

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі
А.Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті
Математика кафедрасы

Р.С. Ысмагул

САНДЫҚ ЖӘНЕ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ ҚАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫ

Оқу-әдістемелік құрал

Қостанай, 2019

УДК 517.5
ББК 22.161
Ы 88

Автор:

Ысмағұл Роза Сапабекқызы, физика-математика ғылымдарының кандидаты, математика кафедрасының доценті

Рецензенттер:

Ерсултанова Зауреш Сапарғалиевна – техника ғылымдарының кандидаты, Ө.Султангазин атындағы ҚМПУ информатика кафедрасының доценті

Утемисова Анар Алтаевна - педагогика ғылымдарының кандидаты, доцент, А. Байтұрсынов атындағы ҚМУ математика кафедрасының меңгерушісі

Берденова Гулнар Жалғасовна - А. Байтұрсынов атындағы ҚМУ математика кафедрасының аға оқытушысы.

Ысмағұл Р.С.

Ы Сандық және функционалдық қатарлар теориясы. Оқу-әдістемелік құрал. –Қостанай: А. Байтұрсынов атындағы ҚМУ, 2019. – **124 б.**

ISBN

Бұл жұмыста курсты оқытудың әдістемелік нұсқаулары, есептерді шешудің қысқаша түсініктемелері және қатарлар теориясының әр бөлімдеріне арналған бақылау сұрақтары, қатарлардың жинақталу немесе жинақталмау белгілері, нақты және кешендік облыстардағы функциялардың Тейлор және Маклорен қатарларына жіктелулері берілген.

Жоғарғы оқу орындарындағы 5В060100-Математика және техникалық мамандықтарда оқитын студенттерге арналған, оқытушыларға ұсынуға болады.

УДК 517.5
ББК 22.161
Ы 88

А.Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті Оқу-әдістемелік кеңесімен бекітілді және баспаға ұсынылды, _____ 2019 ж., хаттама №

ISBN

© А.Байтұрсынов атындағы

Қостанай мемлекеттік университеті,
© Ысмағұл Р.С., 2019

Мазмұны

Кіріспе.....	4
1 тақырып Сандық қатарлар теориясы.....	5
1.1 Қатар және оның жинақталуының анықтамасы, қасиеттері.....	5
1.2 Қатардың жинақталуының Коши критеріі.....	7
1.3 Мүшелері теріс емес қатарлардың жинақталуының қажетті және жеткілікті шарттары.....	8
1.4 Мүшелері теріс емес қатарлардың жинақталуының белгілері (салыстыру, Даламбер, Коши, интегралдық).....	12
1.5 Ауыспалы таңбалы қатарлар (абсолютті және шартты жинақталу)	14
2 тақырып Функциялық тізбектер мен қатарлар.....	23
2.1 Функциялық тізбектер мен қатарлардың жинақталуы.....	23
2.2 Бірқалыпты жинақталатын функциялық тізбектер мен қатарлардың қасиеттері.....	28
2.3 Дәрежелік қатардың жинақталу радиусы және жинақталу облысы.....	29
2.4 Элементар функциялардың Тейлор қатарына жіктелуі.....	31
3 тақырып Дифференциалдық теңдеулерді қатарлардың көмегімен.....	37
интегралдау.....	37
3.1 Коши есебі туралы теорема.....	37
3.2 Қатар түріне келтірілген сызықтық теңдеудің шешімі.....	40
3.3 Біртекті екінші ретті сызықтық теңдеуді дәрежелік қатарлардың көмегімен шешу.....	44
3.4 Полиномды және рационал коэффициентті дифференциалдық теңдеулерді қатарлар көмегімен шешу.....	45
3.3 Бессель теңдеуінің дәрежелік қатар түріндегі шешімі.....	52
4 тақырып Аналитикалық функциялардың бірқалыпты жинақты қатарлары.....	56
4.1 Қатардың бір қалыпты жинақтылық шарты	56
4.2 Вейерштрассстың теоремасын дәрежелік қатарға қолдану.....	59
4.3 Аналитикалық функциялардың дәрежелік қатарға жіктелуі.....	61
5 тақырып Кешендік облыстағы қатарлар теориясы.....	65
5.1 Сандық қатарлардың жинақталуы.....	65
5.2 Дәрежелік қатардың бір қалыпты жинақтылығы. Тейлор қатары.....	68
5.3 Голоморфтық функцияның дәрежелік қатарларға жіктелуі.....	70
5.4 Лоран қатарының жинақталу облысы.....	72
5.5...Бірімді функцияның ерекше нүктелерінің классификациясы.....	74
Қосымшалар.....	82
Қолданылған әдебиеттер тізімі.....	128

