал 2. Ауданда 100 ауыл бар. Оның бесеуінде ауылшаруашылық техникасының прокат бөлімі орналасқан. Кездейсоқ екі ауыл алынды. Олардың екеуінде де прокат бөлімі болу ықтималдығын тап.

Шешуі: A - алынған екі ауылда прокат бөлімі бар; A_1 - бірінші ауылда прокат бөлімі бар; A_2 - екінші ауылда прокат бөлімі бар

$$P(A) = ? \quad A = A_1 A_2,$$

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2);$$

$$P(A_1) = \frac{5}{100}, \quad P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{99},$$

$$P(A) = P(A_1 A_2) = \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = \frac{20}{100 \cdot 99} = \frac{1}{495}.$$

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Оқиғалардың қосындысы мен көбейтіндісінің анықтамасын бер.
2. Үйлесімсіз оқиғалар үшін ықтималдықтың қосу теоремасын тұжырымда.
3. Тәуелсіз оқиғалар үшін ықтималдықтың көбейту теоремасын тұжырымда.
4. Үйлесімді оқиғалар үшін ықтималдықтың қосу теоремасын тұжырымда.
5. Тәуелді оқиғалар үшін ықтималдықтың көбейту теоремасын тұжырымда.
6. Қарама-қарсы оқиғалардың ықтималдығы неге тең?
7. Ең болмағанда бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы қалай табылады?

Жаттығулар

1. 36 картаның ішінен кез-келген 2 карта алынсын. Осы екі картаның бір түсті болуының ықтималдығын табу керек.
2. Екі мерген атыс алаңында атыс жүргізуде. Бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы – 0,7, екіншісінікі – 0,8 тең. Егер екеуі де бір-бірден атыс жасаса, ең болмағанда біреуінің нысанаға дәл тигізетіндігінің ықтималдығы қандай?
3. Екі жәшікке бөлшектер салынған. Бірінші жәшікте 10 бөлшек, оның үшеуі стандартты, екіншісінде – 15 бөлшек онда 6 стандартты бар. Әрбір жәшіктен бір-бірден кез-келген бөлшек алынды. Алынған екі бөлшектіңде стандартты екенінің ықтималдығын табу керек.
4. Бөлшек дайындау процессі үш операциядан тұрады. Бірінші операция кезінде сапасыз бөлшек дайындалуының ықтималдығы – 0,02, ал екінші операция кезінде – 0,03 және үшінші операция кезінде – 0,02. Сапасыз бөлшектердің пайда болуын тәуелсіз оқиғалар деп қарастырып, осы үш операциядан кейін сапалы бөлшек дайындауының ықтималдығын табу керек.
5. Сүңгір қайықты іздеп табудың ықтималдығы 0,8, ал оны жойып жіберудің ықтималдығы 0,6 – ға тең. Іздеп табылған сүңгуір қайықты жойып жіберудің ықтималдығы қандай?
6. Үш баскетболшы корзинаға бір-бірден доп лақтырды. Бірінші баскетболшының корзинаға доп түсіруінің ықтималдығы 0,9, екіншісінікі – 0,8,

үшіншісінікі – 0,7. Тек бір баскетболшының корзинаға доп түсіруінің ықтималдығы қандай?

7. Үш аңшы ұшып бара жатқан қазды сәйкес $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ ықтималдықтарымен атып түсіре алады. Ұшып бара жатқан қазды үшеуі де бір мезгілде атты. Қазды атып түсіргендіктің ықтималдығы қандай?

8. Екі қорапқа ақ және қара түсті бірдей шарлар салынған. Айталық бірінші қорапта m_1 ақ, n_1 қара, ал екіншісінде - m_2 ақ, n_2 қара шарлар бар болсын. Екі қораптан бір мезгілде, бір-бірден кез-келген шарлар алынған. Алынған екі шардың ең болмағанда біреуі ақ шар болғандығының ықтималдығын табыңыз.

9. Қорапта бірдей бұйым бар. Қораптан екі сапалы бұйым алудың ықтималдығы $\frac{4}{15}$ тең. Қорапта қанша сапалы бұйым бар еді?

10. Тоқ кернеуі ұлғайтылғанда бір-бірімен тізбектес жалғанған үш элементтің бірінің істен шығуына байланысты электр жүйесінде үзіліс пайда болуы мүмкін. Элементтердің істен шығуларының ықтималдықтары сәйкес 0,2; 0,3; 0,4. Электр жүйесінде үзіліс болмауының ықтималдығын табу керек.

Нұсқау: Электр жүйесінде үзіліс болмау үшін ешбір элемент істен шықпауы керек.

11. Бір партияда 50 зат бар, оның 5-уі сапасыз. Осы партиядан алынған кез-келген 30 заттың ішінде сапасыз зат біреуденартық болмауының ықтималдығын табу керек.

Нұсқау: Белгілеу енгізейік. А- барлық 30 зат сапалы. В- 30 заттың біреуі сапасыз. Сонда А,В оқиғалары үйлесімсіз. Олай болса $C=A+B$ – алынған 30 заттың ішінде сапасыз зат біреуден артық еместігін білдіретін оқиға.

12. Жәшіктегі 10 детальдің 4-і боялған. Деталь жинаушы 3 деталь алды. Алынған үш детальдің ең болмағанда біреуі боялғандығының ықтималдығын табу керек.

13. Ақшалай-заттай лотереяда әрбір 10000 билетке 150 заттай және 50 ақшадай ұтыс шығады. Бір билеті бар адамға не заттай, не ақшалай ұтыс шығуының ықтималдығы қандай?

14. Урнада он қызыл, 5 көк және 15 ақ шарлар бар. Түсті шардың алынуының ықтималдығы қандай?

15. Лотереяда 1000 билет бар. Оның әрбір екі билетінің біріне ұтыс шығады. Екі билет сатып алынған. Осы екі билетке де ұтыс шығуының ықтималдығы қандай?

16. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Сонда пайда болған сандардың қосындысы 5-тен артық болмауының ықтималдығын табу керек.

17. Үш ойын сүйегі лақтырылған. Сонда үш сүйекте де бірдей сан пайда болуының ықтималдығы қандай?

18. Екі күміс теңгені лақтырғанда ең болмағанда бір рет “цифр” пайда болуының ықтималдығы қандай?

19. Урнада 9 қызыл, 6 көк шарлар бар. Кез-келген екі шар алынды. Алынған екі шардың да қызыл болуының ықтималдығын табу керек.

20. Жұмысшы үш станоктің істен шықпауын қамтамасыз етеді. Бір сағат ішінде жұмысшының қадағалауынсыз жұмыс істеу ықтималдығы бірінші станок

үшін 0,3-ке тең, екіншісі үшін – 0,5 және үшіншісі 0,6. Мына оқиғалардың ықтималдығын табу керек:

а) Бір сағат бойында ең болмағанда бір станок жұмысшының қадағалауынсыз жұмыс істейді;

в) Екі сағат бойы үш станок те жұмысшының қадағалауынсыз жұмыс істейді.

21. Семьяда 4 бала бар. Ер бала мен қыз баланың дүниеге келуінің ықтималдықтары бірдей деп алып, мына оқиғалардың ықтималдықтарын табу керек:

а) Барлығы да ұлдар.

б) Барлығы не ұлдар, не қыздар

в) Ең болмағанда біреуі қыз бала.

22. Екі мергент нысанаға атыс жүргізуде. Бірінші мергеннің (А оқиғасы) нысанаға тигізу ықтималдығы $-0,5$, ал екіншісінікі (В оқиғасы) $-0,4$. Егер әрбір мерген 3 рет атыс жасаған болса, ең болмағанда нысанаға бір рет тигізудің ықтималдығын табу керек.

Нұсқау: Әуелі бір атыста ең болмағанда бір рет тигізудің ықтималдығын табу керек.

23. Урнада 10 шар. Урнадан екі ақ шар алудың ықтималдығы $2/15$ – ке тең. Урнада қанша ақ шар бар еді?

3-тақырып Толық ықтималдық формуласы. Байес формуласы

Мақсат: Студенттерді толық ықтималдық және Байес формулаларымен таныстыру, оларды есеп шығарғанда қолдануға үйрету.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. Толық ықтималдық формуласы.

2. Байес формуласы.

3. Толық ықтималдық және Байес формулаларының қолданылулары.

Теорема Егер A оқиғасы толық топ құрайтын $B_1, B_2, \dots, B_n$ оқиғалардың (болжам) біреуі пайда болғанда ғана пайда болса, онда A оқиғасының пайда болу ықтималдығы осы оқиғалардың (болжамдар) ықтималдығы мен A оқиғасының шартты ықтималдығының көбейтінділерінің қосындысына тең

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Теорема Тәжірибе жүргізілген соң болжам оқиғаның ықтималдығы тәжірибе жүргізілгенге дейінгі болжам оқиға ықтималдығы мен оған сәйкес шартты ықтималдықтың көбейтіндісінің осы оқиғаның толық ықтималдығына қатынасына тең.

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$$

мұнда $P(A)$ - A оқиғасының толық ықтималдығы.

Мысал 1. Автозаводқа үш заводтан двигательдер келіп түсті. Бірінші заводтан 10, екіншіден - 6 және үшіншіден - 4 двигатель келді. Бұл двигательдердің гарантия кезінде тоқтаусыз жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкес 0,9; 0,8; 0,7.

а) машинаға қойылған двигатель гарантия кезінде тоқтаусыз жұмыс істеу ықтималдығын тап

в) гарантия кезінде тоқтаусыз жұмыс істеген машина бірінші, екінші заводтан болу ықтималдығын тап.

Шешуі: A - гарантия кезінде машина тоқтаусыз жұмыс істеді;

B_1 - машинаға бірінші заводтың двигательі қойылған;

B_2 - машинаға екінші заводтың двигательі қойылған;

B_3 - машинаға үшінші заводтың двигательі қойылған

$$P_{B_1}(A) = 0,9, \quad P_{B_2}(A) = 0,8, \quad P_{B_3}(A) = 0,7.$$

а) $P(A) = ?$ $P_A(B_1) = ?$ $P_A(B_2) = ?$

Кездейсоқ алынған машинаның тоқтаусыз жұмыс істеу ықтималдығын табуға толық ықтималдық формуласын пайдаланамыз:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)$$

$$P(B_1) = \frac{10}{20} = 0,5, \quad P(B_2) = \frac{6}{20} = 0,3, \quad P(B_3) = \frac{4}{20} = 0,2,$$

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,83.$$

Гарантия кезінде тоқтаусыз жұмыс істеген машина бірінші (екінші) заводтан болу ықтималдығын табуға Байес формуласын қолданамыз:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,9}{0,83} = 0,54,$$

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,8}{0,83} = 0,29.$$

Мысал 2. N кеденінде қарастырылған уақыт аралығында $ТП_1$, $ТП_2$, $ТП_3$ кеден посттарында тіркелген МКД көлемдері 3:2:1. Онда импорт тауарларға құрылған МКД $ТП_1$ - 30%, $ТП_2$ - 40%, $ТП_3$ - 50% құрайды. Посттардан декларация бақылау үшін кедендік төлемдер бөліміне түседі. Барлық декларациялар жиынтығынан бір декларация кездейсоқ алынады.

Табу керек:

а) алынған декларация импорт тауарға құрылған болу ықтималдығын;

б) егер ол импорт тауарға құрылған болса, онда ол $ТП_1$ тіркелген болу ықтималдығын.

Шешуі:

Белгілейміз: A - «кездейсоқ алынған декларация импорт тауарға құрылған»,

B_i - «декларация $ТП_i$ тіркелген», $i=1, 2, 3$.

а) Толық ықтималдық формуласы бойынша

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)$$

B_i болжамдарының $P(B_i)$ ықтималдықтарын кеден постарында тіркелген декларациялар қатынасынан табамыз:

$$P(B_1) = \frac{3}{3+2+1} = \frac{1}{2}, \quad P(B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(B_3) = \frac{1}{6}.$$

A оқиғасының шартты ықтималдықтарын импорт тауарға құрылған декларациялардың проценттік құрамынан табамыз:

$$P_{B_1}(A) = \frac{30}{100} = 0,3, \quad P_{B_2}(A) = 0,4, \quad P_{B_3}(A) = 0,5.$$

Сонда $P(A) = \frac{1}{2} \cdot 0,3 + \frac{1}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{6} \cdot 0,5 \approx 0,367$

б) Байес формуласы бойынша $P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,3}{0,367} \approx 0,409$

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Толық ықтималдық формуласын жаз.
2. Байес формуласын жаз.
3. Байес формуласы қай жағдайда қолданылады?

Жаттығулар

1. Қоймаға үш партия телевизорлар әкелінді. Алынған кез келген телевизордың осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,25; 0,5; 0,25 тең. Ал әрбір партиядағы телевизорлардың белгілі мерзім жұмыс істеп шығуларының ықтималдықтары сәйкес 0,7; 0,6; 0,8.
 - а) Осы партиялардың бірінен алынған телевизордың белгілі мерзім жұмыс істеп шығуының ықтималдығы қандай?
 - б) Мерзімді уақыт жұмыс істеп шыққан телевизордың екінші партиядан алынғандығының ықтималдығын табу керек.
2. Атқыш өзіне қарай қозғалып келе жатқан нысанаға оқ жаудырған. Бірінші рет атқанда нысанаға тию ықтималдығы 0,4 және келесі атқан сайын 0,1-ге өсіп тұрады. Тәуелсіз үш атқанда екі рет тигізу ықтималдығы қандай?
3. 350 бұйымдардың 160 – бірінші сортқа, 110 – екінші сортқа, 80 – үшінші сортқа жатады. Бірінші сортқа жататын бұйымдардың ішінде сапасыз бұйым болуының ықтималдығы 0,01, екінші сортқа жататындардың арасында – 0,02, үшінші сортқа жататындардың арасында – 0,04 тең. Кез-келген бір бұйым алынған. Алынған бұйымның сапалы екенінің ықтималдығын табу керек.
4. Бірдей үш қорапқа бірдей өлшемді шарлар салынған. Бірінші қорапта 10 ақ, 5 қара, 3 қызыл, екінші қорапта 9 ақ, 16 қара, 11 қызыл, үшінші қорапта 7 ақ, 4 қара, 1 қызыл шарлар бар. Кез келген қораптан кез келген шар алынды. Алынған шардың қара шар болуының ықтималдығы қандай?

5. Бірінші урнаға 1 ақ, 3 қара, ал екінші урнаға 4 ақ, 6 қара бірдей шарлар салынған. Бірінші урнадан бір шар алынып екінші урнаға салынды. Содан кейін екінші урнадан шар алынды. Екінші урнадан алынған шардың түсі қара болуының ықтималдығы қандай?
6. Магазинге үш зауыттан бір типтес бұйымдар әкелінген. Барлық әкелінген бұйымдардың бірінші зауыт 50% - тін, екіншісі 30% - тін, үшіншісі 20% - тін жіберген. Бірінші зауыт бұйымдарының 70% - ті, екіншісінің – 80% - ті, үшіншісінің – 90% - ті бірінші сортқа жатады. Бір бұйым сатып алынды және ол бірінші сортқа жататын болып шықты. Сатып алынған бұйымның бірінші зауыттан шығарылғандығының ықтималдығын табу керек.
7. Спортшылардың бір группасында 20 шаңғышы, 10 велосипедші бар. Квалификациялық мөлшерді орындау ықтималдығы шаңғышылар үшін 0,85 тең, ал велосипедшілер үшін - 0,7 тең. Осы группадан алынған кез-келген бір спортшының квалификациялық мөлшерді орындауының ықтималдығын табу керек.
8. Екі жәшікте 20 детальден бар. Оның ішінде бірінші жәшікте 17 стандартты, екінші жәшікте 15 стандартты деталь бар. Екінші жәшіктен кез келген бір деталь алынып бірінші жәшікке салынған. Содан кейін бірінші жәшіктен кез келген бір деталь алынды. Бірінші жәшіктен алынған детальдың стандартты болуының ықтималдығын табу керек.
9. Екі атқыш бір-бірінен тәуелсіз бір нысанаға бір-бірден атыс жасады. Сонда бір оқ нысанаға тиді. Егер бірінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,8, ал екіншісінікі – 0,4 болса, онда нысанаға тиген оқ бірінші атқыштікі екенінің ықтималдығын табу керек.
10. Цехта істеп тұрған үш автомат барлығы 5500 бұйым жасап шығарды. Оның ішінде бірінші автоматтан 1000, екіншісінен - 2000, ал үшіншісінен – 2500 бұйым жасалып шығарылды. Егер бірінші автоматтың сапасыз бұйым шығаруы – 0,3, екіншісінікі – 0,2, үшіншісінікі – 0,4 болса, алынған кез келген бұйымның сапасыз болуының ықтималдығын табу керек.

4-тақырып Тәуелсіз қайталамалы тәжірибелер

Мақсат: Тәуелсіз қайталамалы тәжірибелерде пайда болатын оқиғалардың ықтималдығын анықтау.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. Бернулли формуласы.
2. Лапласың локальдық формуласы.
3. Пуассон формуласы.
4. Лапласың интегралдық формуласы.

Егер бірнеше тәжірибелер жүргізілгенде А оқиғасының пайда болу ықтималдығы әр тәжірибеде басқа тәжірибелер нәтижесінен тәуелсіз болса, ондай тәжірибелер А оқиғасына қарағанда *тәуелсіз* деп аталады.

Теорема (Бернулли) Егер A оқиғасының пайда болу ықтималдығы p әр тәжірибеде тұрақты болса, онда A оқиғасының n тәуелсіз тәжірибеде m рет пайда болу ықтималдығы

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ мұнда } q = 1 - p$$

Теорема (Пуассон) Егер тәжірибе саны n шексіз артқанда ($n \rightarrow \infty$) A оқиғасының әр тәжірибеде пайда болу ықтималдығы нольге ұмтылса ($p \rightarrow 0$) және $n \cdot p$ көбейтіндісі тұрақты λ санына ұмтылса ($n \cdot p \rightarrow \lambda$), онда n тәжірибеде A оқиғасының m рет пайда болу ықтималдығы мына теңдікті қанағаттандырады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ мұнда } \lambda = np.$$

Осы теңдікті басқаша былай жазуға болады: $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

Теорема Егер әр тәжірибеде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тұрақты және 0 мен 1-ден өзгеше болса, онда n тәуелсіз тәжірибеде (n өте үлкен сан) A оқиғасының m рет пайда болу ықтималдығы жуықтап алғанда мынаған тең

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{мұнда} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Бұл теорема Муавр-Лапласының *локальдық теоремасы* деп аталады.

Теорема Егер A оқиғасының пайда болу ықтималдығы p әр тәжірибеде тұрақты және 0 мен 1-ден өзгеше болса, онда n тәжірибеде (n өте үлкен сан) A оқиғасының m пайда болу саны m_1 және m_2 сандарымен шектелу ықтималдығы жуықтап алғанда мынаған тең: $P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

Мұнда $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ Лаплас функциясы деп аталады.

Бұл теорема Муавр-Лапласының *интегралдық теоремасы* деп аталады.

Ескерту 1. Лаплас және Пуассон формулалары ықтималдықтың n өскен сайын дәлдігі артатын жуық мәндерін береді.

Ескерту 2. $\varphi(x)$ және $\Phi(x)$ функцияларының мәндері кестеде келтірілген, ол кез келген ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика оқулықтарында, есептер жинағында бар. Мұнда $\varphi(x)$ жұп, ал $\Phi(x)$ тақ функция екенін ескеру қажет.

Ең ықтимал сан және ең үлкен ықтималдық

$P_n(m)$ және $P_n(m-1)$ ықтималдықтарының қатынасын алып, түрлендірулер жүргізсек:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} &= \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1}} = \frac{\frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!}}{\frac{n(n-1) \dots (n-m)}{(m-1)!}} \frac{p}{q} = \\ &= \frac{(n-m+1)}{mq} = \frac{(n+1) - m(1-q)}{mq} = 1 + \frac{(n+1)p - m}{mq} \end{aligned} \quad (1)$$

$$P_n(m) = \left[1 + \frac{(n+1)\rho - m}{mq} \right] P_n(m-1) \quad (2)$$

(1) қатынастан мынандай қорытындыға келеміз:

1) егер $m < (n+1)\rho$ болса ,

$$P_n(m) > P_n(m-1)$$

2) егер $m > (n+1)\rho$ болса ,

$$P_n(m) < P_n(m-1)$$

3) егер $m = (n+1)\rho$ болса

$$P_n(m) = P_n(m-1)$$

Мына

$$(n+1)\rho - 1 < \mu \leq (n+1)\rho \quad (3)$$

теңсіздіктері қанағаттандыратын бір ғана μ бүтін саны бар. Сонымен мынандай теорема дәлелденеді.

Теорема Егер m саны 0-ден n -ге дейін өссе, онда $P_n(m)$ ықтималдығы алдымен монотонды өседі, содан кейін $m = \mu$ болғанда өзінің ең үлкен мәнін қабылдайды, ал одан соң монотонды кемиді. (3) теңсіздіктермен анықталатын μ санын ең ықтимал сан деп атайды. Жоғарыда дәлелденген теорема бойынша $P_n(\mu)$ ықтималдығы барлық $P_n(m)$ ықтималдықтардың ішінде ең үлкені болады.

Мысал 1. Жаңа мөлтек ауданда үйлердің кіретін есігіне коды бар 10000 құлып қойылған. Бір ай ішінде құлыптың істен шығу ықтималдығы: а) 0,0002; б) 0,001. Бір айда екі , үш және бес құлып істеп шығу ықтималдығын тап.

Шешуі: а) Пуассон формуласын қолданамыз $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, мұнда $\lambda = np$.

$$\lambda = np = 10000 \cdot 0,0002 = 2, \text{ сонда } P_{10000}(2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 0,27;$$

$$P_{10000}(3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0,18; \quad P_{10000}(5) = \frac{2^5}{5!} e^{-2} = 0,036.$$

Мысал 2. Клиенттің банктен депозит қайтарып алу ықтималдығы 0,3-ке тең. Депозитке ақша салған 120 клиенттің

а) 35 клиент;

б) 35-тен артық емес клиент депозит қайтарып алу ықтималдығын тап.

Шешуі:

а) n ($n > 20$) үлкен болғанда n тәуелсіз тәжірибеде A оқиғасы k рет пайда болу ықтималдығы Лапласың локальдық формуласы бойынша анықталады:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Есеп шарты бойынша $n = 120$, $k = 35$, $p = 0,3$, $q = 1 - p = 0,7$

Сонда

$$P_{120}(35) = \frac{1}{\sqrt{120 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} \Phi\left(\frac{35 - 0,3 \cdot 120}{\sqrt{120 \cdot 0,3 \cdot 0,7}}\right) =$$

$$= 0,199 \cdot \Phi(-0,199) = 0,199 \cdot 0,391 = 0,078$$

б) n тәуелсіз тәжірибелерде A оқиғасы k_1 -ден k_2 -ге дейін пайда болу ықтималдығы Лапластың интегралдық формуласымен анықталады

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Есеп шарты бойынша $k \leq 35$, т.е. $k_1 = 0$, $k_2 = 35$.