Кіріспе

Бұл оқу әдістемелік құралында қатарлар теориясының қасиеттерін оқып үйренумен шұғылданамыз. Сандық және функциональдық қатарлар әр түрлі қолданылымды математикалық пәндерінде, атап айтқанда: шектер теориясында, алгебрада, аналитикалық сандар теориясында, дифференциалдық теңдеулерде т.б. қолданылады. Оқу құралын құрастыру мақсаты – қатарлар теориясын зерттеудің іргелі тәсілдерімен танысу, бұл тәсілдер ақырсыз аз шамалардың талдауына және шектер теориясының қасиеттерін пайдалануға негізделген. Сонымен бірге курстың ғылыми - зерттеу жұмысын жүргізуге қажетті басқа математикалық әдістерді, басқа математикалық пәндерді оқуға қажетті студенттердің логикалық ойлауы мен математикалық мәдениетін дамыту.

Жұмыста нақты талдаудан белгілі негізгі ұғымдар мен амалдарды, нақты облыстағы сияқты, кешендік облыстата қатарларды зерттеу үшін аналитикалық аппарат құрылған. Сонымен қатар, екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулерді дәрежелік қатарлардың көмегімен шешу.

Жұмыстың мақсаты: а) Сандық қатарлар мен функционалдық қатарлардың жинақталу теориясын жоғары математика курстарында қолдану тәсілдерін зерттеу, б) Сызықтық теңдеулерді дәрежелік қатарлар көмегімен интегралдау теориясын жүйелі түрде қарастырып, соған байланысты кейбір дифференциалдық теңдеулердің шешімін табу, в) Бессель теңдеуінің дәрежелік қатар түріндегі шешімін көрсету.

Математикада және оның қосымшаларында негізгі бөлім болып табылатын дифференциалдық теңдеулерді қатарлар арқылы шешу әдістері қарастырылған. Бессель теңдеуінің шешімін құратын фундаменталды жүйенің функциялары элементар функциялар болып табылмайтыны белгілі. Бірақ олар коэффициенттері оңай анықталатын дәрежелік қатарларға жіктеледі.

1тақырып Сандық қатарлар теориясы

1.1 Қатар және оның жинақталуының анықтамасы, қасиеттері

Бұл тақырыпта қарастырылатын сұрақтар тек нақты сандар үшін ғана емес, сонымен қатар комплекс сандар үшін де қарастырылады Сондықтан басқа бөлімдерге карағанда бұл бөлімде комплексті облыста қарастырамыз.

Анықтама 1 u_n , $n=1, 2, \dots$ нақты сандардың тізбегі берілсін.

s_n , $n=1, 2, \dots$, сандардың жаңа тізбегін құрастырамыз:

$$s_1 = u_1,$$

$$s_2 = u_1 + u_2,$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

.....

$\{s_n\}$ тізбегі қатар деп аталады (дәлірек: жалпы мүшесі u_n қатары деп аталады) және

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (1.1)$$

немесе

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (1.2)$$

белгіленеді

Ал, $\{u_n\}$ алғашқы тізбегінің элементтері (1.1) қатарының мүшелері деп аталады, ал $\{s_n\}$ тізбегінің элементтері— бұл қатардың дербес қосындылары деп аталады, сонымен қатар u_n мүшесі қатардың n -ші мүшесі, ал s_n ақырғы қосындысы— қатардың n -ші дербес қосындысы, $n=1, 2, \dots$, деп аталады.

Анықтама 2 (1.2) қатардың мүшелерінен $(n+1)$ мүшесінен бастап құралған

$$u_{n+1} + \dots + u_{n+m} + \dots, \quad (1.3)$$

қатарын (1.1) қатарының n -ші қалдығы деп аталады.

Қатар өзінің дербес қосындыларының тізбегі болып табылғандықтан, жинақталуы да, жинақталмауы да мүмкін.

Анықтама 3 Егер (1.1) қатары жинақталса, онда

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

шегі оның қосындысы деп аталады.

Мұндай жағдайда

$$s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

немесе

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \quad (1.4)$$

деп жазылады.

Бұл жағдайда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ символын (1.4) қатарын белгілеу үшін және егер қатар жинақталса, оның қосындысын белгілеу үшін қолданады.

Егер

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty, \text{ немесе } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty, \text{ немесе } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty,$$

онда сәйкесінше

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty \text{ немесе } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty$$

деп жазады.