Сонда

$$P_{120}(0; 35) = \Phi\left(\frac{35 - 0,3 \cdot 120}{\sqrt{120 \cdot 0,3 \cdot 0,7}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 0,3 \cdot 120}{\sqrt{120 \cdot 0,3 \cdot 0,7}}\right) =$$

$$= \Phi(-0,199) - \Phi(-7,17) = -\Phi(0,199) + \Phi(7,17) = -0,0793 + 0,5 = 0,4207.$$

Мысал 3. Белгілі бір технологиялық процесте барлық өндірілген өнімнің 85 проценті жоғарғы сортты. 150 бұйымнан тұратын партияның ішіндегі жоғарғы сортты бұйымдардың ең ықтимал санын табу керек.

Шешуі: Есептің шарты бойынша $n = 150$, $p = 0,85$, $q = 0,15$. Ең ықтимал санды (3) теңсіздіктерден табамыз

$$151 \cdot 0,85 - 1 < \mu < 151 \cdot 0,85 \text{ бұдан}$$

$$127,35 < \mu < 128,35.$$

Сондықтан да 150 бұйымнан тұратын партияның ішіндегі жоғары сортты бұйымдардың ең ықтимал саны - 128.

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Тәуелсіз қайталамалы тәжірибелердің мағынасы неде?
2. Бернулли формуласын жаз. Ол қандай жағдайда қолданылады?
3. Лапластың локальдық формуласын жаз.
4. Пуассон формуласын жаз.
5. Лапластың интегралдық формуласын жаз.
6. Лаплас және Пуассон формулаларының Бернулли формуласынан айырмашылығы неде?
7. Лапластың локальдық және интегралдық формулаларының айырмашылығы неде?

Жаттығулар

1. Шахмат ойнау шеберлігі тең екі шахматшы ойын көрсетуде. Тең аяқтаған ойынды есептемегенде:
 - а) төрт партияның үшеуін ұту мен сегіз партияның бесеуін ұтудың ықтималдықтарын табу керек. Қайсысының ықтималдығы жоғары?
 - б) төрт партиядан кем дегенде үш партия ұту мен сегіз партиядан кем дегенде 5 партия ұтудың ықтималдықтарын табу керек. Қайсысының ықтималдықтары жоғары?
2. Мергеннің нысанаға тигізуінің ықтималдығы 0,75 – ке тең.
 - 1) 100 атыста мына оқиғалардың ықтималдықтарын табу керек.
 - а) нысанаға 71 –ден кем емес 80 – нен артық емес рет дәл тиді,
 - б) нысанаға 70 – тен артық емес рет дәл тиді,
 - с) нысанаға 81 – ден кем емес рет дәл тиді.
 - 2) Тәуелсіз 400 атыста салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан $p=0,75$ ауытқуының абсолют шамасы 0,035 – тен кем болатындығының ықтималдығын табу керек.
 - 3) Салыстырмалы жиіліктің оқиғаның ықтималдығынан $p=0,75$ ауытқуының абсолют шамасы 0,035 – тен кем болатындығының ықтималдығы 0,95 – ке тең болуы үшін қанша тәуелсіз атыс жасау керек?
 - 4) Тәуелсіз 100 атыста нысанаға дәл тиген ең ықтималды атыс санын табу керек.
3. Тұқымға арналған бидайдың дәндерінің ішінде 0,004% арам шөп дәндері кездеседі. Кез-келген 50000 дәндердің ішінде арамшөптің 5 дәндері кездесетіндігінің ықтималдығы қандай?
4. Ойнау шеберлігі тең екі шахматшы ойын көрсетуде. Үш ойында ең болмағанда бір ұтыс болуының ықтималдығын табу керек?
5. Урнада 5 ақ және 50 қара шарлар бар. Урнадан кез келген шар алынып оның түсін анықтағаннан кейін ол қайтадан урнаға салынды. Сөйтіп осы сынақ 10 рет қайталанды. Осы сынақтарда 3 рет ақ шар пайда болуының ықтималдығын анықтау керек.
6. Жұмысшы 0,9 ықтималдығымен сапалы бұйым, 0,09 ықтималдығымен жөндеуге келетін ақауы бар, ал 0,01 ықтималдығымен жөндеуге келмейтін ақауы бар бұйымдар шығарады. Жұмысшы үш бұйым шығарады. Осы үш бұйымның ішінде ең болмағанда бір сапалы бұйым және ең болмағанда ақауы жөндеуге келетін бір бұйым бар болатындығын тап.
7. Тәуелсіз n сынақта оқиға тұрақты ықтималдықпен пайда болады. $n=1500$ болғанда салыстырмалы жиіліктің $p=0,4$ ықтималдықтан ауытқуының абсолют шамасы 0,02 – ден кем болатындығының ықтималдығын табу керек.
8. $n=1500$ және $p=0,4$ болғанда оқиғаның пайда болуының саны мына аралықтарда жататындығының ықтималдығын табу керек.
 - а) 570 – тен 630 – ға дейін
 - б) 600 – ден 660 – қа дейін
 - с) 620 – дан 680 – ге дейін
 - г) 580 – нен 640 – қа дейін

9. $n=1200$, $p=2/3$ болғанда салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан ($p=2/3$) ауытқуының абсолют шамасының ықтималдығы 0,985 – ке тең болуы үшін салыстырмалы жиілік қандай аралықта жатуы керек?

10. Тәуелсіз 600 сынақтардан тұрақты $p=0,4$ ықтималдықпен пайда болатын оқиғаның тура 228 рет пайда болуының ықтималдығын табу керек.

5-тақырып Дискретті кездейсоқ шамалар

Мақсат: Дискретті кездейсоқ шамалар және олардың сандық сипаттамалары ұғымдарын енгізу. Дискретті кездейсоқ шамалардың үлестірім заңын құрып үйрену және олардың сандық сипаттамалары тауып үйрену.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. Кездейсоқ шаманың анықтамасы.
2. Кездейсоқ шаманың үлестірім заңы.
3. Дискретті кездейсоқ шаманың негізгі үлестірім заңдары.
4. Дискретті кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары.

Анықтама. Кездейсоқ себептен тәуелді, алдын-ала белгісіз бір мүмкін мәнді тәжірибе нәтижесінде қабылдайтын шама *кездейсоқ* деп аталады.

Анықтама. Мәндері саналатын жиын құратын шама (элементтерін нөмірлеуге болатын жиын) *дискретті кездейсоқ шама* деп аталады.

Анықтама. Кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері мен сәйкес ықтималдықтары арасындағы қатынасты тағайындайтын заң *кездейсоқ шаманың үлестірім заңы* деп аталады.

Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңы кесте арқылы беріледі:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

мұнда $\sum p_i = 1$.

Мысал 1. Ақша лотореясында 100 билетке бір 20000 теңге, екі 10000 теңге және он 1000 теңге ұтыс бар. X – бір билет алған ойыншыға түскен ұтыс кездейсоқ шамасының үлестірім заңын тап.

Шешуі. X -тің мүмкін мәндері: $x_1=20000$, $x_2=10000$, $x_3=1000$, $x_4=0$. Оның сәйкес ықтималдықтары мынаған тең:

$p_1=0,01$, $p_2=0,02$, $p_3=0,1$, $p_4=1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 1 - 0,13 = 0,87$. Сонда ізделінген үлестірім заңы мына түрде болады:

x_i	20000	10000	1000	0
p_i	0,01	0,02	0,1	0,87

Кездейсоқ шамалар әрқайсысының өз үлестірім заңдары болатын кластарға бөлінеді. Дискретті кездейсоқ шамалардың үлестірімдерінің кейбір түрлерін қарастыралық.

1. Биномдық үлестірім заңы. Бұл заң бойынша $X - n$ тәуелсіз тәжірибелерде оқиғаның пайда болу саны кездейсоқ шамасы үлестірімді. Ол $0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$ мәндерін мына ықтималдықпен қабылдайды: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, мұнда $q = 1 - p$, $m = 0, 1, \dots, n$.

2. Пуассон үлестірім заңы. $X - n$ тәуелсіз тәжірибеде сирек оқиғаның пайда болу саны кездейсоқ шамасы мәндерін қабылдау ықтималдығы:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np, m = 0, 1, \dots, n.$$

3. Геометриялық үлестірім заңы. $X - n$ тәуелсіз тәжірибеде ең алғаш рет оқиға пайда болғанға дейінгі тәжірибелер саны. Ол $1, 2, \dots, m, \dots$ мәндерін мына ықтималдықпен қабылдайды:

$$P(X = m) = pq^{m-1}, \text{ где } q = 1 - p, m = 1, 2, \dots$$

4. Гипергеометриялық үлестірім заңы. N объектінің ішінде M объектіде альтернативті қасиет бар болсын. Сонда X - кездейсоқ алынған n объектінің ішінде осы қасиеті бар элементтер саны. X -тің m мәнін қабылдау ықтималдығы

$$\text{мынаған тең: } P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

мұнда $m = 0, 1, 2, \dots, \min(n; M)$.

Анықтама Дискретті кездейсоқ шаманың *математикалық үміті* деп оның мүмкін мәндері мен сәйкес ықтималдықтарының көбейтінділерінің қосындысы аталады:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Анықтама Кездейсоқ шама мен оның математикалық үмітінің айырмасы *ауытқу* деп аталады: $\Delta(X) = X - M(X)$

Анықтама Кездейсоқ шаманың *дисперсиясы* деп шаманың өз математикалық үмітінен ауытқуының квадратының математикалық үміті аталады:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Дисперсияны есептеу үшін мына формуланы қолдану ыңғайлы:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Анықтама Кездейсоқ шаманың *орта квадраттық ауытқуы* деп дисперсияның квадрат түбіріне тең шама аталады: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Математикалық үміттің негізгі қасиеттері:

$$1. M(C) = C$$

2. $M(CX) = C M(X)$
3. $M(XY) = M(X) M(Y)$
4. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$

Дисперсияның негізгі қасиеттері:

1. $D(C) = 0$
2. $D(CX) = C^2 D(X)$
3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

Үлестірім заңы	Биномдық	Пуассон	Геометриялық
Математикалық үміт	$M(X)=np$	$M(X)=\lambda$	$M(X)=1/p$
Дисперсия	$D(X)=npq$	$D(X)=\lambda$	$D(X)=\frac{q}{p^2}$

Дискретті кездейсоқ шаманың *модасы* M_0 деп оның ықтималдығы ең үлкен мәні аталады. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың модасы деп кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығы ең үлкен болатын мәні аталады, яғни $f(M_0) = \max$.

X кездейсоқ шамасының *медианасы* M_e деп оған қарағанда кездейсоқ шама үлкен немесе кіші мән қабылдау ықтималдықтары тең болатын мәні аталады, яғни $P(X < M_e) = P(X > M_e)$.

X кездейсоқ шамасының k -ретті *бастапқы моменті* деп X^k шамасының математикалық үміті аталады, яғни $\nu_k = M(X^k)$.

X кездейсоқ шамасының k -ретті *орталық моменті* деп $[X - M(X)]^k$ шамасының математикалық үміті аталады, яғни $\mu_k = M[X - M(X)]^k$.

Мысал 2. Екі сатып алушы бір-бірінен тәуелсіз бұйым сатып алады. Бірінші сатып алушының сатып алу ықтималдығы 0,8, екіншінің ықтималдығы - 0,6. Кездейсоқ шама X – сатып алушылардың сатып алу саны. X кездейсоқ шамасының үлестірім заңын жаз.

Шешуі: Бұйымды екі сатып алушы немесе бір сатып алушы алады немесе бірде-бір бұйым сатып алынбайды. Сондықтан $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$.

A – бірінші сатып алушы бұйым сатып алды, B - екінші сатып алушы бұйым сатып алды. Сонда x_1 мәнінің ықтималдығы $A \cdot B$ оқиғасының ықтималдығы түрінде табылады. Ал A мен B тәуелсіз оқиғалар болғандықтан

$$p_1 = P(X = 2) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48.$$

x_2 мәнінің ықтималдығы $A\bar{B}$ немесе $\bar{A}B$ оқиғаларының ықтималдығы түрінде есептеледі, яғни $p_2 = P(X = 1) = P(A\bar{B} + \bar{A}B)$. $A\bar{B}$ және $\bar{A}B$ үйлесімсіз оқиғалар болатынын ескерсек

$$p_2 = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,44.$$

x_3 мәнінің ықтималдығы $\bar{A}\bar{B}$ оқиғасының ықтималдығына тең болады;

$$p_3 = P(X = 0) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08.$$

x	2	1	0
p	0,48	0,44	0,08

Мысал 3. Баскетболшы үш айыппұл доп соғады. Әр соққанда корзинаға доп түсу ықтималдығы 0,7. Корзинаға түскен доптар санының үлестірім кестесін құр.

Шешуі: X - корзинаға түскен доптар саны. Оның қабылдайтын мәндері $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$. Мұнда $n = 3$, $p = 0,7$, $q = 1-p = 1-0,7 = 0,3$.

Ол мәндерді қабылдау ықтималдығын Бернулли формуласымен есептейміз:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

$$p_1 = P_3(0) = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^3 = \frac{3!}{0!(3-0)!} \cdot (0,7)^0 \cdot (0,3)^3 = 0,027;$$

$$p_2 = P_3(1) = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^{3-1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot (0,7)^1 \cdot (0,3)^2 = 0,189;$$

$$p_3 = P_3(2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^1 = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^1 = 0,441;$$

$$p_4 = P_3(3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0 = \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot (0,7)^3 \cdot (0,3)^0 = 0,343$$

Есептеудің дұрыстығын тексереміз:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,027 + 0,189 + 0,441 + 0,343 = 1$$

Сонда корзинаға түскен доптар санының үлестірім кестесі мына түрде болады:

x	0	1	2	3
p	0,027	0,189	0,441	0,343

Мысал 4. 10 лотерея билетінің 4 билетінде ұтыс бар. Кездейсоқ одан 2 билет сатып алынды. Алынған билеттерде ұтысы бар билеттер санының ықтималдықтар үлестірімінің заңын жаз. Үлестірім көпбұрышын сал.

Шешуі: X - сатып алынған билеттерде ұтысы бар билеттер саны. Оның қабылдайтын мәндері $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Осы мәндерді қабылдау ықтималдығын мына формуламен есептейміз:

$$P(X=m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

мұнда $N = 10$, $M = 4$, $n = 2$, $m = 0,1,2$. Сәйкес ықтималдықтарды есептейміз:

$$p_1 = P(X=0) = \frac{C_4^0 \cdot C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = P(X=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^0}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$$

Есептеулердің дұрыстығын тексереміз:

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = 1$$

Сонда ізделінген үлестірім заңы мына түрде болады:

x	0	1	2
p	$\frac{5}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

Мысал 5. X кездейсоқ шамасының үлестірім заңы берілген:

x_i	15	17	20	21
p_i	0,3	0,4	0,1	0,2

Табу керек:

- 1) $M(X)$ математикалық үмітін;
- 2) $D(X)$ дисперсиясын;
- 3) $\sigma(X)$ орта квадраттық ауытқуды.

Шешуі.

$$1) \text{ Математикалық үміт } M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 15 \cdot 0,3 + 17 \cdot 0,4 + 20 \cdot 0,1 + 21 \cdot 0,2 = 17,5$$

$$2) \text{ Дисперсия } D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 17,5^2 = 15^2 \cdot 0,3 + 17^2 \cdot 0,4 + 20^2 \cdot 0,1 + 21^2 \cdot 0,2 - 306,25 = 5,05$$

$$3) \text{ Орта квадраттық ауытқу } \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5,05} = 2,25$$

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Кездейсоқ шаманың анықтамасын бер.
2. Қандай кездейсоқ шамалар дискретті деп аталады?
3. Кездейсоқ шаманың үлестірім заңы деп не аталады?
4. Дискретті кездейсоқ шаманың негізгі үлестірім заңдары қандай?
5. Дискретті кездейсоқ шаманың математикалық үміті деп не аталады?
6. Кездейсоқ шаманың дисперсиясы деп не аталады?
7. Кездейсоқ шаманың орта квадраттық ауытқуы деп не аталады?

Жаттығулар

1. Жәшікте барлығы 10 шар бар, олардың 7-і қара 3-і көк шарлар. Жәшіктен кез-келген 5 шар алынды. Сол 5 шардың үшеуі қара болуының ықтималдығы қандай?

2. Жәшікте барлығы N шарлар бар, оның ішінде n қара шар бар, ал $(N-n)$ – көк шарлар. Жәшіктен кез-келген m шар алынды. Сол алынған m шардың ішінде k қара шар болуының ықтималдығы қандай?
3. Дискретті кездейсоқ шама мына үлестіріммен берілсін

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,4	0,2	0,2

Сандық сипаттамаларын тап.

4. Теңге үш рет лақтырылсын. Кездейсоқ шама X ретінде елтаңбаның пайда болу санын қарастырамыз.
- а) Үлестірім қатарын жазу керек.
- б) Үлестірім көпбұрышын салу керек.
- в) $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$ -тарды табу керек.
5. Мысал 5. Берілген партияның 10 проценті сапасыз бұйымдар. Кез келген 4 бұйым алынды. Осы төрт бұйымдардың ішінде сапасыз бұйымдардың пайда болу санының үлестірім заңын жазу керек. Сандық сипаттамаларын есептеу керек.
6. Дискретті кездейсоқ шама үлестірім қатарымен берілген

X	2	4	5	6	8
P	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ – тарды табу керек.

7. Урнада 5 ақ және 50 ақ шарлар бар. Урнадан кез келген шар алынып түсі анықталғаннан кейін урнаға қайтарылады. Кездейсоқ шама X -тәуелсіз 10 сынақта ақ шар пайда болуының саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазыңыз.
8. Екі атқыш әрқайсысы өз нысанасына бір-бірден атыс жүргізді. Бірінші атқыш үшін нысанаға тигізудің ықтималдығы P_1 , ал екінші атқыш үшін - P_2 . Кездейсоқ шамалар x_1 -бірінші атқыштың нысанаға тигізу саны, x_2 -екінші атқыштың нысанаға тигізу саны, ал $Z=x_1 - x_2$ -екі кездейсоқ шамалардың айырымы. Оның математикалық сипаттамаларын: $M(z)$, $D(z)$ -тарды табамыз.
9. Екі тәуелсіз кездейсоқ шамалар X және Y үлестірім кестелерімен берілген

X	0	3	4
P	0,2	0,6	0,2

Y	2	3
P	0,3	0,7

$x+y$, $x \cdot y$ -кездейсоқ шамалардың математикалық үміттері мен дисперсияларын тап.

10. “Спортлото” ойынын ойнағанда белгілі бір ұтысқа шығатын спорттың түрлерін дәл табудың ықтималдығын тап.

11. Айталық 12 бұйымның 8-і бірінші сортқа жатады. Кезкелген 5 бұйым алынды. Сонда осы 5 бұйымның ішінде бірінші сортты бұйымдардың болуының үлестірім кестесін құрыңыз.

6-тақырып Үзіліссіз кездейсоқ шамалар

Мақсат: Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдары мен сандық сипаттамаларын таныстыру.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың анықтамасы.
2. Кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы және оның қасиеттері.
3. Кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығы және оның қасиеттері.
4. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың негізгі үлестірім заңдары.
5. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары.

Анықтама Кейбір шектелген немесе шексіз интервалдан кез келген мән қабылдайтын шама *үзіліссіз кездейсоқ шама* деп аталады.

Үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестірім заңы үлестірім функциясы немесе үлестірім тығыздығы арқылы берілуі мүмкін.

Анықтама X кездейсоқ шамасының ықтималдықтарының *үлестірім функциясы* $F(x)$ деп x -тің әрбір мәні үшін X кездейсоқ шамасы

x -тен кем мән қабылдау ықтималдығын анықтайтын функция аталады: $F(x) = P(X < x)$.

Үлестірім функциясының қасиеттері:

1. Функция мәндері $[0,1]$ кесіндісіне тиісті: $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. Үлестірім функциясы кемімейтін функция: егер $x_2 > x_1$ болса $F(x_2) \geq F(x_1)$.
3. Егер X кездейсоқ шамасының барлық мүмкін мәндері $(a;b)$ интервалына тиісті болса, онда $x \leq a$ болғанда $F(x)=0$ және $x \geq b$ болғанда $F(x)=1$.

Салдар 1. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Салдар 2. X үзіліссіз кездейсоқ шамасының нақты бір мән қабылдау ықтималдығы нольге тең.

Салдар 3. Егер X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері осьтің барлық бойында орналасса, онда $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)=0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)=1$.

Анықтама Үлестірім функциясының туындысы ықтималдықтар үлестірімінің *тығыздығы* деп аталады: $f(x) = F'(x)$.

Теорема X үзіліссіз кездейсоқ шамасының (α, β) интервалынан мән қабылдау

ықтималдығы мына формуламен анықталады: $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Үлестірім тығыздығының негізгі қасиеттері:

1. Үлестірім тығыздығы теріс емес функция: $f(x) \geq 0$.
2. Интегралдау шегі барлық сан осі болғанда үлестірім тығыздығының меншіксіз интегралы бірге тең: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Салдар. Егер X кездейсоқ шамасының барлық мүмкін мәндері (a, b) интервалында жатса, онда $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Үзіліссіз кездейсоқ шаманың кейбір үлестірім түрлерін қарастыралық.

1. Бірқалыпты үлестірім заңы – кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің интервалында үлестірім тығыздығы өзгермейтін үлестірім:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{егер } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{егер } x < a, \quad x > b \end{cases}$$

2. Көрсеткіштік (экспоненталық) үлестірім заңы – параметрі λ болатын үлестірім, егер ықтималдықтар тығыздығы мына түрде болса:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0 \\ 0, & \text{егер } x < 0 \end{cases}.$$

3. Қалыпты үлестірім заңы (Гаусс заңы) параметрлері a және σ , егер оның ықтималдықтар тығыздығы мына түрде болса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Параметрлері $a=0$, $\sigma=1$ болатын кездейсоқ шаманың қалыпты үлестірім заңы **стандартты** немесе **мөлшерленген** деп аталады. Мөлшерленген үлестірімнің ықтималдықтар тығыздығы мына түрде болады: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ функциясы **Лаплас функциясы** деп аталады. Оның мәндері кестеден анықталады.

Теорема. Қалыпты заңмен үлестірімді X кездейсоқ шамасының математикалық үміті a параметріне тең, ал дисперсиясы σ^2 , яғни $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$.

X қалыпты үлестірімді шамасы (α, β) интервалына тиісті мән қабылдау ықтималдығы мына формуламен анықталады: $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, мұнда $\Phi(x)$ – Лаплас функциясы.

Қалыпты кездейсоқ шаманың өз математикалық үмітінен ауытқуы $\delta > 0$ шамасынан кем болу ықтималдығы мынаған тең: $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Дискреттік кездейсоқ шаманың сандық сипаттамаларының анықтамалары үзіліссіз кездейсоқ шамаға да қолданылады. Ерекшелігі формулаларда қосындының орнына олардың интегралдары алынады:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx, \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$$

Мысал 1. . X - кездейсоқ шамасының ықтималдықтар үлестірімінің функциясы берілген:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 2 \\ (x-2)^2, & \text{егер } 2 < x \leq 3 \\ 1, & \text{егер } x > 3 \end{cases}$$

Ықтималдықтар үлестірімінің тығыздығын $f(x)$ және X кездейсоқ шамасының $(1; 2,5)$, $(2,5; 3,5)$ интервалына түсу ықтималдығын тап.