Егер (1.3) қатарының қалдығы (1.1) жинақталса, онда оның қосындысын r_n деп белгілейміз:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k , \quad (1.5)$$

және қатардың қалдығы деп атаймыз.

$u_1 + u_2 + \dots + u_n$ қосылғыштардың ақырлы санының кез келген қосындысын $u_{n_0+1} = u_{n_0+2} = \dots = 0$ мүшелерді қосып, қатар ретінде қарастыруға болады.

Алынған қатардың (1.5) қосындысы берілген қосындымен сәйкес болып келеді, өйткені $n \geq n_0$ болғанда барлық дербес қосындылары s_{n_0} -ге тең болады.

Егер қосынды құрамында қосылғыштардың ақырлы немесе ақырсыз сандарының болатынын белгісіз болса, онда екі жағдайда да қатар деп айтуға ыңғайлы болады.

Жинақталатын қатарлардың қасиеттері

Теорема 1 c – тұрақты сан болсын. Егер

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

қатары жинақталса, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$$

санға көбейтінділетін қатар да жинақталады және

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \quad (1.6)$$

теңдігі орындалады.

Бұл теорема ақырсыз қосынды жинақты болған жағдайда (1.6) сандық көбейткішті «жақша сыртына шығаруға болатынын» білдіреді.

$$\text{Дәлелдеуі. } s_n = \sum_{k=1}^n u_k \text{ и } s'_n = \sum_{k=1}^n cu_k$$

болса, онда

$$s'_n = cs_n. \quad (1.7)$$

Шарт бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ бар болады, сондықтан (1.7) бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n$ бар болады және

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

бұл (1.6) теңдігі болып табылады.

Теорема дәлелденді.

Теорема 2 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

қатарлары жинақталсын, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n),$$

берілген қатарлардың қосындысы деп аталатын қатар жинақталады және

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (1.8)$$

теңдігі орындалады.

Бұл теорема жинақталатын қатарларды «мүшелеп қосуға болатынын» (n-ші мүшені n-ші мүшемен) білдіреді.

Дәлелдеуі. $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $s'_n = \sum_{k=1}^n v_k$ и $\sigma_n = \sum_{k=1}^n (u_k + v_k)$ болса,

онда

$$\sigma_n = s_n + s'_n,$$

және шарт бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ және $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n$ бар болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ де бар болады және

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + s'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n,$$

бұл (1.8) теңдігі болады.

Теорема дәлелденді.

1.2 Қатардың жинақталуының Коши критерийі

Тізбектердің жинақталуы үшін Коши критерийін қатарлар үшін басқаша айтуға болдаы.

Нақтылығында, $\{s_n\}$ тізбегі жинақталуы үшін кез келген $n \geq n_\varepsilon$ нөмірлері және кез келген бүтін $p \geq 0$ үшін $|s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалып, кез келген $\varepsilon > 0$ үшін n_ε нөмірі бар болуы қажетті және жеткілікті. Критериді ыңғайлы пайдалану үшін жазылған $s_{n+p} - s_n$ айырманың орнына $s_{n+p} - s_{n-1}$ айырмасын жазамыз. Сонымен қатар, s_0 қосындысы анықталмағандықтан, анықтама бойынша $s_0 = 0$ деп есептейміз.

Егер енді $\{s_n\}$ тізбегі (1.1) қатарының дербес қосындысы болып табылса, онда

$$s_{n+p} - s_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p},$$

болады және критерий келесі түрде болады.

Теорема 3 (Коши критерийі) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары жинақталу үшін, кез келген $\varepsilon > 0$ үшін n_ε нөмірі бар болып, кез келген $n \geq n_\varepsilon$ нөмірлері және кез келген бүтін $p \geq 0$ үшін

$$|u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon \quad (1.9)$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 4 (қатардың жинақталуының қажетті шарты) Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары жинақталса, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (1.10)$$

Нақтылығында, кез келген $p \geq 0$ үшін және (1.9) дербес жағдайда $p=0$ үшін (1.10) теңдігі орындалады. Сондықтан барлық $n \geq n_\varepsilon$ үшін

$$|u_n| < \varepsilon$$

болады, ал $\varepsilon > 0$ кез келгенділікті ескере отырып, $\varepsilon > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ екенін білдіреді.

Теорема дәлелденді.

(1.10) қасиеті «жинақты қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылатынын» білдіреді.