Шешуі: Ықтималдықтар үлестірімінің тығыздығын $f(x) = F'(x)$ формуласымен табамыз:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 2 \\ 2x-4, & \text{егер } 2 < x \leq 3 \\ 1, & \text{егер } x > 3 \end{cases}$$

X кездейсоқ шамасының $(1; 2,5)$, $(2,5; 3,5)$ интервалына түсу ықтималдығын $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ формуласымен есептеледі:

$$P(1 < X < 2,5) = F(2,5) - F(1) = 0,5^2 - 0 = 0,25;$$

$$P(2,5 < X < 3,5) = F(3,5) - F(2,5) = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Мысал 2. X үзіліссіз кездейсоқ шамасының ықтималдықтар үлестірімінің тығыздығы берілген:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 1 \\ x - 1/2, & \text{егер } 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{егер } x > 2 \end{cases}$$

Үлестірім функциясын $F(x)$ тап және оның графигін сал.

Шешуі: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = 0$, егер $x \leq 1$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^1 f(x) dx + \int_1^x f(x) dx = 0 + x^2/2 - (1/2)x = (x^2 - x)/2, \text{ егер } 1 < x \leq 2,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^x f(x) dx = (x^2 - x)/2 \Big|_1^2 = 1, \text{ егер } x > 2.$$

Мысал 3. X кездейсоқ шамасының $(0;1)$ интервалында ықтималдықтар тығыздығы $f(x) = C(x^2 + 2x)$ түрінде берілген. Бұл интервалдан тыс жерде $f(x) = 0$. C параметрін тап.

Шешуі: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, болғандықтан

$$C \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = C \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = C \cdot \frac{4}{3} = 1, \quad \text{бұдан } C = \frac{3}{4}.$$

Мысал 4. X үзіліссіз кездейсоқ шамасының ықтималдықтар тығыздығы $f(x) = 2C/(1+x^2)$ түрінде берілген. C параметрін тап.

Шешуі: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ теңдігі бойынша

$$2C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2C \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2C \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2C\pi = 1, \quad \text{Бұдан } C = \frac{1}{2\pi}.$$

Мысал 5. X кездейсоқ шамасының $(0;2)$ интервалында ықтималдықтар тығыздығы $f(x) = x/2$ түрінде берілген. Бұл интервалдан тыс жерде $f(x) = 0$. X кездейсоқ шамасының математикалық үмітін тап.

Шешуі: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$ формуласы бойынша

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} x dx = \frac{x^3}{2 \cdot 3} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Мысал 6. X кездейсоқ шамасының $(0; \pi)$ интервалында ықтималдықтар тығыздығы $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ - түрінде берілген. Бұл интервалдан тыс жерде $f(x) = 0$.

X кездейсоқ шамасының дисперсиясын тап.

Шешуі: Дисперсияны табу үшін мына формуланы қолданамыз:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$$

Ең әуелі математикалық үмітті есептейміз:

$$M(X) = \int_0^{\pi} xf(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

Бөліктеп интегралдау әдісін қолданамыз, сонда $M(X) = \frac{\pi}{2}$ болады. Дисперсия формуласының бірінші бөлігінің мәнін табамыз:

$$\int_0^{\pi} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$

Оны екі рет бөліктеп интегралдаймыз, сонда мына өрнекті аламыз:

$$\int_0^{\pi} x^2 f(x) dx = \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

Дисперсия формуласына қойып, оның мәнін аламыз:

$$D(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Мысал 7. X кездейсоқ шамасы $[1;6]$ кесіндісінде бірқалыпты үлестірімді. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім функциясын $F(x)$, математикалық үмітін, дисперсиясын және орташа квадраттық ауытқуын тап.

Шешуі: X шамасы үшін ықтималдық тығыздығы мына түрде болады.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 1 \\ 1/5, & \text{егер } 1 < x \leq 6 \\ 0, & \text{егер } x > 6 \end{cases}$$

Оған сәйкес үлестірім функциясы мына формула бойынша есептеледі.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx,$$

Ол мына түрде жазылады

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 1 \\ \frac{1}{5} \int_1^x dx = \frac{1}{5}x = \frac{x-1}{5}, & \text{егер } 1 < x \leq 6 \\ 0, & \text{егер } x > 6 \end{cases}$$

Математикалық үміт $M(X) = (1+6)/2 = 3,5$ тең болады. Дисперсияны және орташа квадраттық ауытқуды табамыз.

$$D(X) = (6-1)^2/12 = 25/12 \quad \sigma_x = 5\sqrt{3}/6$$

Мысал 8. Цех жасаған бөлшектердің диаметрінің өлшемі қалыпты үлестірімді. Бөлшек диаметрінің стандартты ұзындығы (математикалық үміті) 40 мм, ал орта квадраттық ауытқуы – 0,4 мм.

Табу керек:

а) кездейсоқ алынған бөлшектің диаметрі 39,5 мм-ден артық және 41 мм-ден кем болу ықтималдығын;

б) бөлшек диаметрінің стандартты ұзындықтан ауытқуы 0,6 мм-ден артпау ықтималдығын.

Шешуі:

а) Қалыпты үлестірімді X кездейсоқ шамасының (α, β) интервалынан мән қабылдау ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(X) - \text{функция Лапласа.}$$

Есеп шарты бойынша $a = 40$, $\sigma = 0,4$, $\alpha = 39,5$, $\beta = 41$.

$$\begin{aligned} \text{Сонда } P(39,5 < X < 41) &= \Phi\left(\frac{41 - 40}{0,4}\right) - \Phi\left(\frac{39,5 - 40}{0,4}\right) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \\ &= 0,4938 + 0,3944 = 0,8882. \end{aligned}$$

б) Қалыпты кездейсоқ шамасының өз математикалық үмітінен ауытқуы $\delta > 0$ -ден кем болу ықтималдығы мына формуламен есептеледі: $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Есеп шарты бойынша $\delta = 0,6$.

Сонда $P(|X - 40| < 0,6) = 2\Phi\left(\frac{0,6}{0,4}\right) = 2\Phi(1,5) \approx 2 \cdot 0,4332 = 0,8664$.

Сонымен, дайындалған бөлшек диаметрінің ұзындығы 39,5-тен 41 мм-ге дейін болу ықтималдығы 0,8864-ге тең.

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың анықтамасын бер.
2. Қандай кездейсоқ шамалар үзіліссіз деп аталады?
3. Кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы деп не аталады?
4. Кездейсоқ шаманың ықтималдықтарының үлестірім тығыздығын анықта?
5. Кездейсоқ шаманың қандай үлестірімі бірқалыпты деп аталады?
6. Кездейсоқ шаманың қандай үлестірімі көрсеткіштік деп аталады?
7. Кездейсоқ шаманың қандай үлестірімі қалыпты деп аталады?
8. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың математикалық үміті қалай есептеледі?
9. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың дисперсиясы қалай есептеледі?

Жаттығулар

1. Айталық X-дискретті кездейсоқ шама үлестірім кестесі арқылы берілген болсын

X	0	1	3	3,5
P	0,1	0,4	0,2	0,3

X-тің үлестірім функциясын табыңыз.

2. Кездейсоқ шама интегралдық функциямен берілген

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 0,1, & -2 \leq x \leq -1 \\ 0,4, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0,9, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Үлестірім кестесін құрыңыз, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ табыңыз.

3. Жоғарыда келтірілген 84 және 90 есептердегі қарастырған кездейсоқ шамалардың функцияларын табыңыз. Математикалық сипаттамаларын есептеңіз.
4. Кездейсоқ шама интегралдық функциясы арқылы берілген

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -4 \\ 0,05, & -4 \leq x < -3 \\ 0,15, & -3 \leq x < -2 \\ 0,25, & -2 \leq x < -1 \\ 0,35, & -1 \leq x < 0 \\ 0,45, & 0 \leq x < 1 \\ 0,65, & 1 \leq x < 2 \\ 0,85, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Үлестірім функциясын табыңыз.

5. Тиынды екі рет лақтырғанда елтаңбаның пайда болуының үлестірім кестесін жазыңыз. Интегралдық функциясын табыңыз.

6. Үзіліссіз кездейсоқ шама дифференциалдық функциямен берілген

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Кездейсоқ шаманың модасын, медианасын, асимметриясын және эксцессін табу керек.

7. Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{2x}{9}, & 0 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Интегралдық функциясын табыңыз.

8. Үзіліссіз кездейсоқ шама үлестірім функциясымен берілген

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

а) Үлестірім тығыздығын табу керек

б) $M(x)$, $D(x)$ табу керек

в) Мына интервалдан $[\frac{1}{2}, 1]$ мән қабылдауының

ықтималдығын табу керек.

9. Кездейсоқ шама дифференциалдық функция арқылы берілген

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x, & x \in [0, \pi/2] \\ 0, & x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

Табу керек: a , $F(x)$, $M(x)$, $D(x)$, $P(0 < x < \pi/4)$

10. Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ axe^{-kx}, & 0 < x < \infty, k > 0 \end{cases}$$

табу керек;

а) Коэффициент а-ны;

б) Үлестірім функциясын;

в) $[0; \frac{1}{2}]$ аралықтан мән қабылдау ықтималдығын.

11. X-кездейсоқ шамасы бүкіл ОХ осі бойынша мына үлестірім тығыздығымен

$$f(x) = \frac{2C}{1+x^2}, \text{ берілген. Тұрақты параметр } C\text{-ны табу керек.}$$

12. X-кездейсоқ шамасы ОХ осі бойында мына үлестірім функциясымен берілген

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x$$

Кездейсоқ шаманың мына $[0; 1]$ аралықтан мән қабылдамайтындығының ықтималдығы қандай?

13. X – кездейсоқ шама мына үлестірім тығыздығымен берілген

$$f(x) = \begin{cases} 0,5, & x \in [0;2] \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases}$$

M(x), D(x)-терді табу керек.

14. Кездейсоқ шама ықтималдық тығыздығымен берілген

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{c}{2}, & x > 1 \end{cases}$$

Белгісіз коэффициент С-ны, интегралдық функцияны табыңыз.

15. Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Интегралдық функциясын және математикалық сипаттамаларын табыңыз.

7-тақырып Үлкен сандар заңы

Мақсат: Үлкен сандар заңына жататын теоремаларды білу және оларды есеп шығаруға қолданып үйрену.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. Үлкен сандар заңы ұғымы.
2. Чебышев теңсіздігі және теоремасы.

3. Бернулли теоремасы.
4. Пуассон және Хинчин теоремалары.
5. Орталық шектік теорема

Академик А.Н.Колмагоровтың тұжырымдауы бойынша *үлкен сандар заңы* деп мына жалпы принцип алынады: кездейсоқ факторлардың өте үлкен санының жиынтық әсері кездейсоқтықтан тәуелсіз нәтижеге келтіреді.

Үлкен сандар заңы деп бірнеше теоремалар жиыны аталады, олардың әрқайсысында тәжірибелер саны өте үлкен болғанда олардың орта сипаттамалары нақты тұрақтыға жуықтап жақындайтыны тағайындалады.

Үлкен сандар деп аталатын теоремалар $X_1, X_2, \dots, X_n$ кездейсоқ шамаларының арифметикалық ортасына қатысты теоремалар болып саналады.

Теорема Егер X кездейсоқ шамасының дисперсиясы бар болса, онда кез келген оң ε саны үшін $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \leq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ теңсіздігі орындалады.

Бұл теңсіздік орыс математигі П.Л. Чебышев есімімен аталады. Осы теңсіздіктен мына теңсіздік шығады: $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Үлкен сандар заңының негізгісі және жалпы маңыздысы Чебышев теоремасы. Ол кездейсоқ шаманың бақыланған мәндерінің арифметикалық ортасы мен оның математикалық үмітінің арасындағы байланысты орнатады.

Теорема Тәуелсіз тәжірибелер саны шектеусіз артқанда шектеулі дисперсиясы бар кездейсоқ шаманың бақыланған мәндерінің арифметикалық ортасы ықтималдығы бойынша оның математикалық үмітіне жинақты.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - M(X)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Чебышев теоремасын жалпы жағдайға, яғни кездейсоқ шаманың сипаттамалары бір тәжірибеден екінші тәжірибеге көшкенде өзгерсе де қолдануға болады. Енді Чебышевтің осы жалпыланған теоремасын береміз.

Теорема Егер $X_1, X_2, \dots, X_n$ тәуелсіз кездейсоқ шамаларының тұрақты C санымен шектелген дисперсиялары бар болса, онда кез келген оң ε саны үшін

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1$$

Я.Бернулли теоремасы үлкен сандар заңының маңыздысы және тарихи алғашқы формасы. Ол оқиғаның жиілігі мен оның ықтималдығы арасындағы байланысты орнатады.

Теорема Егер n тәуелсіз рет тәжірибе жүргізгенде A оқиғасының пайда болу саны m болса, онда бір тәжірибен екінші тәжірибеге өткенде $P(A)=p$, $P(\bar{A}) = q$, $p+q=1$ ықтималдықтары тұрақты болып қалса, онда кез келген ε оң саны үшін

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Бұл теорема швейцар математигі Якоб Бернулли есімімен аталады. Енді Бернуллидің жалпыланған теоремасын береміз. Ол теорема француз математигі Пуассон есімімен аталады.

Теорема Егер тәуелсіз тәжірибелер тізбегінде A оқиғасының k -шы тәжірибедегі ықтималдығы p_k болса, онда $P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1$.

Мұнда m – тәуелсіз n тәжірибе жүргізгенде A оқиғасының пайда болу саны.
 ε - кез келген оң сан.

Теорема Егер тәуелсіз және бірдей үлестірімді $X_1, X_2, \dots, X_n$ кездейсоқ шамаларының математикалық үміттері бар болса, онда кез келген оң ε саны үшін

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1. \text{ Мұнда } a = M(X)$$

Бұл теорема математик Хинчин есімімен аталады.

Орталық шектік теорема қосылғыштар саны шексіз артқанда $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ қосындысының шектік үлестірім заңы қалыпты болу шартын тағайындайды. Осы теорема Ляпунов теоремасы деп аталады.

Теорема Егер $X_1, X_2, \dots, X_n$ кездейсоқ шамалары өзара тәуелсіз және олардың математикалық үміті a және дисперсиясы σ^2 болатын үлестірім заңдары бірдей, әрі үшінші ретті бастапқы моменті ν^3 бар болса, онда n шектеусіз артқанда $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ қосындысының үлестірім заңы қалыптыға шектеусіз жақындайды.

Мысал 1. Дискретті кездейсоқ шама мына үлестірім заңымен берілген

x	-1	0	2	4	6
p	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

а) Мына теңсіздікті $|x - M(x)| < 5$ орындалуының ықтималдығын табыңыз.

б) Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|x - M(x)| < 5$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Әуелі математикалық үміт, дисперсиясын табалық.

$$M(x) = -0,2 + 0,6 + 0,2 + 0,3 = 0,9$$

Енді дисперсия табу үшін X – тың үлестірім заңын жазамыз:

X^2	1	0	4	16	36
P	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Сонда

$$M(x^2) = 0,2 + 1,2 + 0,8 + 1,8 = 4$$

$$D(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 = 4 - 0,81 = 3,19$$

а). Енді $|x - 0,9| < 5$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын табу үшін осы теңсіздікті қанағаттандыратын X -тің мәндерін анықтау қажет. Берілген үлестірім кестесін бұл теңсіздікті кездейсоқ шаманың $x = -1, x = 0, x = 2, x = 4$ мәндері қанағаттандыратын көз жеткізу болады. Олай болса

$$P(|X - 0,9| < 5) = P(x = -1) + P(x = 0) + P(x = 2) + P(x = 4) = 0,2 + 0,4 + 0,3 + 0,05 = 0,95.$$

Сонымен

$$P(|X - 0,9| < 5) = 0,95.$$

б) Чебышев теңсіздігін пайдаланып $P(|X - 0,9| < 5) \geq 1 - \frac{3,19}{25} = 0,8725$

яғни

$$P(|X - 0,9| < 5) \geq 0,8725$$

Сөйтіп Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|x - M(x)| \leq 5$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын төменнен бағаладық, яғни $|x - 0,9| \leq 5$ теңсіздігі кем дегенде 0,8724 ықтималдықпен орындалады. Бұл тұжырымның құндылығы есептер шығарған кезде $|x - M(x)| < \varepsilon (\varepsilon > 0)$ теңсіздігінің орындалуының дәл ықтималдығын табу мүмкін болмаған жағдайларда оның ықтималдығын төменне бағалауға мүмкіндік береді.

Мысал 2. Егер оған орташа тәуліктік қажеттілік 50 000 литр болса, келесі күні елді мекенде суға деген қажеттілік 150 000 литрден асатындығын бағалаңыз.

Шешуі: $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$ Марков теңсіздігін пайдалана отырып,

$$P(X \geq 150000) \leq \frac{50000}{150000} = \frac{1}{3}.$$

Жауабы $P(X \geq 150000) \leq \frac{1}{3}$

Мысал 3. Жарық беруші торға 20 электрошам параллель қосылған. T уақыт ішінде әрбір шамның жарық беру ықтималдығы 0,8. Чебышев теңсіздігін пайдаланып T уақытында жарық беруші барлық электрошамдармен, жарық беріп тұрған шамдардың арифметикалық орташа мәндерінің (математикалық үміті) айырмасының абсолюттік шамасының ықтималдығын бағалаңыз. Егер айтылған айырма: 1) төрттен кіші болса; 2) төрттен кем болмаса.

Шешуі: Белгілі бір T уақытында жарық беріп тұрған электрошамдардың саны кездейсоқ шама. Бұл кездейсоқ шама биномдық үлестірім заңымен берілген. Есептің шарты бойынша $q=20, p=0,8, q=0,2$.

Сондықтан

$$M(x) = 20 \cdot 0,8 = 16, D(x) = 19 \cdot 0,2 = 3,2$$

Енді Чебышев теңсіздігін пайдаланамыз

$$1. \quad P(|X - 0,9| < 5) \geq 1 - \frac{3,2}{16} = 0,8$$

$$2. \quad P(|X - 0,9| \geq 4) \leq \frac{3,2}{16} = 0,2$$

Сонымен

$$P(|X - 16| < 4) \geq 0,8$$

$$P(|X - 16| \geq 4) \leq 0,2$$

Мысал 4. Зауыт өнімдерінің 75 процентін жоғарғы сортпен шығарады. Шығарылған 10000 бұйымдардың ішінде жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдардың саны осы жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдардың математикалық үмітінен айырмасының абсолют шамасы 1000 данадан артық болмауының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдар саны кездейсоқ шама. Оны X арқылы белгілейік. Бұл кездейсоқ шама биномдық үлестіріммен берілген. $M(x)$ осы кездейсоқ шаманың математикалық үміті. Есептің шарты бойынша $n=100000$, $p=0,75$, $q=0,25$.

$$\text{Сонда } M(x)=100000 \cdot 0,75=75000, \quad D(x)=18750$$

$$\text{осыдан } P(|X - M(x)| < 1000) \geq 1 - \frac{18750}{10^6} = 0,98125$$

$$\text{яғни } P(|X - M(x)| < 1000) \geq 0,98125$$

Мысал 5. Белгілі бір шаманың мәні ретінде мейлінше көп өлшеулердің арифметикалық орташа нәтижесі алынады. Әрбір өлшеудің мүмкін мәндерінің орташа квадраттық ауытқуы 1 сантиметрден аспайды, деп қарастырып, 1000 өлшеуде алынған нәтиженің берілген шаманың шын мәнінен ауытқуының 0,1 сантиметрден артық болмауының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Әрбір өлшеудің нәтижесі кездейсоқ шама болады. Сондықтан 1000 өлшеудің нәтижелерін $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ тәуелсіз кездейсоқ шамалар жиынтығы ретінде қарастырамыз. Сонда

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{1000}}{1000}$$

1000 өлшеудің арифметикалық орташа мәні болады. Ол да кездейсоқ шама болады. Енді өлшеп отырған шаманың шын мәнін a деп қабылдасақ. Чебышев теоремасын пайдалануға болады:

$$P\{|\bar{x} - a| \leq 0,1\} \geq 1 - \frac{1}{(0,1)^2 \cdot 1000} = 0,9$$

$$\text{Сөйтіп } P(|\bar{x} - a| \leq 0,1) \geq 0,9$$

Мысал 6. Электрошамдар салынған 100 жәшіктің әрқайсысынан олардың жану ұзақтығын анықтау үшін бір-бірден электрошам алынды. Сөйтіп алынған шамдардың жану ұзақтығының арифметикалық орташа жану ұзақтығы есептелінді. Осы арифметикалық орташа жану ұзақтығының

жәшіктердегі барлық шамдардың жану ұзақтығының арифметикалық орташа жану ұзақтығынан айырмасының абсолют шамасының 2 сағаттан көп болмауының ықтималдығын бағалау керек. Шамдардың жану ұзақтығының орташа квадраттық ауытқуы 8 сағаттан аспайды.

Шешуі: Кездейсоқ шамаларға белгілеу енгізелік. X_i i-інші жәшіктен алынған электрошамның жану ұзақтығы $M(x_i)$ - әр жәшіктегі шамдардың арифметикалық орташа жану ұзақтығы.

Сонда

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{100}}{100}$$

алынған шамдардың арифметикалық орташа жану ұзақтығы, ал

$$\frac{M(x_1) + M(x_2) + \dots + M(x_{100})}{100} = M(\bar{x})$$

барлық шамдардың жану ұзақтығының арифметикалық орташа жану ұзақтығы. Сонымен есептің шарты бойынша мына ықтималдықты бағалау керек.

$$P(|\bar{x} - M(\bar{X})| \leq 2).$$

Қарастырып отырған $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ кездейсоқ шамалар үшін Чебышев теоремасының шарттары орындалады. Олай болса

$$P(|\bar{x} - M(\bar{X})| \leq 2) \geq 1 - \frac{8}{4 \cdot 100} = 0,98$$

Сөйтіп

$$P(|\bar{x} - M(\bar{X})| \leq 2) \geq 0,98.$$

Мысал 7. Белгілі бір шаманы өлшегенде алынған нәтижелер дисперсиясы 1-ден аспайтын кездейсоқ шама. Осы нәтижелердің арифметикалық орташа мәнінің берілген шаманың шын мәнін ауытқуының абсолют шамасы 0,01-ден артпауының ықтималдығы 0,98-ден кем болмауы үшін қанша өлшеу керек?

Шешуі: Әрбір өлшеу кезінде алынған нәтижелер кездейсоқ шама және олар тәуелсіз. Белгілеу енгізелік $x_1, x_2, \dots, x_n$ бірінші, екінші, ..., n-ші өлшеулердің нәтижелері. Олай болса олардың арифметикалық орташа мәні де

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

кездейсоқ шама. Енді өлшеп отырған шаманың шын мәнін a -деп белгілесек, сонда бұл кездейсоқ шамалар Чебышев теоремасының шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан

$$P(|\bar{x} - a| < 0,01) \geq 0,98.$$

Осыдан мына теңсіздікті аламыз:

$$1 - \frac{1}{(0,01)^2 \cdot n} \geq 0,98$$

Соңғы теңсіздікті шешіп $n \geq 5 \cdot 10^5$ болатынын көреміз.