1.3 Мүшелері теріс емес қатарлардың жинақталуының қажетті және жеткілікті шарттары

Мүшелері теріс емес қатарлар қосымшаларда көбінесе жиі кездеседі. Сонымен қатар, олармен алдын ала танысу, таңбалары әр түрлі қатарларды үйренуді жеңілдетеді. Мүшелері теріс емес қатарлардың мүшелерін u_k орнына p_k белгілейміз.

Мүшелері теріс емес қатар жинақталу үшін бұл қатардың дербес қосындысының шенелуі қажетті және жеткілікті.

Салыстыру белгілері

Теорема 5 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ - мүшелері теріс емес қатарлар берілсін және k үшін келесі теңдік орындалсын

$$p_k \leq p'_k. \quad (1.11)$$

Онда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ жинақтылығынан $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ жинақтылығы, ал $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$

жинақсыздығынан $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ жинақсыздығы шығады.

Дәлелдеу. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ және $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ қатарларының n -ші ретті дербес қосындыларын S_n және S'_n арқылы белгілейік. Соңғы теңсіздік $\{S'_n\}$ шектеулі қосындыларының тізбегі $\{S_n\}$ шектеулі қосындыларының тізбегіне ауысуын көрсетеді, және керісінше, $\{S_n\}$ шектеусіз қосындыларының тізбегі $\{S'_n\}$ шектеусіз қосындыларының тізбегіне ауысуын көрсетеді, онда теорема 1 сүйеніп теорема 5 дәлелденеді.

Салдар. Мүшелері теріс емес $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ қатары және $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ мүшелері оң қатары берілсін. Егер ақырлы $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p'_k} = L$ шегі бар болса, онда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ жинақтылығынан $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ жинақтылығы шығады

Теорема 6 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ және $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ екі оң қатарлары берілсін және k үшін мынадай теңдік орындалсын

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k}. \quad (1.12)$$

Онда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ жинақтылығынан $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ жинақтылығы, ал $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ жинақсыздығынан $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ жинақсыздығы шығады.

Дәлелдеу. $k=1,2,\dots,n-1$ үшін (1.12) теңсіздігін жазайық, мұндағы n – кез-келген нөмір.

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &\leq \frac{p'_2}{p'_1}, \\ \frac{p_3}{p_2} &\leq \frac{p'_3}{p'_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{p_n}{p_{n-1}} &\leq \frac{p'_n}{p'_{n-1}}. \end{aligned}$$

Барлық теңсіздіктерді мүшелеп көбейткеннен кейін, мына теңсіздіктерді аламыз.

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{p_1} &\leq \frac{p'_n}{p'_1} \text{ немесе} \\ p_n &\leq \frac{p'_1}{p'_n} p'_n \end{aligned}$$

Соңғы теңсіздікте $c = p_1 / p'_1$ деп алсақ, теорема дәлелденеді.

Даламбера және Коши белгілері

Салыстыру белгілерінен мүшелері оң қатардың жинақталуының Даламбер және Коши белгілері шығады. Олар жинақты геометриялық прогрессия элементтерінен құрылған қатармен

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \dots + q^k + \dots, \quad q < 1, \quad (1.13)$$

немесе жинақсыз қатармен

$$\sum_{n=1}^{\infty} k = 1 + 1 + \dots + 1 \dots \quad (1.14)$$

салыстыруына негізделеді.

Теорема 7 (Даламбера белгісі) Егер қандайда бір нөмірден бастап келесі теңдік орындалса

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \right) \quad (1.15)$$

онда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ қатары жинақталады (жинақталмайды).

Салдар Егер келесі шек бар болса

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L, \quad (1.16)$$

онда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ қатары $L < 1$ болғанда жинақталады, ал $L > 1$ болғанда жинақталмайды.

Теорема 7 әдетте Даламбер белгісінің шектік түрі деп аталады. Ол осы түрде жиі кездеседі.

Дәлелдеу.

Теореманы дәлелдеу үшін $p'_k = q^k$ ($p'_k = 1$) делік. Онда $\frac{p_{k+1}}{p_k} = q$, мұндағы

$q < 1$ ($\frac{p_{k+1}}{p_k} = 1$) біз теңдікті (2.5) түрінде жаза аламыз да,

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \right). \quad (1.17)$$

$\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ қатары (1.13) (1.14) қатарларымен беттесіп жинақталатындықтан (жинақсыз), онда салыстыру белгісінің теоремасы бойынша (1.17) теңсіздігі қатардың жинақталуына кепілдік береді. Теорема дәлелденді.

Теорема 8 (Коши белгісі) Егер қандайда бір нөмірден бастап келесі теңдік орындалса

$$\sqrt[k]{p_k} < q < 1 \quad \left(\sqrt[k]{p_k} \geq 1 \right) \quad (1.18)$$

онда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ қатары жинақталады (жинақталмайды).

Салдар Егер келесі шек бар болса

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L \quad (2.19)$$

онда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ қатары $L < 1$ болғанда жинақталады, ал $L > 1$ болғанда жинақталмайды.

Теорема 8 әдетте Коши белгісінің шектік түрі деп аталады. Ол осы түрде жиі кездеседі.

Дәлелдеу

Теореманы дәлелдеу үшін $p'_k = q^k$ делік. Онда (1.18) теңсіздігінен мынаны аламыз

$$p_k \leq p'_k (p_k \geq p'_k) \quad (2.20)$$

$\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ қатары (1.13) (1.14) қатарларымен беттесіп жинақталатындықтан (жинақсыз), онда салыстыру белгісінің теоремасы бойынша (1.20) теңсіздігі қатардың жинақталуына кепілдік береді. Теорема дәлелденді.

Коши-Маклоренның интегралдық белгісі

Даламбер және Коши белгілері кейбір қатарлардың жинақталуын анықтай алмайды. Мысалға осы белгілер арқылы $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ (α - кез – келген нақты сан) (1.11) қатарының жинақталуын анықтай алмаймыз

$\alpha < 1$ болғанда (1.11) қатарының жинақсыз болатындығы белгілі, алайда $\alpha > 1$ болғандағы сұрақ әлі де шешілген жоқ. Осы бөлімде біз мүшелері теріс емес қатарлардың жинақталуының тағы да бір жалпы белгісін қарастырамыз.

Теорема 9 (Коши-Маклорена белгісі). $f(x)$ функциясы теріс емес және $x > m$ аталығында өспейтін болсын, мұндағы m кез – келген бекітілген сан. Онда келесі сандық қатардың жинақталуы үшін

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots \quad (1.21)$$

$$a_n = \int_m^n f(x) dx \quad (1.22)$$

тізбегінің $n \rightarrow \infty$ шегінің бар болуы қажетті және жеткілікті

Дәлелдеу. k - $k \geq m+1$ шартын қанағаттандыратын кез-келген нөмір, ал x айнымалысы $k-1 \leq x \leq k$ кесіндісіне тиісті аргумент болсын. Шарт бойынша берілген кесіндіде функция өспейді және көрсетілген кесіндідегі x –тер үшін келесі теңсіздіктер орындалады

$$f(x) \leq f(k) \leq f(k-1). \quad (1.23)$$

$f(x)$ функциясы $[k-1, k]$ кесіндісінде шенелген және монотонды болғандықтан, сол кесіндіде интегралданады. (1.23) теңсіздігінен және қатардың қасиеттерінен келесі теңсіздік

$$\int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dx,$$

немесе

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1) \quad (1.24)$$

шығады.

Бұл теңсіздіктер кез-келген $k \geq m+1$ үшін орындалады. Оларды k -ның келесі мәндері $m+1, m+2, \dots, n$ үшін жазамыз.

$$\begin{aligned} f(m+1) &\leq \int_m^{m+1} f(x) dx \leq f(m), \\ f(m+2) &\leq \int_{m+1}^{m+2} f(x) dx \leq f(m+1), \\ &\dots\dots\dots \\ f(n) &\leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1). \end{aligned}$$

Теңсіздіктерді мүшелеп қосып,

$$\sum_{k=m+1}^n f(x) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \quad (1.25)$$

теңсіздігін аламыз.

$$S_n = \sum_{k=m}^n f(k) \quad (1.26)$$

деп (1.21) қатарының n -ші дербес қосындысын белгілейміз.

(1.21) белгілеулерін ескеріп, (1.26) теңсіздіктерін келесі түрге келтіреміз

$$S_n - f(m) \leq a_n \leq S_{n-1} \quad (1.27)$$

Бұл теңсіздіктер теореманы дәлелдейді. Себебі (1.22) формуласынан $\{a_n\}$ тізбегінің кемімейтіндігі шығады. Яғни бұл тізбектің жинақтылығы үшін оның шенелуі қажетті және жеткілікті. (1.21) қатарының жинақтылығы үшін теорема бойынша $\{S_n\}$ тізбегінің шенелуі қажетті және жеткілікті. (1.27) теңсіздігінен $\{S_n\}$ тізбегінің шенелуі үшін $\{a_n\}$ тізбегінің шенелуі қажетті және жеткіліктілігі шығады. Теорема дәлелденді.