Мысал 8. Егер тәуелсіз $x_1, x_2, \dots, x_n$ кездейсоқ шамалар тізбегі төмендегідей үлестірім заңымен берілсе

X_n	$-3n$	0	$3n$
P	$\frac{1}{2^n \cdot n^2}$	$1 - \frac{1}{2^{n-1} \cdot n^2}$	$\frac{1}{2^n \cdot n^2}$

Онда осы кездейсоқ шамалар тізбегіне Чебышев теоремасын қолдануға бола ма?

Шешуі: Берілген кездейсоқ шамалар тізбегіне Чебышев теоремасын пайдалану үшін бұл тізбектер екі шартты қанағаттандыру керек:

1) олар қос-қостан тәуелсіз болу керек.

2) олардың математикалық үміттері арқылы болып, дисперсиялары тұрақты бір C санымен шектелген болуы керек.

Берілген кездейсоқ шамалар үшін бірінші рет орындалады, себебі есептің шарты бойынша олар тәуелсіз кездейсоқ шамалар. Ал екінші шарттың орындалуын тексеру қажет. Әуелі математикалық үміттерді есептейік

$$M(x_n) = -3n \cdot \frac{1}{2^n n^2} + 3n \frac{1}{2^n n^2} = 0$$

Енді x_n^2 үшін үлестірім кестесін жазайық.

X_n^2	$9n^2$	0	$9n$
P	$\frac{1}{2^n n^2}$	$1 - \frac{1}{2^{n-1} n^2}$	$\frac{1}{2^n n^2}$

Осыдан $M(x_n^2) = \frac{9}{2^{n-1}}$

ақырында $D(x) = \frac{9}{2^{n-1}} \leq 9$

Сонымен $M(x_n)$ ақырлы болады да, ол $D(x_n)$ шектелген болады. Олай болса Чебышев теоремасын пайдалануға болады.

Мысал 9. Оқиға тәуелсіз сынақтарда тұрақты $0,2$ ықтималдықпен пайда болады. Оқиғаның 900 сынақтарда пайда болу салыстырмалы жиілігінің осы оқиғаның ықтималдығынан ауытқуы $0,04$ -ден кем болатындығының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Есептің шарттары Бернулли теоремасының шарттарымен сәйкес келеді. Сондықтан $n=900, p=0,2, q=0,8, \varepsilon=0,04$ екенін ескеріп, іздеп отырған ықтималдықты бағалау үшін формуланы пайдаланамыз.

$$P\left(\left|\frac{m}{900} - 0,2\right| < 0,04\right) \geq 1 - \frac{0,2 \cdot 0,8}{900 \cdot 0,0016}$$

Осыдан $P \geq 0,89$

Мысал 10. А оқиғасының тәжірибеде пайда болу ықтималдығы 0,75-ке тең. Осы тәжірибелерде оқиғаның пайда болуы салыстырмалы жиілігінің оның ықтималдығынан ауытқуының 0,05-тен артық болмауының ықтималдығы 0,96-ға тең болу үшін қанша тәжірибе жасау керек?

Шешуі: Есептің шарты бойынша

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,75\right| < 0,05\right) = 0,96$$

формуладан

$$1 - \frac{0,75 \cdot 0,25}{n \cdot (0,05)^2} \geq 0,96$$

Осыдан $n \geq 1875$.

Мысал 11. Зауытта дайындалған бұйымның 90 пайызы бірінші сортқа жатады. Тексеруге 600 бұйым алынды. Тексеруге алынған бұйымдардың ішіндегі бірінші сортқа жататын бұйымдардың үлесінің оның ықтималдығы 0,99-ға тең болуы үшін бұл ауытқу қандай болуы керек?

Шешуі: Есептің шартын пайдалансақ онда мына теңдікті жазамыз

$$P\left(\left|\frac{m}{600} - 0,9\right| < \varepsilon\right) = 0,99$$

Осыдан,

$$1 - \frac{0,9 \cdot 0,1}{600 \cdot \varepsilon^2} \geq 0,99$$

немесе $\varepsilon = 0,12$

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Чебышев теңсіздігі және теоремасы не үшін қолданылады?
2. Бернулли теоремасы арқылы не табуға болады?
3. Пуассон және Хинчин теоремалары қандай жағдайда қолданылады?
4. Орталық шектік теоремасы дегеніміз не?

Жаттығулар

1. Дискретті кездейсоқ шама үлестірім заңдарымен берілген

X	1	2
P	0,8	0,2

- а) Мына $|x - M(x)| < 1$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын табыңыз.
- б) Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|x - M(x)| < 1$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын бағалаңыз.

2. Детальдің орташа ұзындығы $a=50$ см, ал дисперсиясы $\sigma^2=0,1$. Чебышев теңсіздігін пайдаланып алынған кез-келген детальдың ұзындығы 49,5 сантиметрден 50,5 см аралығында болатынының ықтималдығын бағалаңыз.
3. Кез-келген кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы үш орташа квадраттық ауытқудан артпауының ықтималдығын бағалаңыз.
4. Жарамсыз радиошам жасап шығару ықтималдығы 0,25. Бір партияда 1000 радиошам болса, жарамсыз радиошамдардың саны 250-ден ауытқуы 40-тан кем болуының ықтималдығын бағалаңыз.
5. Дискретті кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

$$|X - M(x)| < 0,2$$

теңсіздігінің орындалу ықтималдығын бағалаңыз.

5. Елді мекенде судың сөткелік шығыны кездейсоқ шама. Оның квадраттық орташа ауытқуы 10000 л. Осы елді мекенде бір күн ішінде су шығынының математикалық үміттен ауытқуының абсолют шамасы 25000 литрден кем болмауының ықтималдығын бағалаңыз.
6. Әрбір сынақта А оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,5. Чебышев теңсіздігін пайдаланып 100 сынақта А оқиғасының 40-тан 60-қа дейінгі аралықта пайда болуының ықтималдығын бағалаңыз.
7. Кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген

X	1	2	3	4	5	6
P	0,05	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1

Мына теңсіздіктің $|X - M(x)| < 2$ орындалуының ықтималдығын бағалаңыз.

8. Белгілі бір прибор тәуелсіз жұмыс істейтін 10 элементтен тұрады. Т уақыт ішінде әр элементтің жұмыс істемей қалу ықтималдығы 0,5. Т уақыт ішінде жұмыс істемей қалған элементтер мен осы жұмыс істемей қалған элементтердің орташа санының (математикалық үміті) айырмасының абсолют шамасының; 1) екіден кем болуының, 2) екіден кем болмауының ықтималдықтарын бағалаңыз.
9. Зауытта стандартқа жатпайтын радиошамдар шығару ықтималдығы 0,25. Шығарылған 2000 радиошамдардың ішінде стандартқа жатпайтын шамдар санының 500-ден айырмасы 75-тен кем болуының ықтималдығын бағалаңыз.
10. Урнада 100 ақ 100 қара шарлар бар. Урнадан кез-келген шар алынып түсі анықталғаннан кейін қайтарылады. Урнадан 50 рет шар алынды. Осы алынған шарлардың ішінде ақ шарлардың саны мына интервалда (15, 35) болуының ықтималдығын бағалаңыз.
- Кездейсоқ шама үлестірім заңымен берілген

X	1	2	3
P	0,1	0,5	0,4

а) $|X - M(x)| < 3$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын табыңыз.

б) $|X - M(x)| < 3$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын бағалаңыз.

8 тақырып Кездейсоқ шамалардың жүйелері

Мақсат: Кездейсоқ шамалар жүйесі, оның үлестірім функциясы және үлестірім тығыздығы ұғымдарын енгізіп, олардың қасиеттері қарастыру. Кездейсоқ шамалар жүйесінің сандық сипаттамаларымен таныстыру.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. Кездейсоқ шамалардың жүйесі ұғымы.
2. Кездейсоқ шамалардың жүйесінің үлестірім заңы.
3. Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім функциясы.
4. Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім тығыздығы.
5. Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің сандық сипаттамалары.

Кездейсоқ құбылыстарды зерттегенде кездейсоқ шамалардың екі, үш немесе одан да көп санын қолдануға тура келеді. Мысалы, снарядтың түсу нүктесі екі кездейсоқ шамамен анықталады: абцисса және ордината. Снарядтың кеңістікте жарылу нүктесі үш кездейсоқ шамамен анықталады.

Екі немесе бірнеше кездейсоқ шамаларды бірге қарастыру кездейсоқ шамалардың жүйесіне келтіреді. $X, Y, Z, \dots, W$ кездейсоқ шамаларының жүйесін $(X, Y, Z, \dots, W)$ деп белгілейміз. Кездейсоқ шамалардың жүйесін қарастырғанда жүйені құрайтын әр кездейсоқ шаманы зерттеумен қатар жүйені құратын кездейсоқ шамалардың арасындағы байланысты немесе тәуелділікті де қарастыру қажет.

Кездейсоқ шамалардың жүйесін қарастырғанда жүйенің геометриялық интерпретациясын қолдану ыңғайлы. Мысалы, екі кездейсоқ шама (X, Y) жүйесін xOy жазықтығындағы координаталары X және Y болатын кездейсоқ нүкте немесе жазықтықтағы координаталары X және Y болатын вектор деп қарастыруға болады. Үш кездейсоқ шама жүйесін (X, Y, Z) кеңістіктегі кездейсоқ нүкте немесе кеңістіктегі вектор деп қарастыруға болады. Осы сияқты n кездейсоқ шамалар жүйесін $(X, Y, Z, \dots, W)$ n -өлшемді кеңістіктің кездейсоқ нүктесі немесе n -өлшемді вектор деп түсінеміз.

Кездейсоқ шамалар жүйесін оқығанда екі кездейсоқ шаманың жүйесін толық қарастырамыз. Себебі одан көп кездейсоқ шамалардың жүйесі үшін осы мәліметтерді жалпылауға болады.

Егер (X, Y) кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері (x, y) сандар жұбы арқылы берілсе, онда кездейсоқ шама екі өлшемді деп аталады. X және Y

кездейсоқ шамаларының бірге қарастырылуы екі кездейсоқ шаманың жүйесін құрады.

Бір кездейсоқ шаманы қарастырғанда біз оның үлестірім заңымен танысқанбыз. Екі кездейсоқ шаманың үлестірім заңы да осындай роль атқарады.

Кездейсоқ шамалар жүйесінің *үлестірім заңы* деп кездейсоқ шамалар жүйесінің мүмкін мәндері облысы мен осы облыста жүйенің пайда болу ықтималдығы арасындағы байланысты тағайындайтын қатынас аталады.

X және Y дискретті кездейсоқ шама, ал оның мүмкін мәндері (x_i, y_i) ($i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$) болсын. Сонда осындай кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірімі X кездейсоқ шамасы x_i мәнін Y кездейсоқ шамасы y_j мәнін қабылдау ықтималдығын $p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j)$ көрсету арқылы сипатталуы мүмкін. p_{ij} ықтималдықтары мына түрдегі кестеге жазылады

$X_i \backslash Y_j$	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}
...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

Мұндай кесте екі дискретті кездейсоқ шамалар жүйесінің *үлестірім кестесі* деп аталады. Барлық мүмкін болатын оқиғалар $(X=x_i, Y=y_j)$ ($i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$) үйлесімсіз оқиғалардың толық тобын құратын болғандықтан

$$\sum_{i,j} p_{ij} = \sum_{i,j} P(X=x_i, Y=y_j) = 1 \quad \text{болады.} \quad \text{Сонымен қатар}$$

$$\sum_j p_{ij} = \sum_j P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \quad \text{және} \quad \sum_i p_{ij} = \sum_i P(X=x_i, Y=y_j) = P(Y=y_j).$$

Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің ықтималдықтарының *үлестірім функциясы* деп $(X < x; Y < y)$ оқиғасының пайда болу ықтималдығына тең екі аргументті $F(x, y)$ функциясы аталады, яғни

$$F(x, y) = P(X < x; Y < y).$$

Геометриялық тұрғыдан екі кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім функциясы (X, Y) кездейсоқ нүктесінің жазықтықтағы төбесі (x, y) нүктесінде болатын сол жақтағы төмен шексіз квадрантқа түсу ықтималдығын көрсетеді.

Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім функциясының қасиеттері:

- $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_1(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_2(y);$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0;$
- Үлестірім функциясы кемімейтін функция:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$$

$$y_2 > y_1 \Rightarrow F(x, y_2) \geq F(x, y_1);$$
- $P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$

(X, Y) кездейсоқ нүктесінің (x, y) нүктесіне тірелетін қабырғалары Δx болатын Δy элементар тіктөртбұрышқа түсу ықтималдығын қарастыралық.

Үлестірім функциясының (5) қасиетін қолдансақ $P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y)$

Осы ықтималдықты элементар тіктөртбұрыштың ауданына бөліп $\Delta x \rightarrow 0$ және $\Delta y \rightarrow 0$ шекке көшеміз:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

Үлестірім функциясы $F(x, y)$ үзіліссіз және екі рет дифференциалданатын болса, онда жоғары теңдіктің оң бөлігі $F(x, y)$ функциясының екінші ретті аралас дербес туындысын береді. Осы туындыны $f(x, y)$ деп белгілейміз:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y). \text{ Сонда } f(x, y) \text{ функциясы } (X, Y) \text{ үзіліссіз кездейсоқ}$$

шамалар жүйесінің үлестірім тығыздығы деп аталады. Геометриялық тұрғыдан $f(x, y)$ функциясы кеңістікте бет болады, сондықтан ол үлестірім беті деп аталады.

Үзіліссіз (X, Y) кездейсоқ шамалар жүйесінің ықтималдықтар үлестірімінің функциясы ықтималдықтар тығыздығы арқылы мына формуламен өрнектеледі:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

(X, Y) үзіліссіз кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім тығыздығының қасиеттері:

1. үлестірім тығыздығы теріс емес функция $f(x, y) \geq 0$;

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Анықтама. Кездейсоқ шамалар жүйесіне кіретін бір кездейсоқ шама нақты мән қабылдаған шартта табылған екінші кездейсоқ шаманың үлестірім заңы *шартты үлестірім заңы* деп аталады.

Шартты үлестірім заңдары мына түрде жазылады:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \text{ және } f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

Осы шартты үлестірім заңдары арқылы екі кездейсоқ шамалар жүйесінің ықтималдықтар тығыздығы мына түрде жазылады:

$$f(x, y) = f_1(x) f\left(\frac{y}{x}\right) = f_2(y) f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Екі өлшемді кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалардың ішінде ең маңыздысы шартты математикалық үміт және ковариация болып табылады.

$X=x$ болғанда Y дискретті кездейсоқ шамасының *шартты математикалық үміті* деп Y -тің мүмкін мәндері мен олардың сәйкес шартты ықтималдықтарының көбейтінділерінің қосындысы аталады

$$M(Y / X = x) = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j / x)$$

Үзіліссіз кездейсоқ шамалар үшін шартты математикалық үміт мына интегралмен анықталады:

$$M(Y/X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x)dy$$

$Y=y$ болғанда X дискретті кездейсоқ шамасының *шартты математикалық үміті* деп X -тің мүмкін мәндері мен олардың сәйкес шартты ықтималдықтарының көбейтінділерінің қосындысы аталады

$$M(X/Y=y) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i/y)$$

Үзіліссіз кездейсоқ шамалар үшін шартты математикалық үміт мына интегралмен анықталады:

$$M(X/Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x/y)dx.$$

$M(Y/X=x)$ шартты математикалық үміті x айнымалысына тәуелді функция болады. Оны $m_y(x)$ деп белгілейміз. Сонда Y шамасының X -ке *регрессиясы* деп $m_y(x)$ аталады. Осы сияқты X шамасының Y -ке *регрессиясы* $M(X/Y=y)$ шартты математикалық үміті аталады және $m_x(y)$ деп белгіленеді.

X және Y кездейсоқ шамаларының *ковариациясы* немесе *корреляциялық моменті* деп осы кездейсоқ шамалардың математикалық үмітінен ауытқуларының көбейтіндісінің математикалық үміті аталады:

$$\mu_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

X және Y кездейсоқ шамаларының *корреляция коэффициенті* деп ковариацияның осы шамалардың орта квадраттық ауытқуларының көбейтіндісіне қатынасы аталады:

$$r_{xy} = \mu_{xy} / (\sigma_x \sigma_y), \quad -1 \leq r_{xy} \leq 1.$$

$x = m_x(y)$ және $y = m_y(x)$ теңдеулері сәйкес X -тің Y -ке және Y -тің X -ке *регрессиясының теңдеулері* деп аталады.

Y -тің X -ке сызықты регрессиясының теңдеуі мына түрде болады:

$$y_x = M(Y) + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - M(X)).$$

Мысал 1. Фирма нан өндіретін шағын заводтар шығарады. Жарнамаға нақты бір қаражат жұмсалады. Төмендегі кестеде бір ай ішінде сатылған заводтар саны (X) және жарнамаға жұмсалған қаражат көлемі (Y) келтірілген. (X, Y) кездейсоқ шамасының (x_i, y_i) әрбір жұбына сәйкес $p(x_i, y_i)$ ықтималдығы қойылған.

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0,12	0,15	0,10
2	0,08	0,10	0,12
3	0,05	0,10	0,18

Әрбір X және Y шамалары үшін ықтималдықтардың үлестірім кестесін және $X=2$ болғанда Y шамасының ықтималдықтар үлестірімінің шартты заңын өрнектеу керек.

Шешуі: Әрбір x_i мәнімен y_i –тің үш мәні сәйкес келеді, яғни оқиғалардың толық тобы болады, ал олардың ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең болатындықтан

$$\sum_{j=1}^3 p(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^3 p(x_i) p(y_j / x_i) = p(x_i) \sum_{j=1}^3 p(y_j / x_i) = p(x_i).$$

Олай болса $p(x_i)$ оқиғасының ықтималдығы әрбір колонкада $p(x_i, y_i)$ ықтималдықтарының қосындысына тең.

Нәтижесінде X шамасының ықтималдықтарының үлестірім кестесін аламыз:

x	0	1	2
p	0,25	0,35	0,4

Осылайша Y шамасының ықтималдықтарының үлестірім кестесін аламыз:

y	0	1	2
p	0,37	0,3	0,33

Әрбір шама үшін олардың ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең болу керек

$$\sum_{j=1}^3 p(x_i) = 0,25 + 0,35 + 0,4 = 1; \quad \sum_{j=1}^3 p(y_i) = 0,37 + 0,3 + 0,33 = 1;$$

$X=2$ болғанда Y шамасының шартты ықтималдықтарын табамыз:

$$P(Y=1 / X=2) = P(Y=1, X=2) / P(X=2) = 0,10 / 0,4 = 0,25;$$

$$P(Y=2 / X=2) = P(Y=2, X=2) / P(X=2) = 0,12 / 0,4 = 0,30;$$

$$P(Y=3 / X=2) = P(Y=3, X=2) / P(X=2) = 0,18 / 0,4 = 0,45.$$

Мысал 2. Берілген екі өлшемді кездейсоқ шамасының үлестірім кестесі бойынша $x_1=3$ және $x_2=6$ екі мәндері үшін Y шамасының X -ке регрессиясын тап.

$Y \backslash X$	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Шешуі: Y –тің X -ке регрессиясы немесе шартты математикалық үміті мына формуламен анықталады:

$$M(Y / X=x_i) = \sum_{j=1}^n y_j p(y_j / x_i), \quad \text{мұнда} \quad p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

$P(X=3)$ және $P(X=6)$ анықтайық:

$$P(X=3)=0,25+0,15+0,32=0,72;$$

$$P(X=6)=0,10+0,05+0,13=0,28.$$

Шартты ықтималдықтарды есептейік:

$$P(Y=10/ X=3) = 0,25/0,72=0,35; \quad P(Y=10/ X=6) = 0,10/0,28=0,36;$$

$$P(Y=14/ X=3) = 0,15/0,72=0,21; \quad P(Y=14/ X=6) = 0,05/0,28=0,18;$$

$$P(Y=18/ X=3) = 0,32/0,72=0,44; \quad P(Y=18/ X=6) = 0,13/0,28=0,46.$$

Шартты математикалық үмітін табамыз:

$$M(Y/X=3)=10 \cdot 0,35+14 \cdot 0,21+18 \cdot 0,44=14,4;$$

$$M(Y/X=6)=10 \cdot 0,36+14 \cdot 0,18+18 \cdot 0,46=14,3.$$

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Кездейсоқ шамалардың жүйесі деп не аталады?
2. Кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім заңы дегеніміз не?
3. Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім функциясы деп не аталады және оның қасиеттері қандай?
4. Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім тығыздығы деп не аталады және оның қасиеттері қандай?
5. Екі кездейсоқ шамалар жүйесінің сандық сипаттамаларына не жатады? Олар қалай анықталады?

Жаттығулар

1. (X, Y) екі өлшемді кездейсоқ шаманың үлестірім кестесі берілген:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0,07	0,16	0,10
2	0,13	0,09	0,18
3	0,10	0,05	0,12

Әрбір X және Y шамалары үшін ықтималдықтардың үлестірім кестесін құр.

2. Дискретті екі өлшемді кездейсоқ шамасы берілген

$Y \backslash X$	2	5	8

0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

$Y=0,8$ болғанда X шамасының шартты үлестірім заңын тап.

3. Берілген екі өлшемді кездейсоқ шаманың үлестірім кестесі бойынша

$Y=2, Y=6, Y=8$ үш мәндері үшін X шамасының Y -ке регрессиясын тап.

$Y \backslash X$	1	2	3
2	0,22	0,10	0,06
6	0,12	0,08	0,05
8	0,17	0,13	0,07

4. Екі өлшемді (X, Y) кездейсоқ шамасының үлестірім заңы берілген.

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0,15	0,30	0,35
2	0,05	0,05	0,10

Шартты математикалық үмітін $M(Y/X=1)$ тап.

5. Екі өлшемді кездейсоқ шамасының (X, Y) үлестірім заңы берілген.

$X \backslash Y$	2	3	5
1	0,10	0,20	0,15
3	0,05	0,14	0,11
4	0,12	0,08	0,05

Y шамасының барлық мүмкін мәндері үшін X шамасының шартты математикалық үмітін тап.

6. Берілген 5 есебіндегі үлестірім заңы үшін X және Y шамалары арасындағы корреляция коэффициентін тап.