1.4 Ауыспалы таңбалы қатарлар

Бұл пункте нөмірі өзгерген сайын таңбалары өзгертін, нақты сандары бар қатарлар қарастырылады; ондай қатарлар ауыспалы таңбалы қатарлар деп аталады.

Ең әуелі ауыспалы таңбалы қатарларды қарастырайық, яғни мүшелері кезекпен не оң, не теріс болатын қатарлар,

Теорема 10 (Лейбниц). Егер

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (1.28)$$

және

$$u_n \geq u_{n+1} > 0, \quad (1.29)$$

$n=1, 2, \dots$ болса, онда ауыспа таңбалы қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n. \quad (1.30)$$

жинақталады.

Д ә л е л д е у і. (1.30) жұп ретті қатардың дербес қосындыларын қарастырайық:

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} u_n.$$

Оларды келесі түрде жазуға болады

$$s_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2k-1} - u_{2k}), \quad k = 1, 2, \dots$$

(1.29) шарты бойынша дөңгелек жақшадағы айырмалардың мәні теріс емес болады, сондықтан $s_{2k} \leq s_{2k+1}$, яғни (1.30) жұп ретті қатардың дербес қосындыларының тізбегі монотонды өспелі болады. Дербес қосындылар s_{2k} келесі түрде жазуға болады:

$$s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}, \quad k = 1, 2,$$

және (1.29) шарты бойынша дөңгелек жақшаның ішіндегі мән оң, ал $u_k > 0$, болғандықтан $s_{2k} < u_1$, аламыз яғни $\{s_{2k}\}$ -тізбегі жоғарыдан шектелген.

$\{s_{2k}\}$ -тізбегінің монотонды өспелі және жоғарыдан шектелуінен, оның жинақтылығы шығады.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2k} = s. \quad (1.31)$$

болсын.

(1.30) қатарының тақ ретті дербес қосындылары (1.31) шекіне ұмтылатынын көрсетейік. Расында

$$s_{2k+1} = s_{2k} + u_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

болғандықтан, (1.28) бойынша

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1} = 0,$$

онда (1.31) және (1.32) бойынша сәйкес

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = s, \quad (1.33)$$

(1.31) және (1.32) -нен келесі шығады

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Теорема дәлелденді.

Тұжырым. (1.28) қатарының кез келген s_n дербес қосындысы мен s қосындысының айырмасы u_{n+1} мүшесінің аспайды немесе бұл қатардың

қалдығының абсолютті шамасы оның бірінші мүшесінің абсолютті шамасынан аспайды, яғни

$$|r_n| = |s - s_n| \leq u_{n+1}.$$

Шынында теңсіздігінен $s_{2k} \leq s \leq s_{2k-2}$ шығады

$$s - s_{2k} \leq s_{2k+1} - s_{2k} = u_{2k+1},$$

$$s_{2k-1} - s \leq s_{2k-1} - s_{2k} = u_{2k},$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Тұжырым дәлелденді.

1.5 Абсолютті және шартты жинақталатын қатарлар

Мүшелері кез келген таңбалы нақты сандар болатын қатарларды зерттеуге көшейік

Анықтама Егер

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \quad (1.34)$$

қатары жинақталса, онда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (1.35)$$

қатары абсолютті жинақталады деп аталады

Анықтамада (1.35) қатарының жинақтылығы айтылмағанын байқайық. Шынымен, мұндай болжам артық, өйткені келесі теорема әділетті.

Теорема 11 (1.34) қатарының жинақтылығынан (1.35) қатарының жинақтылығы шығады.

Дәлелдеуі. Қатар үшін Коши критеріін қолданайық. Дәлелдеу керек: кез келген $\varepsilon > 0$ үшін N қандай да бір нөмірі табылып, барлық n нөмірлері үшін $n \geq N$ шартын қанағаттандыратын және кез келген p натурал саны үшін келесі теңсіздік әділетті

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon. \quad (1.36)$$

$\varepsilon > 0$ бекітейік. (1.34) қатары жинақталатындықтан, онда Коши критеріі бойынша кез келген $\varepsilon > 0$ үшін N қандай да бір нөмірі табылып, барлық n нөмірлері үшін $n \geq N$ шартын қанағаттандыратын және кез келген p натурал саны үшін келесі теңсіздік әділетті

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon. \quad (1.37)$$

Бірнеше қосылғыштардың қосындысының модулі қосылғыштардың модулдерінің қосындысынан аспайды, яғни

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|. \quad (1.38)$$

(1.36) және (1.37) теңсіздіктерін салыстыра отырып, (1.38) теңсіздігін аламыз. Теорема дәлелденді.