Шешуі: $X=1, X=3, X=4$ мәндерінің ықтималдықтарын табамыз:

$$P(X=1)=0,10+0,20+0,15=0,45;$$

$$P(X=3)=0,05+0,14+0,11=0,30;$$

$$P(X=4)=0,12+0,08+0,05=0,25.$$

$Y=2, Y=3, Y=5$ мәндерінің ықтималдықтарын анықтайық:

$$P(Y=2)=0,10+0,05+0,12=0,27;$$

$$P(Y=3)=0,20+0,14+0,08=0,42;$$

$$P(Y=5)=0,15+0,11+0,05=0,31.$$

$M(Y)$ -ті табамыз:

$$M(Y) = 2 \cdot 0,27 + 3 \cdot 0,42 + 5 \cdot 0,31 = 3,35.$$

$M(X)$ -ті анықтаймыз:

$$M(X) = 1 \cdot 0,45 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,25 = 2,35.$$

$M(X^2)$ пен $M(Y^2)$ есептейміз:

$$M(X^2) = 1 \cdot 0,45 + 9 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,25 = 7,15;$$

$$M(Y^2) = 4 \cdot 0,27 + 9 \cdot 0,42 + 25 \cdot 0,31 = 12,61.$$

$D(X)$, $D(Y)$ табамыз:

$$D(X) = 7,15 - 2,35^2 = 7,15 - 5,52 = 1,63;$$

$$D(Y) = 12,61 - 3,35^2 = 12,61 - 11,22 = 1,39.$$

$$\text{Осыдан } \sigma_x = 1,28; \sigma_y = 1,18.$$

X және Y шамаларының ковариациясы мына формула арқылы

табылады:

$$\mu_{xy} = M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Сонымен,

$$M(XY) =$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = 1 \cdot 2 \cdot 0,1 + 1 \cdot 3 \cdot 0,2 + 1 \cdot 5 \cdot 0,15 + 3 \cdot 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 3 \cdot 0,14 +$$

$$+ 3 \cdot 5 \cdot 0,11 + 4 \cdot 2 \cdot 0,12 + 4 \cdot 3 \cdot 0,08 + 4 \cdot 5 \cdot 0,05 = 7,68,$$

$$\mu_{xy} = 7,68 - 2,35 \cdot 3,35 = -0,19,$$

$$r_{xy} = \mu_{xy} / (\sigma_x \sigma_y) = -0,19 / (1,28 \cdot 1,18) = -0,126.$$

7. Берілген екі өлшемді кездейсоқ шамасының (X, Y) ықтималдықтар үлестірім заңы үшін

$X \backslash Y$	2	5
8	0,15	0,10
10	0,22	0,23
12	0,10	0,20

X және Y шамалары арасындағы корреляция коэффициентін тап.

8. Берілген екі өлшемді кездейсоқ шамасының (X, Y) ықтималдықтар үлестірім заңы үшін

$X \backslash Y$	1	4
3	0,12	0,20
5	0,24	0,15
6	0,22	0,07

X және Y шамалары арасындағы корреляция коэффициентін тап және Y -тің X -ке сызықты регрессиясының теңдеуін жаз.

9. Екі өлшемді кездейсоқ шаманың үлестірім заңы берілген

$X \backslash Y$	1	3	4
2	0,20	0,15	0,05
4	0,10	0,11	0,14
5	0,08	0,05	0,12

Y -тің X -ке сызықты регрессиясының теңдеуін тап.

10. Екі өлшемді кездейсоқ шаманың үлестірім заңы берілген

$X \backslash Y$	1	3	4
2	0,20	0,15	0,05
4	0,10	0,11	0,14
5	0,08	0,05	0,12

Y -тің X -ке сызықты регрессиясының теңдеуін тап.

9-тақырып Таңдамалық тәсіл

Мақсат: Студенттерді математикалық статистика пәнімен таныстыру, оның мақсаты мен міндетін көрсету және негізгі ұғымдарын енгізу.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. Математикалық статистика пәні, негізгі міндеті.
2. Математикалық статистиканың мақсаты мен міндеті және негізгі ұғымдары.
3. Таңдаманың статистикалық үлестірімі және оның графиктері.
4. Үлестірімнің эмпирикалық функциясы және оның қасиеттері.

Математикалық статистика пәні бақылау нәтижесінде алынған статистикалық мәліметтерді жинау және топтау тәсілдерімен айналысады.

Математикалық статистиканың негізгі мақсаты — статистикалық мәліметтерді өңдеу, талдау және қорытынды жасау.

Математикалық статистиканың бірінші міндеті - эксперимент немесе бақылау нәтижесінде алынған статистикалық мәліметтерді жинау және топтау әдістерін көрсету. Екінші міндеті - статистикалық мәліметтерді талдау әдістерін өңдеу: оқиғаның белгісіз ықтималдығын, функцияларды, үлестірім параметрлерін бағалау; кездейсоқ шаманың басқа кездейсоқ шамалардан тәуелділігін бағалау; белгісіз үлестірімнің түрлері мен параметрінің шамасы туралы статистикалық болжамдарды тексеру.

Практикада толық зерттеу сирек жүргізіледі. Егер жиынтықта объектілер саны өте көп болса, онда толық зерттеу мүмкін емес. Осы жағдайда барлық жиынтықтан кездейсоқ объектілердің шектелген санын алып және оларды толық зерттейді.

Статистикалық зерттеудің негізі - таңдамалық тәсіл. Оның мағынасы мынада: зерттеуге қажетті объектілер жиынынан оның бір бөлігі алынады да ол толық зерттеледі. Таңдау жүргізілетін объектілер жиыны **бас жиынтық** деп аталады. Бас жиынтықтан таңдалған объектілер жиыны **таңдамалық** жиынтық (**таңдама**) деп аталады. Жиынтықтағы объектілер саны оның **көлемі** деп аталады.

Мысал. 2000 бұйымнан зерттеу үшін 100 бұйым таңдалсын. Сонда бас жиынтық көлемі $N=2000$, ал таңдама көлемі $n=100$.

Таңдаудың түрлі тәсілдері бар:

- **жай кездейсоқ** - бас жиыннан объектілер бір-бірлеп алынады; мұндай таңдауды кездейсоқ сандар кестесін пайдаланып немесе «лоторей» принципімен жүргізуге болады;

- **механикалық** – бас жиынтықты таңдама көлеміне тең топқа бөледі де әр топтан бір объектіден алады («әрбір бесінші», «әрбір оныншы» принципімен т.с.с.);

- **типтік** – бас жиынтық бөліктерге бөлінеді және әр бөліктен кездейсоқ түрде бір немесе бірнеше объект алынады;

- **сериялық** – бас жиынтықты бөліктерге бөлген соң толық зерттеуге бір немесе бірнеше бөлік алынады.

Таңдама бас жиынның пропорциясын дұрыс елестетсе, онда ол **репрезентативті** деп аталады.

Егер зерттелген соң объект таңдамадан бас жиынға қайта салынса, онда таңдау **қайталамалы** деп, егер объект бас жиынға қайта салынбаса **қайталанбайтын** деп аталады.

Бақыланған x_i мәндер **варианталар** деп, ал варианттардың өсу ретімен жазылған тізбегі **вариациялық қатар** деп аталады. Бақылау саны **жиілік** деп аталады.

Таңдаманың статистикалық үлестірімі деп варианттар мен олардың жиілігі немесе салыстырмалы жиілігі арасындағы сәйкестікті тағайындайтын заң аталады.

Статистикалық үлестірімнің түрлі графиктерін салады.

Жиіліктер полигоны деп кесінділері $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ нүктелерін қосатын сынық сызық аталады.

Салыстырмалы жиіліктер полигоны деп кесінділері $(x_1, W_1), (x_2, W_2), \dots, (x_k, W_k)$ нүктелерін қосатын сынық сызық аталады.

Жиіліктер гистограммасы деп табаны ұзындығы h болатын дербес интервал, ал биіктігі $\frac{n_i}{h}$ қатынасына тең тіктөртбұрыштардан құралған баспалдақты фигура аталады

Үлестірімнің эмпирикалық функциясы (таңдаманың үлестірім функциясы) деп x –тің әрбір мәніне $X < x$ оқиғасының салыстырмалы жиілігін анықтайтын $F^*(x)$ функциясы аталады: $F^*(x) = W(X < x)$ немесе

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \text{ мұнда } n_x - x\text{-тен кіші варианттар саны, } n - \text{таңдама көлемі.}$$

Үлестірімнің эмпирикалық функциясының қасиеттері:

1. Эмпирикалық функцияның мәндері $[0,1]$ кесіндісіне тиісті: $0 \leq F^*(x) \leq 1$;
2. $F^*(x)$ - кемімейтін функция;
3. Егер x_1 – ең кіші варианта болса, онда $x \leq x_1$ болғанда $F^*(x) = 0$; егер x_k - ең үлкен варианта болса, онда $x > x_k$ болғанда $F^*(x) = 1$.

Мысал 1. Бір сағатта кассаға келген сатып алушылар санына X бақылау жүргізілді. 30 сағат бақылаудың нәтижесі: 70, 75, 100, 120, 75, 60, 100, 120, 70, 60, 65, 100, 65, 100, 70, 75, 60, 100, 100, 120, 70, 75, 70, 120, 65, 70, 75, 70, 100, 100.

X - дискретті кездейсоқ шама болып табылады, ал алынған мәліметтер $n=30$ бақылаудан тұратын таңдама. Жиіліктер үлестірімінің қатарын құр

Шешуі: Ең әуелі ранжирленген қатар құраймыз: 60, 60, 60, 65, 65, 65, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 120, 120, 120, 120.

Алты топ алынды, яғни кездейсоқ шаманың алты әртүрлі мәні (алты варианта). Әрбір топ үшін варианта мәндерінің жиіліктерін және сәйкес салыстырмалы жиіліктерді есептейміз. Барлық алынған мәндерді төмендегі кестеге толтырамыз. Бұл кесте вариациялық қатар болады.

Топ номері	i	1	2	3	4	5	6
Кассаға келген сатушылар саны	x_i	60	65	70	75	100	120
Жиілік	m_i	3	3	7	5	8	4
Салыстырмалы жиілік	p_i	3/30	3/30	7/30	5/30	8/30	4/30

Мысал 2. Төменде 105 студенттің бойын өлшеу нәтижесінің таңдамасы келтірілген. Өлшеу 1 см дәлдікпен жүргізілді.

155	170	185	180	188	152	173	178	178	168	185
173	170	183	175	173	170	183	175	180	175	193
178	183	180	197	178	181	187	168	174	179	184
183	178	180	178	163	166	178	175	182	190	167
170	178	183	170	178	181	173	168	185	175	170
155	169	186	179	189	155	174	179	179	169	186
174	171	184	175	193	178	184	180	196	175	181
188	168	179	178	183	184	178	181	177	163	166
178	175	183	190	167	170	178	183	170	178	182
173	168	186	176	171	188					

Интервалдық вариациялық қатар құр.

Шешуі. Студенттердің бойы кездейсоқ үзіліссіз шама екені белгілі. Ең әуелі кездейсоқ шаманың минималды және максималды мәнін табайық: $x_{\min}=152$ см, $x_{\max}=196$ см. Онда вариациялау интервалы (құлашы) $R = x_{\max} - x_{\min} = 44$ см.

Әдетте, 6-дан 15- ке дейін интервалды қамтитын үлестірім қатары дұрыс құрастырылған деп есептеледі, бірақ дербес интервалдар саны және интервал өлшемі нақты есеп шартына байланысты анықталады. Сонда ұзындығы 150 см-ден 200 см-ге дейін дербес интервалдар саны 10 болады.

Сәйкес интервалдық вариациялық қатар төмендегі кестеде келтірілген.

Интервал индексі	Студенттердің (интервал) $x_i < X < x_{i+1}$	Жиілік n_i	Салыстырмалы жиілік w_i
1	150-155	4	0,0381
2	155-160	-	-
3	160-165	2	0,0190
4	165-170	19	0,1810
5	170-175	19	0,1810
6	175-180	26	0,2476
7	180-185	21	0,2000
8	185-190	10	0,0953
9	190-195	2	0,0190
10	195-200	2	0,0190

Мысал 3. Таңдама жиіліктер үлестірімі түрінде берілген:

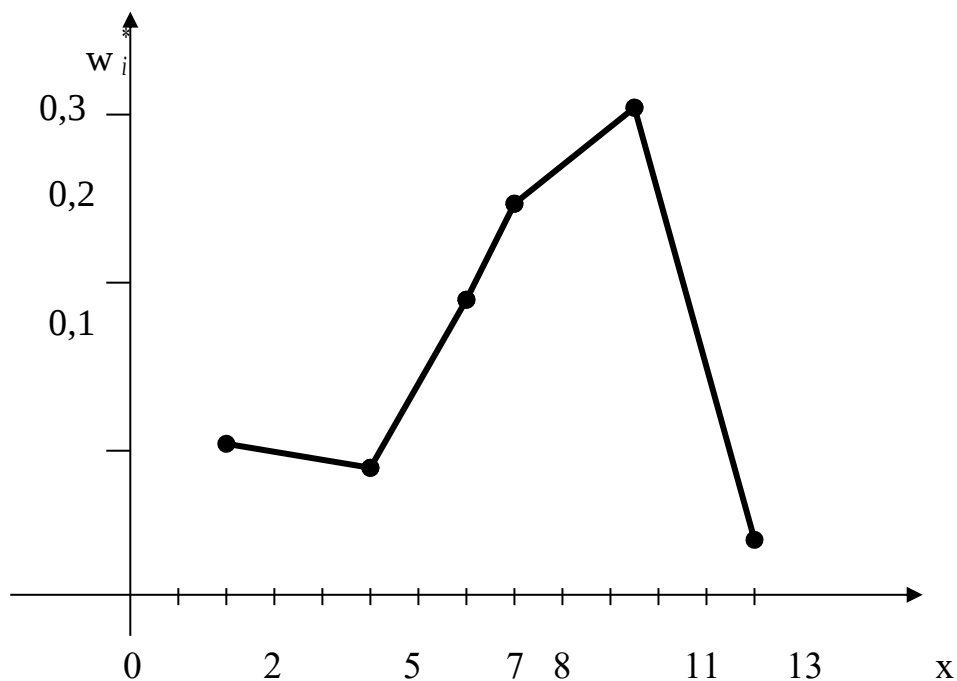
x_i	2	5	7	8	11	13
n_i	10	9	21	25	30	5

Салыстырмалы жиіліктер үлестірімін тап және салыстырмалы жиіліктер полигонын сал.

Шешуі: Таңдаманың көлемін бағалайық: $\sum_{i=1}^6 n_i = 100$. Онда вариациялық қатарды мына түрде жазуға болады:

x_i	2	5	7	8	11	13
n_i	0,10	0,09	0,21	0,25	0,30	0,05

Суретте салыстырмалы жиіліктердің полигоны келтірілген.



Мысал 4. Таңдама жиіліктер үлестірімі түрінде берілген:

Салыстырмалы жиіліктер үлестірімін тап және салыстырмалы жиіліктер

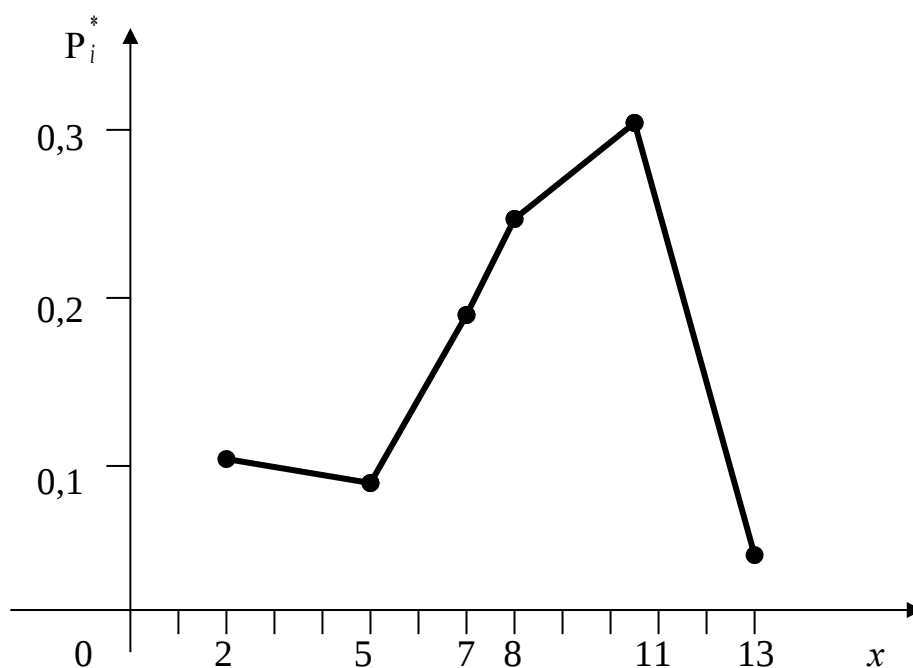
x_i	2	5	7	8	11	13
m_i	10	9	21	25	30	5

полигонын сал.

Шешуі: Таңдаманың көлемін бағалайық: $\sum_{i=1}^6 m_i = 100$. Онда вариациялық қатарды мына түрде жазуға болады

x_i	2	5	7	8	11	13
m_i	0,10	0,09	0,21	0,25	0,30	0,05

Келесі бетте салыстырмалы жиіліктердің полигоны кескінделген.



Мысал 5. Таңдама интервалдық вариациялық қатармен берілген

i	$x_i < X < x_{i+1}$	m_i
1	1-5	10
2	5-9	20
3	9-13	50
4	13-17	12
5	17-21	8

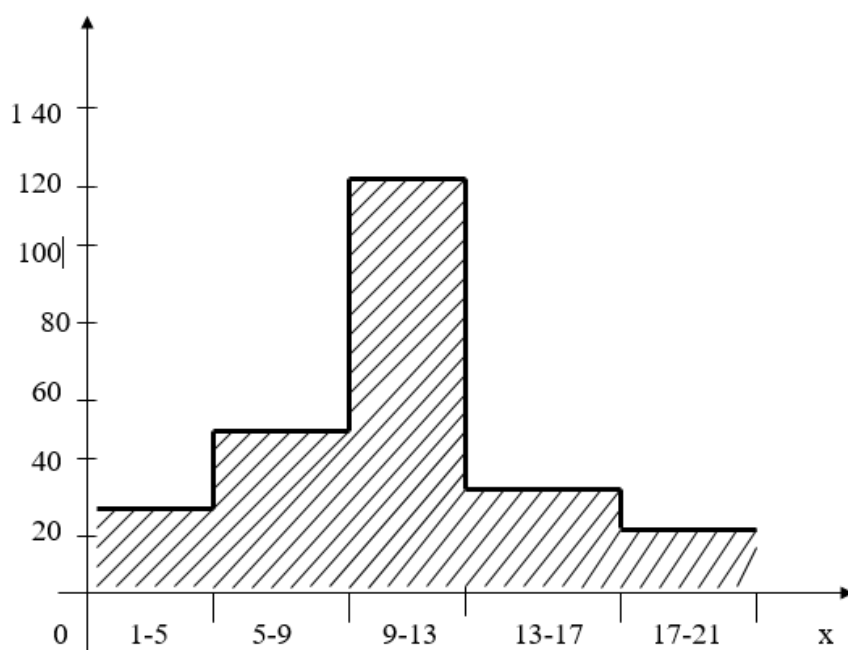
Ықтималдық тығыздығының таңдамалық бағасының гистограммасын құр.

Шешуі: Әрбір интервалдың ұзындығы $h = 4$. Таңдама көлемі $n = 100$. $m_i / (hn)$ мәнін анықтайық:

$x_i < X < x_{i+1}$	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21
$m_i / (hn)$	$25 \cdot 10^{-3}$	$50 \cdot 10^{-3}$	$125 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$

Төменде берілген үлестірімнің гистограммасы келтірілген.

$$\frac{m_i}{hn} \cdot 10^{-3}$$



Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Бас жиынтық деп не аталады?
2. Таңдамалық жиынтық деп не аталады?
3. Қандай таңдау тәсілдері болады және олар қалай іске асады?
4. Қандай таңдама репрезентативті деп аталады?
5. Вариациялық қатар деп не аталады?
6. Таңдаманың статистикалық үлестірімі деп не аталады?
7. Жиіліктер полигоны деп не аталады?
8. Жиіліктер гистограммасы деп не аталады?
9. Үлестірімнің эмпирикалық функциясы деп не аталады және оның қасиеттері қандай?

Жаттығулар

1. Эксперимент жүргізу барысында мына мәліметтер жиынтығы алынды:
32, 26, 16, 44, 28, 40, 30, 31, 17, 30, 37, 32, 42, 31, 36, 49, 35, 21, 25, 40, 27, 25, 33, 34, 27, 43, 19, 23, 36, 48, 31, 35, 43, 32, 26, 35, 33, 45, 19, 22, 28, 49, 23, 32, 33, 27, 43, 35, 23, 44.

Дербес интервалдар саны 7 болатын интервалдық вариациялық қатар құр.

2. Лездік лотереясынан ұтып алу саны бақыланды. Бақылау нәтижесінде мына ұтыс мәндері алынды (мың.тенге):

0,1, 0, 0, 5, 0, 10, 0, 1, 0, 0, 1, 5, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 5, 0, 0, 1, 1, 1, 5, 10, 0, 1, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0.

X -лездік лотереядағы ұтыс саны кездейсоқ шамасының вариациялық қатарын құр.

3. А қаласында кепілдік қызмет ету мерзімін анықтау үшін дүкеннен сатылған соң екі жыл пайдаланылған автомашиналардың орташа жүру шамасы зерттелген. Мынадай нәтиже алынды (мың.км):

3,0; 25,0; 18,6; 12,1; 10,6; 18,0; 17,3; 29,1; 20,0; 18,3; 21,5; 26,7; 12,2; 14,4; 7,3; 9,1; 2,9; 5,4; 40,1; 16,8; 11,2; 9,9; 25,3; 4,2; 29,6.

Интервалдық вариациялық қатар құр.

4. Фирмада 39 адам жұмыс істейді. Бір ай ішінде фирманың әр жұмысшысының жұмысқа келмеген жұмыс күндерінің саны зерттелген. Осы зерттеудің нәтижесі мынадай:

0, 1, 3, 0, 2, 3, 5, 7, 3, 5, 2, 10, 7, 5, 0, 2, 5, 10, 5, 3, 1, 9, 15, 10, 1, 0, 2, 3, 5, 7, 7, 6, 5, 3, 0, 7, 10, 13, 0.

Интервалдық вариациялық қатар құр. Өткізіп жіберілген жұмыс күндер санының кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын құр. Жұмысқа келмеген жұмыс күндерінің саны кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын құр.

5. Берілген вариациялық қатар бойынша үлестірімнің эмпири калық функциясын тап:

а)

x_i	1	3	7	9	12
m_i	2	10	4	24	10

б)

x_i	-2	0	5	8	14
m_i	3	17	28	22	10

6. Вариациялық қатар бойынша үлестірімнің эмпирикалық функциясын тап:

а)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_i < X < x_{i+1}$	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
m_i	6	4	2	18	29	11	10	17	3

б)

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i < X < x_{i+1}$	11-14	14-17	17-20	20-23	23-26	26-29	29-32	32-35
m_i	16	24	30	7	8	6	5	4

7. Вариациялық қатардың мәліметтері бойынша салыстырмалы жиіліктің полигонын құр ($n=100$):

а)

x_i	1	4	5	7	9
m_i	10	25	45	20	10

б)

x_i	-1	0	1	3	5
m_i	15	5	25	55	10

в)

x_i	2	3	6	7	10	12
m_i	8	10	32	45	13	2

г)

x_i	3	5	8	9	11	12
m_i	2	26	42	35	4	1

8. Көлемі $n=100$ таңдаманың үлестірімі бойынша салыстырмалы жиіліктердің гистограммасын құр.

а)

i	$x_i < X < x_{i+1}$	m_i
1	3-5	20
2	5-7	25
3	7-9	15
4	9-11	13
5	11-13	12
6	13-15	8
7	15-17	7

б)

i	$x_i < X < x_{i+1}$	m_i
1	-2-2	5
2	2-6	25
3	6-10	40
4	10-14	12
5	14-16	18

в)

i	$x_i < X < x_{i+1}$	m_i
1	60-65	30
2	65-70	20
3	70-75	25
4	75-80	25

10 тақырып Үлестірім параметрлерін статистикалық бағалау

Мақсат: Үлестірімнің белгісіз параметрлерін таңдаманың сипаттамалары арқылы бағалау ұғымын енгізу.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. Параметрлердің статистикалық бағалары және оларға қойылатын талаптар.
2. Таңдаманың сандық сипаттамалары және оларды есептеу әдістері.
3. Үлестірім параметрлерінің нүктелік және интервалдық бағалары.