Егер (1.34) қатары жинақталып, ал (1.35) қатары жинақсыз болса, онда (1.34) қатары шартты жинақты деп аталады

Абсолютті және шартты жинақталатын қатардың мүшелеріннің орнын ауыстыру

Нақты қосылғыштардың ақырлы санының қосындысының ең басты қасиеті орын ауыстырымдылық қасиеті болып табылады. Шынымен, мынадай сұрақ туындайды, бұл қасиет жинақталатын қатардың қосындысы үшін әділетті бола ма, яғни жинақталатын қатардың қосындысы осы қатардың мүшесін ауыстыруынан өзгеруі мүмкін бе? Біз бұл сұрақты осы пункте шартты жинақталатын қатарларға қатысты анықтаймыз. Қатардың мүшелеріннің орнын ауыстыруын зерттеуінен бастайық.

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) + \dots \quad (1.39)$$

(1.39) қатары шартты жинақталады және оның қосындысы $\ln 2$. Енді (1.39) қатарының мүшелерін бір оң мүшесінен кейін екі теріс мүше тұратындай етіп орналастырамыз. Мүшелердің осындай ауыстыруының нәтижесінде келесі қатарды аламыз

$$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) + \dots \quad (1.40)$$

Көрсетілген (1.39) қатарының мүшелеріннің орнын ауыстыру нәтижесінде алынған (1.40) қатар жинақталады және (1.39) қатарынан екі есе кіші болатын қосындысы бар болатынын дәлелдейік. Ол үшін (1.39) және (1.40) қатарларының m -ші дербес қосындыларын S_m және S'_m символдарымен сәйкесінше белгілейміз. Келесі қосындылар қарастырайық:

$$S'_{3m} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2m}.$$

Сонымен,

$$S'_{3m} = \frac{1}{2} S_{2m} \quad (1.41)$$

бұдан

$$S'_{3m-1} = \frac{1}{2} S_{2m} + \frac{1}{4m} \quad (1.42)$$

$$S'_{3m-2} = S'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2} \quad (1.43)$$

$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ болғандықтан, $m \rightarrow \infty$ кезде (1.41), (1.42) және (1.43), формулаларынан

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S'_{3m} = \frac{1}{2} S, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} S'_{3m-1} = \frac{1}{2} S, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} S'_{3m-2} = \frac{1}{2} S \text{ теңдіктерін аламыз.}$$

Сөйтіп, (1.39) қатары жинақталады және қосындысы $\frac{1}{2}S$ тең болады, ал

$S = \ln 2 \neq 0$ болғандықтан $\frac{1}{2}S \neq S$. Сәйкесінше, жоғарыда көрсетілген

мүшелердің орнын ауыстыру нәтижесінде шартты жинақталатын (1.39) қатарының қосындысы өзгереді. Қарастырылған мысал, шартты жинақталатын қатарлар үшін мүшелерінің орнын ауыстырымдылық қасиеті орындалмайтындығын көрсетеді. Шартты жинақталатын қатардың қосындысына мүшелерінің орнын ауыстырудың әсері туралы сұраққа толық жауап беретін Риманның тамаша тұжырымын қарастырамыз

Теорема (Риман). Шартты жинақталатын қатардың мүшелерінің орнын ауыстырып, алдын ала алынған қандай да бір L санына жинақталатындай етіп түрлендіруге болады

Ескерту. Сәйкесінше, егер қатар шартты жинақталатын болса, онда оның мүшесін түрлендірілген қатардың бөлік қосындысының тізбегі ауыстыру қасиетіне ие болмайтындай етіп ауыстыруға болады.

Кез келген абсолютті жинақталатын қатар үшін орын ауыстырымдылық қасиеті әділетті екенін дәлелдейік.

Теорема (Коши). Егер берілген қатар абсолютті жинақталатын болса, онда мүшелерінің қандайда бір орнын ауыстыру арқылы алынған кез келген қатар абсолютті жинақталады және қосындысы берілген қатардың қосындысына тең болады.

Д ә л е л д е у і.

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \quad (1.44)$$

қатары абсолютті жинақталсын және қосындысы S болсын. Бұдан ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} U'_k \quad (1.45)$$

(1.44) қатарының мүшелерінің қандайда бір орнын ауыстыру арқылы алынған қатар болып табылады. Дәлелдеу керек:

- 1) (1.44) қатары жинақталады және қосындысы S тең ;
- 2) (1.45) қатары абсолютті жинақталады.