Таңдамадағы сандық белгінің мәндерін $x_1, x_2, \dots, x_k$ тәуелсіз кездейсоқ шамалар деп қарастыруға болады. Олай болса теориялық үлестірімнің белгісіз параметрінің статистикалық бағасын табу дегеніміз - ізделінген параметрдің жуық мәнін беретін бақыланған кездейсоқ шамалардың функциясын іздеу болып табылады.

Теориялық үлестірімнің белгісіз параметрінің **статистикалық бағасы** деп бақыланған кездейсоқ шамалардың функциясы аталады.

Статистикалық бағалар бағаланатын параметрлердің «жақсы» жуықтауларын беруі үшін олар нақты талаптарды қанағаттандыруы қажет.

Теориялық үлестірімнің белгісіз θ параметрінің статистикалық бағасы θ^* болсын. Оған қойылатын талаптар: жылжымағандық, тиімділік және орнықтылық.

Таңдаманың кез келген көлемінде математикалық үміті бағаланатын параметрге θ тең болатын статистикалық баға θ^* **жылжымаған** деп аталады, яғни $M(\theta^*) = \theta$.

Математикалық үміті бағаланатын параметрге θ тең болмайтын статистикалық баға θ^* **жылжыған** деп аталады, яғни $M(\theta^*) \neq \theta$.

Дисперсиясы ең кіші болатын (таңдама көлемі n болғанда) статистикалық баға **тиімді** деп аталады.

$n \rightarrow \infty$ ұмтылғанда ықтималдығы бойынша бағаланатын параметрге ұмтылатын статистикалық баға орнықты деп аталады: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = 1$.

Енді сандық сипаттамалардың бағаларының түрлерін қарастыралық. Бас жиын X сандық белгіге қарағанда зерттелсін.

Бас жиындағы белгі мәндерінің арифметикалық ортасы **бас орташа** $\bar{x}_r$ деп аталады: $\bar{x}_r = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$.

Таңдамадағы белгі мәндерінің арифметикалық ортасы **таңдамалық орташа** $\bar{x}_T$ деп аталады: $\bar{x}_T = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Егер таңдамадағы белгі мәндерінің жиіліктері сәйкес $n_1, n_2, \dots, n_k$ болса, онда соңғы формуланы мына түрде жазуға болады:

$$\bar{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n}.$$

Таңдамалық орташа бас жиынның жылжымаған бағасы болады.

X сандық белгі мәндерінің өз орта мәнінен ауытқуын сипаттайтын шамаларды қарастырамыз.

Бас дисперсия D_T деп бас жиындағы белгі мәндерінің өз орта мәнінен $\bar{x}_T$ ауытқуларының квадраттарының арифметикалық ортасы аталады:

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_T)^2}{N}$$

Таңдамалық дисперсия D_T деп белгінің бақыланған мәндерінің өз орташа мәнінен $\bar{x}_T$ ауытқуларының квадраттарының арифметикалық ортасы аталады:

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_T)^2}{n}.$$

Егер белгі мәндерінің $x_1, x_2, \dots, x_k$ сәйкес жиіліктері $n_1, n_2, \dots, n_k$ болса, онда соңғы формуланы мына түрде жазуға болады:

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n}.$$

Таңдамалық дисперсия бас дисперсияның жылжыған бағасы болады. Бас дисперсияның жылжымаған бағасы түзетілген таңдамалық дисперсия болады:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_e$$

Таңдамалық квадраттық ауытқу деп таңдамалық дисперсияның квадрат түбірі аталады: $\sigma_T = \sqrt{D_T}$.

Нүктелік деп бір санмен анықталатын баға аталады. Жоғарыда қарастырылған бағалардың бәрі нүктелік баға болып табылады.

Интервалдық баға деп белгісіз параметрдің екі санмен - бағаланатын параметрді жабатын интервалдың шеттерімен анықталатын баға аталады.

Таңдама бойынша табылған статистикалық сипаттама θ^* белгісіз θ параметрінің бағасы болсын. Сонда θ^* бағасы θ параметрін дәлірек анықтаған сайын $|\theta - \theta^*|$ шамасы кіші болады. Басқаша айтқанда, егер $\delta > 0$ және $|\theta - \theta^*| < \delta$ болса, онда δ кішірек болғанда баға дәлірек болады. Сонымен δ оң саны бағаның дәлдігін сипаттайды. Сонда $P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \gamma$ ықтималдығы **сенімділік ықтималдығы** болады. θ параметрінің θ^* бағасы бойынша сенімділігі деп теңсіздігінің орындалу ықтималдығы γ аталады.

$|\theta - \theta^*| < \delta$ теңсіздігін мына түрде жазуға болады: $-\delta < \theta - \theta^* < \delta$. Бұдан $\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$. Сонда жоғарыдағы сенімділік ықтималдығын былай жазуға болады: $P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma$. Бұл $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ интервалы белгісіз θ параметрді γ ықтималдықпен қамтитынын көрсетеді.

Сенімділік интервалы деп берілген γ сенімділікпен белгісіз параметрді жабатын интервал аталады.

Қалыпты үлестірімнің орта квадраттық ауытқуы σ белгісіз болғанда ***a*** математикалық үмітінің сенімділік интервалы

$$\bar{x}_T - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ мұнда } t - \text{Лаплас функциясының } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

аргументі, онда $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Мысал 1. Тандаманың берілген үлестірімі бойынша таңдама орташасын тап:

x_i	1450	1480	1490
n_i	3	5	2

Шешуі: Тандаманың мәндері үлкен болғандықтан шартты варианттарға көшеміз. Жалған нөл ретінде $C=1470$ мәнін аламыз және $u_i = x_i - 1470$ формуласы бойынша u_i мәндерін есептейміз:

u_i	-20	10	20
n_i	3	5	2

Тандаманың шартты орташасын анықтаймыз: $\bar{u}_T = 3$.

Осыдан кейін таңдама орташасын $\bar{x}_T = 1470 + 3 = 1473$ табамыз.

Мысал 2. Берілген таңдама үлестірімі бойынша X кездейсоқ шамасының дисперсиясының жылжымайтын бағасын тап:

x_i	2	7	9	10
n_i	8	14	10	18

Шешуі: Таңдама орташасын табамыз:

$$\bar{x}_T = \frac{8 \cdot 2 + 14 \cdot 7 + 10 \cdot 9 + 18 \cdot 10}{50} = 7,68.$$

Таңдамалық дисперсияны есептеу үшін $D_T = \overline{x^2} - (\bar{x}_T)^2$ формуласын қолданамыз:

$$\overline{x^2} = \frac{8 \cdot 4 + 14 \cdot 49 + 10 \cdot 81 + 18 \cdot 100}{50} = 66,56, \quad D_T = 66,56 - 7,68^2 = 7,58.$$

Дисперсияның жылжымайтын бағасын табамыз:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_T = 50 \cdot 7,58 / 49 = 7,73.$$

Мысал 3. Кәсіпорында белгілі бір өнім өндіріледі. Осы өнімнің ай сайын шығарылу көлемі кездейсоқ шама болып табылады. Оның сипаттамасы ретінде мына көрсеткіштік үлестірім заңы қабылданған

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

Алты ай бойы шығарылған өнім көлеміне өлшеу жүргізілді, одан мына мәліметтер алынды:

Ай	1	2	3	4	5	6
Шығарылу көлемі	20	24	25	28	27	32

λ параметрінің бағасын тап.

Шешуі: Үлестірім заңы тек бір λ параметрін қамтиды, онда оны бағалау үшін бір теңдеу құру керек.

Таңдамалық орташаны табамыз:

$$\bar{x}_T = (20 + 24 + 25 + 28 + 27 + 32) / 6 = 26$$

Математикалық үмітін анықтаймыз:

$$M(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

Бөлшектеп интегралдасақ мынаны аламыз:

$$M(X) = 1/\lambda, \text{ бұдан } 1/\lambda = \bar{x}_T.$$

Осы теңдеуден λ -нің дәл мәні емес, оның λ^* бағасын аламыз:

$$1/\lambda^* = \bar{x}_T.$$

Сонымен, $1/\lambda^* = 26$, бұдан $\lambda^* = 1/26$.

Мысал 4. Егер орташа квадраттық ауытқуы $\sigma_x = 4$, таңдамалық орташасы $\bar{x}_T = 16$ және таңдама көлемі $n=16$ болса, онда қалыпты үлестірімді X кездейсоқ шамасының математикалық үмітін 0,95 сенімділікпен бағалау үшін сенімділік интервалын тап.

Шешуі: $\gamma=0,95$ сенімділігі бойынша $\Phi(z) = \gamma/2$ қатынасынан Лаплас функциясының мәнін табамыз: $\Phi(z) = 0,475$. Лаплас функциясының мәндерінің кестесінен $z=1,96$ болатынын табамыз. Математикалық үміттің интервалын бағалайтын теңсіздікті қолданамыз:

$$16 - 1,96 \cdot 4/4 < M(X) < 16 + 1,96 \cdot 4/4 \quad \text{немесе} \quad 14,04 < M(X) < 17,96.$$

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Белгісіз параметрдің статистикалық бағасы деп не аталады?
2. Статистикалық бағаларға қандай талаптар қойылады?
3. Қандай баға жылжымаған деп аталады?

4. Қандай баға тиімді деп аталады?
5. Қандай баға орнықты деп аталады?
6. Бас және таңдамалық орташалардың анықтамасын бер. Олар қалай есептеледі?
7. Бас және таңдамалық дисперсиялар қалай есептеледі?
8. Жылжымаған таңдамалық дисперсия қалай анықталады?
9. Қандай бағалар нүктелік деп аталады?
10. Қандай бағалар интервалдық деп аталады?
11. Сенімділік интервалы деп не аталады?
12. Қалыпты үлестірімнің математикалық үмітінің α сенімділік интервалы қалай анықталады?

Жаттығулар:

1. Бас жиынтықтан таңдама алынды

x_i	1	3	7	12
n_i	8	16	6	10

Таңдамалық орташаны тап.

2. Бас жиынтықтан таңдама алынды

x_i	-8	-2	1	5
n_i	13	11	14	12

Таңдамалық орташаны тап.

3. Таңдаманың берілген үлестірімі бойынша таңдама орташасын тап:

x_i	1450	1480	1490
n_i	3	5	2

4. Таңдаманың берілген үлестірімі бойынша таңдама орташасын тап:

а)

x_i	3140	3150	3180
n_i	12	6	12

б)

x_i	2430	2460	2500
n_i	24	14	12

5. Берілген таңдама үлестірімі бойынша X кездейсоқ шамасының дисперсиясының жылжымайтын бағасын тап:

x_i	2	7	9	10
n_i	8	14	10	18

6. Берілген таңдама үлестірімі бойынша X кездейсоқ шамасының дисперсиясының жылжымайтын бағасын тап:

x_i	1	5	6	8
n_i	6	4	7	3

7. Таңдаманың берілген үлестірімі бойынша таңдамалық дисперсияны тап:

x_i	0,02	0,05	0,08
n_i	3	2	5

8. Таңдаманың берілген үлестірімі бойынша таңдамалық дисперсияны тап:

x_i	0,002	0,005	0,006
n_i	9	6	5

9. Дүкенде аяқ киім сатудан түскен табыс айлар бойынша сәйкес мына мәндерді құрады (млн.тенге):

Ай	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	0,2	0,5	0,4	0,2	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4	0,5	0,4	0,2

Таңдамалық орташаны және таңдамалық дисперсияны тап.

11-тақырып Статистикалық болжамдарды тексеру

Мақсат: Статистикалық болжам, статистикалық критерий және кризистік аймақ ұғымдарын енгізу, олардың түрлерін қарастыру. Статистикалық болжамды тексеруге үйрету.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. Статистикалық болжам ұғымы және оның түрлері.
2. Статистикалық критерий және кризистік аймақ.
3. χ^2 критерийі және оны үлестірім заңы туралы болжамды тексеруге қолдану.

Бас жиынның үлестірім заңын білу қажет болсын. Егер ол белгісіз болса, онда ол A заңмен үлестірімді деп болжам жасайды. Егер үлестірім заңы белгілі болып оның параметрлері белгісіз болса, онда параметр туралы болжам жасалады. Мысалы, белгісіз θ параметрі белгілі бір θ_0 мәніне тең болуы мүмкін болса, онда $\theta = \theta_0$ деп болжам жасайды.

Белгісіз үлестірім түрі туралы немесе үлестірімнің белгісіз параметрі туралы болжам *статистикалық болжам* деп аталады.

Мысал. Бас жиын Пуассон заңы бойынша үлестірімді. Екі қалыпты үлестірімді жиындардың дисперсиялары тең.

Ұсынылған H_0 болжам *нольдік болжам* деп аталады. Нольдік болжамға қарама-қарсы H_1 болжамы *бақталастық* (альтернативті) болжам деп аталады. Бір болжаудан тұратын болжам жай болжам деп аталады. Бірнеше болжаудан тұратын болжам күрделі болжам деп аталады. Болжам дұрыс та қате де болуы мүмкін. Сондықтан оны тексеру қажет. Тексеру статистикалық әдіспен

жүргізілетіндіктен ол статистикалық деп аталады. Статистикалық болжамды тексеру барысында екі түрлі қате кетуі мүмкін:

1. дұрыс болжам жоққа шығарылды;
2. дұрыс емес болжам қабылданды.

Бірінші түрдегі қате жіберу ықтималдығы маңыздылық деңгейі деп аталады және α деп белгіленеді.

Нольдік болжамды тексеру үшін әдейі таңдалған үлестірімі белгілі кездейсоқ шама пайдаланылады. Егер ол қалыпты үлестірімді болса U немесе Z , Фишер-Снедекор заңымен үлестірімді болса F немесе ν^2 , Стюдент заңымен үлестірімді болса T , «хи-квадрат» заңымен үлестірімді болса χ^2 деп белгіленеді, ал жалпы түрде үлестірім K деп белгіленеді.

Нольдік болжамды тексеруге қолданылатын K кездейсоқ шама *статистикалық критерий* деп аталады. Болжамды тексеру үшін критерийге кіретін шамаларды таңдама бойынша есептейміз. Ол критерийдің бақыланған мәні деп аталады. Критерийдің таңдама бойынша есептелген мәні *бақыланған мән* деп аталады және $K_{\text{бак}}$ деп белгіленеді.

Белгілі бір критерий таңдалған соң оның мүмкін мәндерінің жиыны екі беттеспейтін ішкі жиынға бөлінеді: оның біреуінде критерийдің нольдік болжам қабылданбайтын мәндері, ал екіншісінде нольдік болжам қабылданатын мәндері жатады.

Критерийдің нольдік болжамды жоққа шығаратын мәндерінің жиыны *кризистік аймақ* деп аталады. Критерийдің нольдік болжамды қабылдайтын мәндерінің жиыны *болжамды қабылдау аймағы* деп аталады.

Статистикалық болжамды тексерудің негізгі принципі: егер критерийдің бақыланған мәні кризистік аймақта жатса, онда болжам қабылданбайды; егер критерийдің бақыланған мәні болжамды қабылдау аймағында жатса, онда болжам қабылданады.

Кризистік аймақты болжамды қабылдау аймағынан бөлетін нүкте кризистік нүкте деп аталады және $k_{\text{кр}}$ деп белгіленеді. Кризистік аймақтар бір жақты (оң немесе сол) және екі жақты болып екіге бөлінеді. $K > k_{\text{кр}}$ ($k_{\text{кр}} > 0$) теңсіздігімен анықталатын аймақ оңжақты деп аталады. $K < k_{\text{кр}}$ ($k_{\text{кр}} < 0$) теңсіздігімен анықталатын аймақ солжақты деп аталады. $K < k_1$ және $K > k_2$ ($k_2 > k_1$) теңсіздіктерімен анықталатын аймақ екі жақты деп аталады.

Кризистік аймақты табу үшін өте аз ықтималдықты маңыздылық деңгейін α қолданады. Оң жақты кризистік аймақты табу үшін кризистік нүктені табу жеткілікті. Кризистік нүктені $k_{\text{кр}}$ нольдік болжам дұрыс болғанда K критерийдің $k_{\text{кр}}$ –ден үлкен болу ықтималдығы маңыздылық деңгейіне тең болатындай $P(K > k_{\text{кр}}) = \alpha$ етіп іздейді. Әр критерий үшін осы талапты қанағаттандыратын нүктелердің кестесі бар.

Кризистік нүкте табылған соң таңдама бойынша критерийдің бақыланған мәнін іздейді. Егер $K_{\text{бак}} > k_{\text{кр}}$ болса, онда нольдік болжамды жоққа шығарады; егер $K_{\text{бак}} < k_{\text{кр}}$ болса, онда нольдік болжамды теріске шығаруға негіз жоқ. Сол жақты кризистік аймақты табу үшін нольдік болжам ақиқат болса, онда $P(K < k_{\text{кр}}) = \alpha$ талабы орындалатындай кризистік нүктені табады. Екі жақты кризистік аймақты

нольдік болжам дұрыс болғанда $P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha$ талабы орындалатындай етіп іздейді. Егер үлестірім нольге қарағанда симметриялы болса, онда кризистік нүктелерді нольге қарағанда симметриялы $-k_{кр}$ және $k_{кр}$ етіп таңдайды. Сонда $P(K < -k_{кр}) = P(K > k_{кр})$. Егер жоғарыдағы талапты ескерсек $P(K > k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}$. Осы қатынас екі жақты кризистік аймақты іздеуге қолданылады.

Егер үлестірім заңы белгісіз болса, онда «бас жиын A заңы бойынша үлестірімді» деген нольдік болжамды келісім критерийі арқылы тексереді. Белгісіз үлестірім заңы туралы болжамды тексеру критерийі *келісім критерийі* деп аталады. Оның бірнеше түрі бар: χ^2 , Пирсон критерийі, Колмагоров критерийі, Смирнов критерийі т.с.с.

Бас жиын қалыпты үлестірімді деген болжамды тексеруге Пирсонның критерийін қолдануды қарастырамыз. Ол үшін эмпирикалық (бақыланған) және теориялық жиіліктерді салыстырамыз.

Көлемі n болатын таңдама бойынша эмпирикалық үлестірім алынған болсын:

варианттар	x_i	x_1	x_2	...	x_k
эмпирикалық жиіліктер	n_i	n_1	n_2		n_k

Бас жиын қалыпты үлестірімді деп жорып теориялық жиіліктер n'_i есептелген болсын. Маңыздылық деңгейі α болғанда бас жиын қалыпты үлестірімді деген болжамды тексеру қажет болсын. Нольдік болжамды тексеру критерийі ретінде $\chi^2 = \frac{\sum (n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ алынады. Еркіндік дәрежесі саны $k=s-1$ -г

теңдігінен табылады. Мұнда s - таңдамадағы топтар саны, r – үлестірім параметрлерінің саны. Нольдік болжам дұрыс болса, онда критерийдің ол облысқа түсу ықтималдығы берілген α маңыздылық деңгейіне тең болатын оң жақты кризистік облыс $P[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha; k)] = \alpha$ құрамыз. $\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha; k)$ кризистік аймақ, $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha; k)$ болжам қабылдау аймағы. Бақылау мәліметтері бойынша есептелген критерийдің мәнін $\chi^2_{бак}$ деп белгілейміз.

Ереже: Берілген маңыздылық деңгейінде бас жиын қалыпты үлестірімді деген нольдік болжамды H_0 тексеру үшін теориялық жиіліктерді есептеу қажет, содан соң критерийдің бақыланған мәнін $\chi^2_{бак} = \frac{\sum (n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ есептейді. Кестеден кризистік нүктені $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$ табамыз. Егер $\chi^2_{бак} < \chi^2_{кр}(\alpha; k)$ болса, онда нольдік болжамды теріске шығаруға негіз жоқ. Егер $\chi^2_{бак} > \chi^2_{кр}(\alpha; k)$ болса, онда нольдік болжам теріске шығарылады.

Мысал 1. Эмпирикалық және теориялық жиіліктер берілген:

Эмпирикалық жиіліктер	5	13	39	75	105	83	32	14
Теориялық жиіліктер	3	15	41	80	101	77	38	13

Берілген $\alpha = 0,05$ маңыздылық деңгейінде бас жиын қалыпты үлестірімді деген болжамды тексер.

Шешуі: Критерийдің бақыланатын мәнін анықтау үшін төмендегі кестені құрамыз:

s_i	n_i	n_i^0	$n_i - n_i^0$	$(n_i - n_i^0)^2$	$(n_i - n_i^0)^2 / n_i^0$
1	5	3	2	4	1,333
2	13	15	-2	4	0,267
3	39	41	-2	4	0,097
4	75	80	-2	25	0,3125
5	105	101	4	16	0,158
6	83	77	6	36	0,468
7	32	38	-6	36	0,947
8	14	13	1	1	0,077
					$\sum \approx 3,66$

Сонымен $\chi_{\text{бак}}^2 = 3,66$, ал критерийдің еркіндік дәрежесі $k = s-1-r = 5$, себебі $s = 8$, $r = 2$ (қалыпты үлестірім екі параметр арқылы анықталады). Онда кестеден $\chi_{\text{сын}}^2(0,05; 5) = 11,1$. Сонымен $\chi_{\text{бак}}^2 < \chi_{\text{сын}}^2$. Ендеше нольдік болжамды жоққа шығаруға негіз жоқ.

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Статистикалық болжам дегеніміз не?
2. Статистикалық болжамның қандай түрлері болады?
3. Статистикалық болжамды тексерудің негізгі принципі қандай?
4. Статистикалық критерий және кризистік аймақ дегеніміз не?
5. Үлестірім заңы туралы болжамды тексеруге χ^2 критерийі қалай қолданылады?

Жаттығулар

1. Кәсіпорында белгілі бір өнім өндіріледі. Осы өнімнің ай сайын шығарылу көлемі кездейсоқ шама болып табылады. Оның сипаттамасы ретінде мына көрсеткіштік үлестірім заңы қабылданған

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

Алты ай бойы шығарылған өнім көлеміне өлшеу жүргізілді, одан мына мәліметтер алынды:

Ай	1	2	3	4	5	6
Шығарылу көлемі	20	24	25	28	27	32

λ параметрінің бағасын тап.

Шешуі: Үлестірім заңы тек бір λ параметрін қамтиды, онда оны бағалау үшін бір теңдеу құру керек.

Таңдамалық орташаны табамыз:

$$\bar{x}_T = (20 + 24 + 25 + 28 + 27 + 32) / 6 = 26$$

Математикалық үмітін анықтаймыз:

$$M(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx$$

Бөлшектеп интегралдасақ мынаны аламыз:

$$M(X) = 1/\lambda,$$

бұдан $1/\lambda = \bar{x}_T$.

теңдігі жуық болады, себебі оның оң жағы кездейсоқ шама.

Сонымен, теңдеуінде λ -нің дәл мәні емес, оның λ^* бағасын аламыз:

$$1/\lambda^* = \bar{x}_T.$$

Сонымен, $1/\lambda^* = 26$, бұдан $\lambda^* = 1/26$.

2. X кездейсоқ шамасы көрсеткіштік үлестірімді болғанда

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0 \\ 0 & \text{егер } x < 0 \end{cases}$$

одан таңдама алынды.

x_i	4	3	10	12	15
n_i	3	3	6	4	4

λ параметрінің бағасын тап.

3. X кездейсоқ шамасы бірқалыпты үлестірімді болғанда

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{егер } x \in (a, b), \\ 0, & \text{егер } x \notin (a, b). \end{cases}$$

одан таңдама алынды

x_i	2	3	4	5	6
n_i	4	6	5	12	8

a және b параметрлерінің бағасын тап.

4. X кездейсоқ шамасы бірқалыпты үлестірімді болғанда одан таңдама алынды

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

a және b параметрлерінің бағасын тап.

5. X кездейсоқ шамасы үлестірім функциясымен берілген $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$). Таңдама алынды.

x_i	3	5	6	8	10
n_i	2	3	5	10	10

λ параметрінің бағасын тап.

6. Кездейсоқ шама қалыпты үлестірім заңына бағынады

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$$

$\sigma = \sqrt{D(X)}$, $a = M(X)$ болатыны белгілі. Таңдама алынды

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	6	9	16	25	20	16	8

a параметрінің бағасын және σ параметрінің жылжымайтын бағасын тап.

7. X кездейсоқ шамасы биномдық заң бойынша үлестірімді. Таңдаманың статистикалық үлестірімі кестеде келтірілген:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	3	10	22	26	20	12	5

Кездейсоқ шаманың ($r=10$) берілген үлестірім заңында p параметрінің нүктелік бағасын тап.

8. X кездейсоқ шамасы белгісіз λ параметрімен Пуассон заңы бойынша үлестірімді. Таңдаманың статистикалық үлестірімі кестеде келтірілген:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

λ параметрінің нүктелік бағасын тап.

9. Шыныдан жасалға біртекті бұйымдар 1000 контейнермен Мәскеуден Новосибирскіге жіберілді. Тауар келгеннен соң әр контейнердегі қираған бұйымдар саны анықталды. Нәтижесі кесте түрінде келтірілген

x_i	0	1	2	3	4
n_i	785	163	32	16	4

Қираған бұйымдар саны Пуассон заңы бойынша үлестірімді деп есептеп λ параметрінің нүктелік бағасын тап.

10. X кездейсоқ шамасы көрсеткіштік заң бойынша үлестірімді. Таңдаманың статистикалық үлестірімі кестеде келтірілген:

x_i	5	15	25	35	45	55	65
n_i	365	245	150	100	70	45	25

λ параметрінің нүктелік бағасын тап.

11. Егер орташа квадраттық ауытқуы $\sigma_x = 4$, таңдамалық орташасы $\bar{x}_T = 16$ және таңдама көлемі $n=16$ болса, онда қалыпты үлестірімді X кездейсоқ шамасының математикалық үмітін 0,95 сенімділікпен бағалау үшін сенімділік интервалын тап.

Шешуі: $\gamma=0,95$ сенімділігі бойынша $\Phi(z) = \gamma/2$ қатынасынан Лаплас функциясының мәнін табамыз: $\Phi(z) = 0,475$. Лаплас функциясының мәндерінің кестесінен $z=1,96$ болатынын табамыз. Математикалық үміттің интервалын бағалайтын теңсіздікті қолданамыз:

$$16 - 1,96 \cdot 4/4 < M(X) < 16 + 1,96 \cdot 4/4,$$

немесе

$$14,04 < M(X) < 17,96.$$

12. Егер орташа квадраттық ауытқуы $\sigma_x = 5$, таңдамалық орташасы $\bar{x}_T = 20$ және таңдама көлемі $n=25$ болса, онда қалыпты үлестірімді X кездейсоқ шамасының математикалық үмітін 0,8 сенімділікпен бағалау үшін сенімділік интервалын тап.

13. Қой өсіретін фермада табыннан 36 қойды өлшеу үшін таңдама алынды. Олардың орташа салмағы 50 кг болып шықты. Салмақ қалыпты үлестірімді деп есептеп және таңдамалық дисперсиясының жылжымаған бағасын анықтап $s^2 = 16$ математикалық үмітті а) 0,8; б) 0,9; в) 0,95 сенімділікпен бағалайтын сенімділік интервалын тап.

14. Бас жиынтықтан көлемі $n = 16$ таңдама алынды және оның таңдамалық орташасы 30 табылды. Сонымен қатар таңдамалық дисперсияның жылжымаған бағасы $s^2 = 9$ табылды. X кездейсоқ шамасы қалыпты үлестірімді деп есептеп оның математикалық үмітін а) 0,8; б) 0,9 сенімділікпен бағалайтын сенімділік интервалын тап.

15. Көлемі $n = 25$ таңдама бойынша қалыпты үлестірімді X кездейсоқ шамасының таңдамалық орташа квадраттық ауытқуының жылжымаған бағасы $s = 3$ табылды. Кездейсоқ шаманың орташа квадраттық ауытқуын 0,99 сенімділікпен бағалау үшін сенімділік интервалын тап.

Шешуі: Берілген $\gamma = 0,99$, $n = 20$ мәндер бойынша кесте бойынша $q = 0,49$ мәнін табамыз. Теңсіздікке қойсақ

$$\frac{3}{1 + 0,49} < \sigma_x < \frac{3}{1 - 0,49},$$

бұдан

$$2,01 < \sigma_x < 5,88.$$

16. 4.2.25 Көлемі $n=20$ таңдама бойынша қалыпты үлестірімді X кездейсоқ шамасының таңдамалық орташа квадраттық ауытқуының жылжымаған бағасы $s=2$ табылды. Кездейсоқ шаманың орташа квадраттық ауытқуын 0,95 сенімділікпен бағалау үшін сенімділік интервалын тап.

17. 4.2.26 Бірнеше шағын дүкендерде 100 бұйымның сапасы тексерілді, содан кейін алынған мәліметтер өңделді. Нәтижесінде таңдамалық орташа квадраттық ауытқудың жылжымаған мәні $s=4$ алынды. Сапалы бұйымдар қалыпты үлестірімді деп есептеп орташа квадраттық ауытқуды 0,95 сенімділікпен бағалайтын сенімділік интервалын тап.

18. X кездейсоқ шамасы қалыпты үлестірімді. Таңдаманың статистикалық үлестірімі кестеде келтірілген:

x_i	3	5	7	8	10	12	14
n_i	3	7	4	6	7	5	8

Математикалық үмітті 0,97 сенімділікпен, ал орташа квадраттық ауытқуды 0,95 сенімділікпен бағалайтын сенімділік интервалдарын тап.

19. X кездейсоқ шамасы қалыпты үлестірімді. Таңдаманың статистикалық үлестірімі кестеде келтірілген:

x_i	1	3	5	7	9
n_i	2	5	4	6	3

Математикалық үмітті 0,95 сенімділікпен, ал орташа квадраттық ауытқуды 0,99 сенімділікпен бағалайтын сенімділік интервалдарын тап.

12-тақырып Таңдаманың регрессиялық теңдеуі

Мақсат: Анықталмағандық жағдайында студенттерді кездейсоқ шамалардың арасындағы тәуелділіктердің формаларымен таныстыру және осы шамалар арасындағы байланыстың күшін бағалауға үйрету. Студенттерді сызықты регрессияның таңдамалық теңдеуін құруға және корреляция коэффициентін табуға үйрету.

Қарастырылатын сұрақтар тізімі:

1. Кездейсоқ шамалар арасындағы тәуелділіктердің формасын анықтау.
2. Регрессияның таңдамалық теңдеуі.
3. Түзу сызықтың орта квадраттық регрессиясының таңдамалық теңдеуі.
4. Корреляциялық кесте.
5. Корреляция коэффициенті.

Екі кездейсоқ шаманың X және Y жүйесін қарастыралық, оның біреуі X тәуелсіз (факторлық белгі), ал екіншісі – Y тәуелді (қорытындылық белгі).

Екі кездейсоқ шама функциональды немесе статистикалық тәуелділікпен байланысты немесе тәуелсіз болуы мүмкін. Функциональдық тәуелділік сирек іске асады, себебі қарастырылатын кездейсоқ шамаларға басқа кездейсоқ факторлардың әсері болуы мүмкін. Сондықтан статистикалық тәуелділік жиірек болады.

Анықтама Бір шаманың өзгерісі екінші шаманың үлестірімін өзгертетін тәуелділік *статистикалық* деп аталады.

Анықтама Бір шаманың өзгерісі екіншінің орта шамасын өзгертетін статистикалық тәуелділік *корреляциялық* деп аталады.

Мысал. X - 1 га жерге салынған тыңайтқыш мөлшері; ал Y –бидай өнімі болсын. Аудандары бірдей жерлерге бірдей мөлшерде тыңайтқыш салғанда бидай өнімін түрліше алынады, яғни Y X -тің функциясы болмайды. Бірақ бидайдың орташа өнімі тыңайтқыш мөлшерін көбейткенде артады, яғни бидай өнімінің орташа шамасы X -тің функциясы болады.

Екі тәуелді шамалар жүйесінің маңызды статистикалық сипаттамасы шартты орташа болады.

Анықтама. Шартты орташа $\overline{y_x}$ деп $X = x$ мәніне сәйкес Y шамасының бақыланған мәндерінің арифметикалық орта мәні аталады.

Осы сияқты $\overline{x_y}$ шартты орташасы деп $Y = y$ мәніне сәйкес X шамасының бақыланған мәндерінің арифметикалық орта мәні аталады.

$\overline{y_x}$ шартты орташасы X шамасының бақыланған мәндерінен тәуелді, яғни $\overline{y_x}$ x -тің функциясы. Оны $f(x)$ деп белгілесек мына теңдеуді аламыз:

$$\overline{y_x} = f(x) \quad (1)$$

Анықтама. $\overline{y_x} = f(x)$ түріндегі теңдеу Y -тің X -ке регрессиясының таңдамалық теңдеуі деп аталады, ал $f(x)$ функциясы Y -тің X -ке регрессиясының таңдамалық функциясы деп аталады.

Регрессияның таңдамалық функциясының графигі регрессияның таңдамалық сызығы деп аталады.

Регрессияның сызықтық функциясын қарастыралық.

Сандық белгілердің жүйесі (X, Y) зерттелсін, мұнда X –факторлық белгі (тәуелсіз кездейсоқ шама), Y – қорытындылық белгі (тәуелді кездейсоқ шама). n тәуелсіз тәжірибелер нәтижесінде n сандар жұбы $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ алынды. Y -тің X -ке регрессиясының теңдеуін $\overline{y_x} = kx + b$ түрінде іздейміз. Y -тің X -ке түзу сызықты регрессиясының бұрыштық коэффициенті Y -тің X -ке регрессиясының таңдамалық коэффициенті деп аталады және ρ_{yx} деп белгіленеді. Сонымен Y -тің X -ке түзу сызықты регрессиясының таңдамалық теңдеуі мына түрде болады:

$$\overline{y_x} = \rho_{yx} x + b \quad (2)$$

Теңдеудің ρ_{yx} және b параметрлерін «ең кіші квадраттар принципін» қолданып табамыз, оның мағынасы мынада: (2) теңдеу бойынша табылған Y

шамасының $\overline{y_i}$ мәндерінің бақыланған y_i мәндерінен ауытқуының квадратының қосындысы ең аз (минимум) болуы қажет. Соның қорытындысында мыналарды аламыз:

$$\rho = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \quad b = \frac{\overline{x^2 y} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \quad \text{мұнда}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n},$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \quad \text{және} \quad \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} \quad - \quad \text{орташа мәндер.}$$

Осылайша X -тің Y -ке түзу сызықты регрессиясының таңдамалық теңдеуін табуға болады:

$$\overline{x_y} = \rho_{xy} x + C$$

Бақылау саны көп болғанда X -тің немесе Y -тің бірдей мәндері және (x, y) мәндерінің жұбы бірнеше рет бақылануы мүмкін. x мәні n_x рет, y мәні n_y рет, ал (x, y) жұбы n_{xy} рет бақылансын. Мұндай жағдайда бақылау мәліметтерін топтайды және кесте түрінде жазады да оны корреляциялық деп атайды.

X және Y кездейсоқ шамаларының арасындағы байланыс тығыздығын корреляциялық момент және корреляция коэффициенті көмегімен сипаттайды.

Анықтама. X және Y екі кездейсоқ шамасының *корреляциялық моменті* μ_{xy} деп осы шамалардың өз математикалық үміттерінен ауытқуларының көбейтіндісінің математикалық үміті аталады.

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(Y)][Y - M(Y)]\}$$

Анықтама. X және Y екі кездейсоқ шамасының *корреляциялық коэффициенті* r_{xy} деп корреляциялық моменттің осы шамалардың орта квадраттық ауытқуларының көбейтіндісіне қатынасы аталады.

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Корреляция коэффициентінің шамасы кездейсоқ шамалардың өлшем бірліктерін таңдаудан тәуелсіз.

Корреляция коэффициентінің абсолют шамасы бірден артпайтынын көрсетуге болады:

$$|r_{xy}| \leq 1$$

Егер $r_{xy} = 0$ болса, онда X және Y кездейсоқ шамалары тәуелсіз болады.

Егер $|r_{xy}| = 1$ болса, онда олардың арасындағы байланыс функциональды.

r_{xy} коэффициентінің басқа мәндерінде байланыс корреляциялық болады.

Байланыс тығыздығын сапалық бағалау үшін Чеддок шкаласы қолданылады:

r_{xy}	0,1 - 0,3	0,3 - 0,5	0,5 - 0,7	0,7 - 0,9	0,9 артық
Байланыс сипаттамасы	әлсіз	баяу	байқалғыш	жоғары	өте жоғары

X және Y белгілерін таңдамалық бақылау мәліметтері бойынша табылған корреляция коэффициенті таңдамалық корреляция коэффициенті r_T деп аталады.

X және Y арасындағы байланыс түзу сызықты болғанда таңдамалық корреляция коэффициенті мына формуламен анықталады:

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Мысал 1. Жұмысшылар саны бірдей болатын бес біртегісті фирмада ағымдық жұмыс күшінің және жалақының өзара әсер етуінің талдауы мақсатымен бір жылда Y жұмысшылар жұмыстан босатылған саны және X айлық жалақысының өлшемі өткізілді:

X	100	150	200	250	300
Y	60	35	20	20	15

Y -тің X -ке сызықты регрессиясын және корреляцияның таңдамалық коэффициентін тап.

Шешуі: Есептеу кестесін құрамыз:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	100	60	10000	6000	3600
2	150	35	22500	5250	1225
3	200	20	40000	4000	400
4	250	20	62500	5000	400
5	300	15	90000	4500	225
Σ	1000	150	225000	24750	5850

ρ және β параметрлерін анықтаймыз:

$$\rho = [(5 \cdot 24,75 - 150) \cdot 10^3] / (5 \cdot 22,5 \cdot 10^4 - 10^6) = -0,21;$$

$$\beta = (22,5 \cdot 10^4 \cdot 150 - 10^3 \cdot 24,75 \cdot 10^3) / (5 \cdot 22,5 \cdot 10^4 - 10^6) = 72.$$

Регрессияның таңдамалық теңдеуі мына түрде болады:

$$\bar{y}_x = -0,21x + 72$$

Есептеу кестесінен $\bar{x} = 1000 / 5 = 200$, $\bar{y} = 150 / 5 = 30$.

$$\mu_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n}$$

формуласы бойынша

$$\mu_{xy}^* = (24750 - 5 \cdot 200 \cdot 30) / 5 = -1050.$$

$$D_{xT} = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2, \quad D_{yT} = \bar{y}^2 - (\bar{y})^2 \quad \text{формулалары бойынша} \quad D_{xT} = \sigma_{xT}^2$$

$D_{yT} = \sigma_{yT}^2$ мәндерін табамыз:

$$D_{xT} = 22,5 \cdot 10^4 / 5 - 200^2 = 5000, \quad D_{yT} = 5850 / 5 - 30^2 = 270$$

Бұдан $D_{xT} \approx 70,7$, $D_{yT} \approx 16,4$. Сонда $r_T = \frac{-1050}{70,7 \cdot 16,4} = -0,91$ болады.

Мысал 2. 50 бір типтес кәсіпорындар үшін тәуліктік өнім шығарылымының Y (тонна) негізгі өндірістік қорлардан X (млн.теңге) тәуелділігін қарастырайық.

$Y \backslash X$	9	10	13	15	n_i
10	8	10		18	
12	5	5	13	20	
20			7	5	12
n_i	15	15	20	5	$n=50$

Y пен X арасында сызықты корреляциялық байланыс бар деп жорамалдап, таңдамалық регрессия теңдеулерін құрыңыз.

Шешуі: барлық шамаларды анықтаймыз.

$$\bar{x} = \frac{9 \cdot 10 + 10 \cdot 15 + 13 \cdot 20 + 15 \cdot 5}{50} = 11,5$$

$$\bar{y} = \frac{10 \cdot 18 + 12 \cdot 20 + 20 \cdot 12}{50} = 13,2$$

$$x\bar{y} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 18 + 9 \cdot 12 \cdot 2 + 10 \cdot 10 \cdot 10 + 10 \cdot 12 \cdot 5 + 13 \cdot 12 \cdot 13 + 13 \cdot 20 \cdot 7 + 15 \cdot 20 \cdot 5}{50} = 157,68$$

$$\sigma_x^2 = \frac{81 \cdot 10 + 100 \cdot 15 + 169 \cdot 20 + 225 \cdot 5}{50} - (11,5)^2 = 16,05$$

$$\sigma_y^2 = \frac{100 \cdot 18 + 144 \cdot 20 + 400 \cdot 12}{50} - (13,2)^2 = 15,36$$

$$b_{yx} = \frac{157,68 - 11,5 \cdot 13,2}{16,05} = 0,366$$

$$b_{xy} = \frac{157,68 - 11,5 \cdot 13,2}{15,36} = 0,382$$

$$r_T = 0,366 \cdot \frac{\sqrt{16,05}}{\sqrt{15,36}} = 0,374$$

Осы табылған мәндерді 62 беттегі 4 және 5 теңдеулерге қойсақ мына регрессия теңдеулерін аламыз

$$\bar{y}_x = 0,366x + 9$$

$$\bar{x}_y = 0,382y + 6,41$$

Осы теңдеулерден мынаны байқаймыз: Егер негізгі өндіріс қорларын 1 млн. теңгеге арттырсақ, онда тәуліктік өнім шығарылымы орта есеппен 0,366 тоннаға өседі, ал тәуліктік өнім шығарылымын 1 тоннаға өсіру үшін негізгі өндіріс қорларын орта есеппен 0,382 млн. теңгеге арттыру керек.

Сонымен, X және Y шамалары арасында сызықты корреляциялық байланыс бар дейміз, бұл байланыстың қаншалықты тығыз екендігін r_T анықтайды.

Мысал 3. Корреляция кестесінің негізінде, X -тің Y -ке сызықты регрессиясының таңдамалық теңдеуін тап.

$x_i \backslash y_j$	15	20	25	30	35	40
100	2	1	-	7	-	-
120	4	-	2	-	-	3
140	-	5	-	10	5	2
160	-	-	3	1	2	3

Шешуі: Есептерді жеңілдету үшін шартты нұсқаларын енгізейік

$$u_i = (x_i - 30) / 5, \quad v_j = (y_j - 120) / 20$$

Шартты нұсқалары бар, жаңғыртылған корреляциялық кестесін құрып, оған n_{u_i} және n_{v_j} мәндерін енгіземіз.

$x_i \backslash y_j$	-3	-2	-1	0	1	2	n_{v_j}
-1	2	1	-	7	-	-	10
0	4	-	2	-	-	3	9
1	-	5	3	1	2	3	9
n_{u_i}	6	6	5	18	7	8	N=50

Содан, жаңа кесте құрамыз, оған толтырылған тордың оң жағының жоғарғы бұрышына $n_{ij}U_i$ және сол жағының төменгі бұрышына $n_{ij}V_j$ есептелген мәндерін енгіземіз, V_j мәнін алу үшін жолдар бойынша жоғарғы мәндерін және U_j мәнін алу үшін бағандар бойынша төменгі мәндерін қосамыз және

$n_i U_i$, $n_j V_j$ шамаларын есептейміз.

$u_i \backslash v_j$	-3	-2	-1	0	1	2	V_j	$n_j V_j$
-1	-6 2 -2	-2 1 -1	-	0 7 -7	-	-	-8	8
0	-12 4 0	-	-2 2 0	-	-	6 3 0	-8	0
1	-	-10 5 5	-	0 10 10	5 5 5	4 2 2	-1	-1
2	-	-	-3 3 6	0 1 2	2 2 4	6 3 6	5	10
U_j	-2	4	6	5	9	8	-	$\Sigma=17$
$n_i U_i$	6	-8	-6	0	9	16	$\Sigma=17$	-

$\sum_{i=1}^{k_1} u_i U_i$ және $\sum_{j=1}^{k_2} v_j V_j$ қосындыларын есептейік. Осы қосындылардың параллель есептелуі есептердің дұрыстығын бақылау үшін қоданылады. Берілген жағдайда

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_i U_i = \sum_{j=1}^{k_2} v_j V_j = 17$$

$\bar{u}$ және $\bar{v}$ табамыз:

$$\bar{u} = (-3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8) / 50 = -0,24;$$

$$\bar{v} = (-1 \cdot 10 + 1 \cdot 22 + 2 \cdot 9) / 50 = 0,6.$$

$\bar{u}^2$ және $\bar{v}^2$ табамыз:

$$\bar{u}^2 = (9 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 8) / 50 = 2,44;$$

$$\bar{v}^2 = (1 \cdot 10 + 1 \cdot 22 + 4 \cdot 9) / 50 = 1,36.$$

σ_u және σ_v анықтаймыз:

$$\sigma_u = \sqrt{\bar{u}^2 - (\bar{u})^2} = \sqrt{2,44 - (-0,24)^2} = 1,54;$$

$$\sigma_v = \sqrt{\bar{v}^2 - (\bar{v})^2} = \sqrt{1,36 - (0,6)^2} = 1.$$

r_B корреляцияның таңдамалық коэффициентін есептейміз:

$$r_B = (17 - 50 \cdot (-0,24) \cdot 0,6) / (50 \cdot 1,54 \cdot 1) = 0,314.$$

Бастапқы нұсқаларға көшейік:

$$\bar{x} = h_1 \bar{u} + C_1 = 5 \cdot (-0,24) + 30 = 28,8,$$

$$\bar{y} = h_2 \bar{u} + C_2 = 20 \cdot 0,6 + 120 = 132,$$

$$\sigma_{XB} = h_1 \sigma_u = 5 \cdot 1,54 = 7,7,$$

$$\sigma_{YB} = h_2 \sigma_v = 20 \cdot 1 = 20.$$

X-тің Y-ке регрессиясын табамыз:

$$\bar{x}_y - 28,8 = \frac{7,7 \cdot 0,314}{20} (y - 132) \text{ немесе } \bar{x}_2 = 0,12y + 12,8.$$

Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Екі шама арасындағы қандай тәуелділік статистикалық деп аталады?
2. Екі шама арасындағы қандай тәуелділік корреляциялық деп аталады?
3. Регрессия функциясы деп не аталады?
4. Регрессия теңдеуі деп не аталады?
5. Түзу сызықты регрессия теңдеуінің параметрлері қалай есептеледі?
6. Корреляциялық момент деп не аталады?
7. Корреляция коэффициенті деп не аталады?
8. Корреляция коэффициенті қандай мәндерді қабылдай алады?
9. Сызықты корреляция коэффициенті қалай есептеледі?
10. Таңдамалық сызықты регрессия теңдеуін жаз.

Жаттығулар

1. Жұмысшылар саны бірдей болатын бес біртекті фирмада ағымдық жұмыс күшінің және жалақының өзара әсер етуінің талдауы мақсатымен бір жылда Y жұмысшылар жұмыстан босатылған саны және X айлық жалақысының өлшемі өткізілді:

X	100	150	200	250	300
Y	60	35	20	20	15

Y-тің X-ке сызықты регрессиясын және корреляцияның таңдамалық коэффициентін тап.

Шешуі: Есептеу кестесін құрамыз:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	100	60	10000	6000	3600
2	150	35	22500	5250	1225
3	200	20	40000	4000	400
4	250	20	62500	5000	400
5	300	15	90000	4500	225
Σ	1000	150	225000	24750	5850

ρ және β анықтаймыз:

$$\rho = [(5 \cdot 24,75 - 150) \cdot 10^3] / (5 \cdot 22,5 \cdot 10^4 - 10^6) = -0,21;$$

$$\beta = (22,5 \cdot 10^4 \cdot 150 - 10^3 \cdot 24,75 \cdot 10^3) / (5 \cdot 22,5 \cdot 10^4 - 10^6) = 72.$$

Регрессия теңдігінің таңдамасы келесі түріне ие болады.

$$\bar{y}_x = -0,21x + 72$$

Демек, есептеу кестесінен

$$\bar{x} = 1000 / 5 = 200, \quad \bar{y} = 150 / 5 = 30.$$

формуласы $\mu_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n}$ бойынша

$$\mu_{xy}^* = (24750 - 5 \cdot 200 \cdot 30) / 5 = -1050$$

формулалары $d_x = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$, $d_y = \bar{y}^2 - (\bar{y})^2$ бойынша $d_x = \sigma_{xB}^2$
 $d_y = \sigma_{yB}^2$ мәндерін табамыз.

$$d_x = 22,5 \cdot 10^4 / 5 - 200^2 = 5000, \quad d_y = 5850 / 5 - 30^2 = 270$$

Бұдан $d_{xB} \approx 70,7$, $d_{yB} \approx 16,4$.

Осылайша,

$$r_B = \frac{-1050}{70,7 \cdot 16,4} = -0,91$$

2. X және Y шамаларының өлшеулері негізінде

X	4	6	8	10	12
Y	5	8	7	9	14

Y-тің X-ке сызықты регрессиясын және корреляциясының таңдамасын тап.

3. Төсек орын бұйымдар дүкенінде бес күн ішінде Y ақжайманың және X жастықтардың сатып алынған санына есептеу жүргізіледі:

X	10	20	25	28	30
Y	5	8	7	12	14

Y-тің X-ке сызықты регрессиясын және корреляциясының таңдамасын тап.

4. Берілгендер бойынша X-тің Y-ке регрессиясының теңдеуін тап.

$x_i \backslash y_j$	10	15	20	25	30	35
15	6	4	-	-	-	-
25	-	6	8	-	-	-
35	-	-	-	21	2	5
45	-	-	-	4	12	6
55	-	-	-	-	1	5

5. Берілгендер бойынша Y-тің X-ке регрессиясының теңдеуін тап.

$y_j \backslash x_i$	5	10	15	20	25	30
14	4	6	-	8	-	4
24	-	8	10	-	6	-
34	-	-	32	-	-	-
44	-	-	4	12	6	-

6. Берілгендер бойынша X-тің Y-ке регрессиясының теңдеуін тап.

$y_j \backslash x_i$	10	15	20	25	30	35	40
100	2	4	-	8	4	-	10
110	3	-	5	-	2	10	-
120	-	3	-	4	5	6	-
130	2	-	4	6	-	-	5
140	-	4	7	-	-	1	5

Тест жинағы

1. Екі мерген нысанаға оқ атты. A_i – « i -ші мерген нысанаға тиді», $i=1,2$.

$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ оқиғасын көрсет:

- А) нысанаға бірде-бір мерген тимеді;
- В) нысанаға бір мерген тиді;
- С) нысанаға екі мерген тиді;
- Д) нысанаға ең болмағанда бір мерген тиді;
- Е) нысанаға оқ тимеді.

2. Кесілетін азбука көмегімен құралған СОБЫТИЕ сөзінің әріптерінен кездейсоқ 3 карточка (әріп) алынып тізіліп қойылды. Сонда СЫТ сөзі шығу ықтималдығын тап.

- А) $\frac{3}{7}$; В) $\frac{1}{840}$; С) $\frac{1}{1680}$; Д) $\frac{1}{6}$; Е) $\frac{1}{210}$.

3. A оқиғасы пайда болуынан B оқиғасы да пайда болса, онда $A \dots$ деп аталады.

- А) B оқиғасына ілеспелі; В) B оқиғасымен үйлесімді;
- С) B оқиғасына қолайлы; Д) B оқиғасынан тәуелсіз; Е) B оқиғасынан тәуелді.

4. Бірінші автоматтан құрастыруға 50%, ал екіншіден 50% бөлшек түседі.

Бірінші автомат орташа алғанда 2 %, ал екінші - 3 % ақау бөлшек шығарады.

Құрастыруға түскен бөлшектің ақау болу ықтималдығын тап.

- А) 0,025; В) 0,029; С) 0,026; Д) 0,05; Е) 0,02.

5. $P_6 - P_4$ -ті тап.

6. Байес формуласын көрсет:

А) $P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A)}{P(A)}$;

В) $P_B(A) = \frac{P(B_i)P(A)}{P(B)}$;

С) $P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}$;

Д) $P_A(B) = \frac{P(A)P_{B_i}(B)}{P(A)}$; Е) $P(A) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}$

7. Фабрикада А машинасы 40 %, ал В машинасы – 60 % өнім шығарады. Орташа алғанда А машинасының 1000 өнімінен 8, ал В машинасының 250 өнімінен 4 өнім ақау болып шығады. Егер кездейсоқ алынған бір өнім ақау болып шықса, онда ол В машинасынан болу ықтималдығын тап.

- А) 0,25; В) 0,7; С) 0,0128; Д) 0,75; Е) 0,128

8. Лапласстың интегралдық формуласы мына түрде болады:

А) $P_n(k_1; k_2) = \varphi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \varphi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$;

В) $P_n(k_1; k_2) = \varphi\left(\frac{np - k_2}{\sqrt{npq}}\right) - \varphi\left(\frac{np - k_1}{\sqrt{npq}}\right)$;

$$C) P_n(k_1; k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right);$$

$$D) P_n(k_1; k_2) = \Phi\left(\frac{np - k_2}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{np - k_1}{\sqrt{npq}}\right);$$

$$E) P_n(k_1; k_2) = \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

9. Урнада 10 билет бар, оның 5 билетінде ұтыс бар. Урнадан қайтып салмай біртіндеп екі билет алды. Алынған билеттердің біреуінде ұтыс болу ықтималдығын тап.

A) 0,25; B) $\frac{2}{9}$; C) $\frac{5}{9}$; D) $\frac{7}{9}$; E) $\frac{17}{18}$.

10. Кәсіпкер өз қаржысын екі контрактке салды. Кез келген контракт «күймеу» ықтималдығы 0,6. Контракт мерзімі өткен соң бір контракт күймеу ықтималдығы қандай?

A) 0,36; B) 0,84; C) 0,16; D) 0,24; E) 0,48.

11. 20 жасқа толған адамның 21-ге қараған кезінде өлу ықтималдығы 0,01. Қауіпсіздендірілген 200 адамнан жыл ішінде 20-ға толған 2 адам өлу ықтималдығын (0,01 дейінгі дәлдікпен) тап.

12. Студенттің бірінші емтиханды тапсыру ықтималдығы 0,7, ал екіншісікі – 0,8. Студенттің екі емтихан тапсыру ықтималдығын тап.

A) 0,56; B) 0,24; C) 0,7; D) 0,14; E) 0,94.

13. Төменде берілген оқиғалар жұбының қайсысы үйлесімді болады?

A) ойын сүйегінің үстіңгі жағына жұп сан; тақ сан ұпай пайда болуы;

B) 1-ден 100-ге дейінгі сандардан кездейсоқ алынған натурал сан: 10-ға бөлінеді; 11-ге бөлінеді;

C) автомобиль двигателінің 1-ші цилиндры; 3-ші цилиндры жұмысында ақау болу;

D) бір атқанда тию; тимеу;

E) ойын сүйегінің үстіңгі жағына: жай сан; 4 саны пайда болды.

14. Мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы неге тең?

A) 0; B) $0 < P(A) < 1$; C) 1;

D) $\frac{1}{2}$; E) $0 \leq P(A) \leq 1$;

15. U – ақиқат, V – мүмкін емес, A – кездейсоқ оқиғалар. $A + \bar{A}$ оқиғасы нені білдіреді?

A) U ; B) V ; C) A ; D) $2U$; E) $2A$.

16. Екі қарама-қарсы оқиғалардың көбейтіндісінің ықтималдығы неге тең?

A) 0;

B) 1;

C) pq ;

D) 0,5;

E) $\frac{1}{3}$.

17. Студентке 4 сұрақ және әр сұраққа ішінде біреуі дұрыс болатын 3 жауап ұсынылады. Студент дайындалмай кездейсоқ жауап береді. Ол ең болмағанда бір сұраққа дұрыс жауап беру ықтималдығы қандай (0,01 дейінгі дәлдікпен)?

18. Цехта екі әйел және үш еркек жұмыс істейді. Кездейсоқ кезекшілікке 4 адам алынды. Алынған адамдар ішінде бір әйел болу ықтималдығын тап.

A) $\frac{C_2^1 C_3^3}{C_5^4}$; B) $\frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^4}$; C) $\frac{C_2^1 C_5^3}{C_5^4}$; D) $\frac{C_5^3}{C_5^4}$; E) $\frac{3}{C_5^4}$.

19. Екі үйлесімсіз оқиғалардың қосындысы деп ... пайда болатын оқиға аталады.

A) осы оқиғалар бірге;

B) берілген оқиғалардың ең болмағанда біреуі;

C) екі оқиғаның тек қана біреуі;

D) осы оқиғалардың біреуі де емес;

E) екі оқиға да.

20. C_7^3 -ті тап.

21. Шама кездейсоқ деп аталады, егер тәжірибе нәтижесінде ...

A) ол кез келген мән қабылдаса;

B) ол бір мән қабылдаса;

C) ол бүтін мән қабылдаса;

D) ол алдын-ала белгісіз және кездейсоқ себептен тәуелді бір мүмкін мәнді қабылдаса;

E) ол тек бір мүмкін мәнді кейбір аралықтан қабылдаса.

22. Кездейсоқ шама дискреттік деп аталады, егер ...

A) ол шектелген аралықтан кез келген мәндерді қабылдай алса;

B) ол кейбір аралықтан кез келген мәнді қабылдай алса;

C) ол тек бөлек мүмкін мәндерді қабылдай алса;

D) ол тек бір мәнді қабылдаса;

E) ол тек бүтін мән қабылдай алса.

23. Кездейсоқ шама үзіліссіз деп аталады, егер ...

A) ол тек қана бөлек мүмкін мәндерді қабылдаса;

B) ол кейбір аралықтан кез келген мәнді қабылдай алса;

C) ол тек бөлек мүмкін мәндерді нақты бір ықтималдықтармен қабылдай алса;

D) ол тек бір мәнді қабылдаса;

E) ол тек бүтін мән қабылдай алса.

24. Геометриялық үлестірім деп мына формуламен анықталатын заң аталады:

A) $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$; B) $P(X=k) = C_n^k p^{n-k} q^k$;

C) $P(X=k) = p q^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$;

D) $P(X=k) = p^{k-1} q$, $k = 1, 2, \dots, n$; E) $P(X=k) = q^{k-1} p$, $k = 1, 2, \dots$,

25. Биномдық үлестірім мына формуламен анықталады:

A) $P(X=k) = C_n^k p^{n-k} q^k$; B) $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$; C) $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;

Д) $P(X=\kappa) = q^k p^{n-k}$; Е) $P(X=\kappa) = q^{k-1} p$.

26. Гипергеометриялық үлестірім деп мына формуламен анықталады:

А) $P(X=k) = \frac{C_r^k C_{n-r}^{m-k}}{C_n^m}$; В) $P(X=k) = \frac{C_r^k C_n^{m-k}}{C_n^m}$; С) $P(X=\kappa) = C_n^k p^k q^{n-k}$;

Д) $P(X=k) = \frac{C_r^m C_{n-r}^k}{C_n^m}$; Е) $P(X=\kappa) = pq^{k-1}$.

27. Пуассон үлестірімі мына формуламен анықталады:

А) $P(X=\kappa) = \frac{\lambda^k}{k} e^{-\lambda}$; В) $P(X=\kappa) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-k}$; С) $P(X=\kappa) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k}$;

Д) $P(X=\kappa) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$; Е) $P(X=\kappa) = \frac{\lambda^k}{n} e^{-\lambda}$.

28. Тиынмен 10 тәжірибеде елтаңба түсу саны- X кездейсоқ шамасының ықтималдықтар үлестірімі қандай заңмен анықталады?

А) геометриялық;

В) пуассон;

С) биномдық;

Д) гипергеометриялық;

Е) бірқалыпты.

29. Кездейсоқ шаманың ықтималдықтар үлестірімінің функциясы қалай анықталады?

А) $F(x) = P(X = x)$;

В) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq a \\ \varphi(x), & \text{егер } a < x \leq b; \\ 0, & \text{егер } x > b \end{cases}$

С) $F(x) = P(X < x)$;

Д) $F(x) = P(X \leq x)$;

Е) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq a \\ \varphi(x), & \text{егер } a < x \leq b. \\ 1, & x > b \end{cases}$

30. Кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы берілген:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0 \\ 1 - e^{-3x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases}$$

Үлестірім тығыздығын тап.

А) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x < 0 \\ 3e^{-3x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases}$;

В) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0 \\ 3e^{-3x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases}$;

С) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x < 0 \\ -e^{-3x}, & \text{егер } x > 0 \end{cases}$;

Д) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0 \\ x + \frac{1}{3}e^{-3x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases}$;

$$E) f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x < 0 \\ x + \frac{1}{3}e^{-3x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases}.$$

31. Дискреттік кездейсоқ шаманың $M(X)$ формуласын көрсет:

$$A) M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i;$$

$$B) M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx;$$

$$C) M(X) = x_i p_i;$$

$$D) M(X) = np;$$

$$E) M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

32. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың математикалық үміті мынаған тең:

$$A) \sum x_i p_i; \quad B) \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx;$$

$$C) \sum x_i n_i;$$

$$D) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx;$$

$$E) \int_a^b x f(x) dx$$

33. Дискреттік кездейсоқ шаманың дисперсиясының формуласын көрсет:

$$A) D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2;$$

$$B) D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx;$$

$$C) D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx - [M(X)]^2;$$

$$D) D(X) = \sum_{i=1}^n [(x_i - M(X))] p_i;$$

$$E) D(X) = \sum_{i=1}^n [(x_i - M(X))]^2 p_i.$$

34. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың дисперсиясы қандай формуламен есептеледі?

$$A) \sum_{i=1}^n x_i p_i;$$

$$B) \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i;$$

$$C) \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx;$$

$$D) \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx;$$

35. Қалыпты үлестірімді кездейсоқ шаманың ықтималдықтар үлестірімінің тығыздығы мына түрде болады:

$$\begin{aligned} \text{A) } f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; & \text{B) } f(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; & \text{C) } f(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}; \\ \text{Д) } f(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x-a}{2\sigma^2}}; & \text{Е) } f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x-a}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

36. X кездейсоқ шамасының (α, β) интервалынан мән қабылдау ықтималдығы:

$$\text{A) } P(\alpha < X < \beta) = F\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right);$$

$$\text{B) } P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha);$$

$$\text{C) } P(\alpha < X < \beta) = 2\Phi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right);$$

$$\text{Д) } P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right);$$

$$\text{Е) } P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta+a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha+a}{\sigma}\right).$$

37. Көрсеткіштік үлестірімнің ықтималдықтар тығыздығы мына түрде болады:

$$\text{A) } f(x) = \lambda e^{-\lambda x}; \quad \text{B) } f(x) = 1 - \lambda e^{-\lambda x}; \quad \text{C) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases};$$

$$\text{Д) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases}; \quad \text{Е) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0 \\ e^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases}.$$

38. Бас жиынтық пропорциясын дұрыс елестететін таңдама ... деп аталады.

A) қайталамалы;

B) кездейсоқ;

C) репрезентативті

Д) типтік;

Е) қайталамасыз.

39. Таңдаудың механикалық тәсілінде ...

A) бас жиынтық бөліктерге бөлінеді және тұтас зерттеу үшін бір немесе бірнеше бөлік алынады;

B) бас жиынтықтан әрбір k -шы объект алынады;

C) бас жиынтық бөліктерге бөлінеді және әр бөліктен бір немесе бірнеше объект алынады;

Д) бас жиынтықтан объектілер “лотерея” принципімен алынады;

Е) бас жиынтықтан кездейсоқ түрде бірнеше объект алынады.

40. Таңдаудың қандай тәсілдерінде бас жиынтық бөліктерге бөлінеді?

A) механикалық;

B) жай кездейсоқ;

C) жай кездейсоқ қайталамасыз;

Д) механикалық, типтік және сериялық;

Е) сериялық және типтік.

41. Таңдаманың статистикалық үлестірімі ... арасындағы сәйкестікті орнатады.

A) варианта және ықтималдықтар;

B) мүмкін мәндер және ықтималдықтар;

- С) бақыланған мәндер және олардың жиіліктері;
 Д) бақыланған мәндер және олардың ықтималдықтары;
 Е) мүмкін мәндер және олардың жиіліктері.

42. Жиіліктер полигоны деп ... аталады.

- А) $(x_1; p_1), (x_2; p_2), \dots, (x_k; p_k)$ нүктелері арқылы өтетін қисық;
 В) кесінділері $(x_1; p_1), (x_2; p_2), \dots, (x_k; p_k)$ нүктелерін қосатын сынық сызық;
 С) $(x_1; p_1), (x_2; p_2), \dots, (x_k; p_k)$ нүктелері арқылы өтетін қисық;
 Д) $(x_1; p_1), (x_2; p_2), \dots, (x_k; p_k)$ нүктелерін қосатын сынық сызық;
 Е) $(x_1; p_1)$ және $(x_k; p_k)$ нүктелерін қосатын кесінді.

43. Жиіліктер гистограммасы деп ... аталады.

- А) кесінділері $(x_1; p_1), (x_2; p_2), \dots, (x_k; p_k)$ нүктелерін қосатын сынық сызық;
 В) $(x_1; p_1), (x_2; p_2), \dots, (x_k; p_k)$ нүктелерінен өтетін сызық;

С) табандары h және биіктіктері $\frac{n_i}{h}$ болатын тіктөртбұрыштардан құралған

баспалдақты фигура;

Д) табандары h және биіктіктері p_i болатын тіктөртбұрыштардан құралған баспалдақты фигура;

Е) $(x_1; p_1), (x_2; p_2), \dots, (x_k; p_k)$ нүктелерін қосатын сынық сызық.

44. Статистикалық үлестірім берілген:

x_i	2	5	7	8
p_i	1	3	2	4

$x = 7$ болғанда $F^*(x)$ эмпирикалық үлестірім функциясының мәнін тап.

- А) 0,4;
 В) 4;
 С) 2;
 Д) 0,6;
 Е) 6.

45. Үлестірім параметрінің статистикалық бағасы деп ... аталады.

- А) бақыланған мәндермен анықталатын кездейсоқ шама;
 В) кездейсоқ шаманың сандық сипаттамасы;
 С) бақыланған мәндердің арифметикалық ортасы;
 Д) бақыланған мәндердің өлшенген арифметикалық ортасы;
 Е) бағаланатын параметрге тең тұрақты.

46. Статистикалық бағаларға қойылатын талаптар:

- А) жылжымағандық;
 В) қомақтылық;
 С) тиімділік және жылжымағандық;
 Д) тиімділік, орнықтылық, жылжымағандық;
 Е) орнықтылық.

47. Таңдамалық орташа мына формуламен анықталады:

A) $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$;

B) $\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n}$;

C) $\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{k}$;

Д) $\bar{x} = \frac{\sum x_i p_i}{n}$;

Е) $\sum x_i p_i$.

48. Таңдаманың статистикалық үлестірімі берілген:

x_i	1	2	4	6
n_i	3	4	8	3

Таңдамалық орташаны $\bar{x}_B$ тап.

A) 4,2;

B) 3,4;

C) 5,3;

Д) 4,6;

Е) 9.

49. Таңдамалық дисперсия деп мына формуламен анықталатын шама аталады:

A) $D_B = M(X^2) - [M(X)]^2$;

B) $D_B = M(X^2) - M(X)$;

C) $D_B = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B) n_i}{n}$;

Д) $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{\sum n_i}$;

Е) $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2}{\sum n_i}$.

50. Таңдаманың статистикалық үлестірімі берілген:

x_i	2	4	6	7	9
n_i	4	2	3	15	10

Таңдамалық орташаны $\bar{x}_B$, таңдамалық дисперсияны σ^2 тап.

A) 6,7; 4,7;

B) 4,5; 6,9;

C) 5,8; 3,3;

Д) 8,3; 6,6;

Е) 6,1; 9,1.

Қортынды

Қазіргі кезде жаратылыстану мен техниканың көптеген салаларында ықтималдықтар теориясының әдістері жиі қолданылады. Өндірістік процестерді автоматты басқару, автоматты радиолокациялық станциялар және автоматты математикалық машиналар жасау, самолеттің ұшуын автоматты басқару және басқа да автоматика мен телемеханикалық, техникалық мәселелер ықтималдық әдістерді қолданады. Ықтималдықтар теориясы математикалық және қолданбалы статистикаға негіз болады. Ал статистика өндірісті жоспарлау мен ұйымдастыруға, технологиялық процестерді талдауға, өнім сапасын анықтауға, дұрыс шешім қабылдап, экономиканы тиімді басқаруға көмектеседі.

Болашақ мамандар ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканы жақсы игерулері үшін оларға оқулықтар мен есеп жинақтары қажет. Ал қазақ тілінде есептер жинағы аз болғандықтан, осы тапшылықты кеміту мақсатында осы әдістемелік құрал дайындалды.

Әдебиеттер тізімі

- 1 Казешев А, Абенов М, Қойлышев Ү. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептер жинағы.— А.: Ғылым, 2015.- 183 б.
- 2 Саханов Н., Жаңбырбаев Б. Жоғары математика.- Алматы: Қайнар, 2012.- 315 б.
- 3 Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 2012.- 253 б.
- 4 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высшая школа, 2017.- 479 б.
- 5 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М.: Высшая школа, 2018.- 400 б.
- 6 Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник практикум по теории вероятности и математической статистике – М. Просвещение, 2014. -108 б.
- 7 Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: Юнити, 2015.- 543 б.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3985	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3277	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2757	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2151	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1275	1257	1238	1219	1200	1182	1168	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0873	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0254	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0						

2 кесте- $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ функциясы мәндерінің кестесі

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,3032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4625	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4808	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4873
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982

1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		