Ең әуелі 1) Кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін N нөмірі табылып, $n \geq N$ шарты кезінде

$$\left| \sum_{k=1}^n U'_k - S \right| < \varepsilon \quad (1.46)$$

орындалатынын көрсетейік

Кез келген $\varepsilon > 0$ санын бекітейік. (1.44) қатары абсолютті жинақталатын және қосындысы S тең болғандықтан таңдап алынған $\varepsilon > 0$ үшін N_0 нөмірін табылып келесі теңсіздік әділетті болады

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |U_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.47)$$

(p – кез келген натуралды сан)

және

$$\left| \sum_{k=1}^{N_0} U_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.48)$$

N нөмірін кез келген $n \geq N$ үшін (1.45) қатарының кез келген S'_n қосындысы (1.44) қатарының алғашқы N_0 мүшесін қамтитындай етіп таңдаймыз. (1.43) сол жақ бөлігіндегі айырманы бағалайық және шарты $n \geq N$ кезінде осы айырма үшін (1.45) теңсіздігі әділетті екенін дәлелдейік. Шынымен, көрсетілген айырманы келесі түрде келтіруге болады

$$\sum_{k=1}^n U'_k - S = \left(\sum_{k=1}^n U'_k - \sum_{k=1}^{N_0} U_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} U_k - S \right). \quad (1.49)$$

Екі шаманың қосындысының модулі олардың модулдерінің қосындысынан аспайтын болмайтындықтан (1.49) теңдеуінен

$$\left| \sum_{k=1}^n U'_k - S \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n U'_k - \sum_{k=1}^{N_0} U_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} U_k - S \right|. \quad (1.50)$$

аламыз.

(1.50) теңсіздігін дәлелдеу үшін $n \geq N$ шарты кезінде

$$\left| \sum_{k=1}^n U'_k - \sum_{k=1}^{N_0} U_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.51)$$

дәлелдеу жеткілікті екені (1.50) және (1.51) теңсіздіктерінен көруге болады.

(1.51) теңсіздігін дәлелдеу үшін, $n \geq N$ шарты кезінде оның сол жақ бөлігінде орналасқан қосындылардың біріншісі (1.54) қатарының барлық N_0 мүшелерін қамтитынын байқайық.

$$\sum_{k=1}^n U'_k - \sum_{k=1}^{N_0} U_k \quad (1.52)$$

нөмірінің әрқайсысы N_0 үлкен болатын, (1.52) қатарының мүшелерінің $n - N_0$ қосындысы түрінде ұсынылады.

Егер $N_0 + p$ нөмірі жаңа ғана көрсетілген барлық $n - N_0$ нөмірінен үлкен болатындай p натуралды санын таңдап алсақ, онда (1.52) айырмасы үшін теңсіздігі әділетті

$$\left| \sum_{k=1}^n U'_k - \sum_{k=1}^{N_0} U_k \right| \leq \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |U_k|. \quad (1.53)$$

(1.53) және (1.48) теңсіздіктерінен (1.51) теңсіздігі шығады. Сонымен (1.51) теңсіздігі дәлелденді, яғни (1.44) қатары жинақталады және қосындысы S екені дәлелденді және (1.45) абсолютті жинақталады. Бұл тұжырымның дәлелдемесі.

1) тұжырымынан шығады, егер оны келесі қатарға қолдансақ

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|$$

және

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U'_k| \quad (1.54)$$

Оның үстіне біз (1.54) қатарларының екіншісінің дәлелдеуін шығарамыз, яғни (1.45) қатарының абсолютті жинақталатынын дәлелдейміз. Теорема толығымен дәлелденді.

Сандық қатарлардың жинақталуын зерттеуге арналған бірнеше мысалдардың шығару жолдарын қарастырайық.

1 Мысал $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ қатарының жинақталуын зерттеу керек.

Шешуі. А. Қатардың жалпы мүшесі $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$.

$n = 1$ болғанда

$$(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \dots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

Сонымен, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$, яғни қатар жинақталмайды.

Б $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ қатарының жинақталуын зерттеу үшін

гармоникалық қатармен салыстырамыз $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

Жалпы мүшесі $v_n = \frac{1}{n}$ болғандықтан, есептейміз $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$.

Сонда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Жинақталудың 2-салыстыру белгісі бойынша гармоникалық қатар жинақталмайтындықтан, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ қатары да жинақталмайды.

2 Мысал

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2} = \frac{4}{1^2} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{5^2} + \dots + \frac{4}{(2n-1)^2} + \dots$ қатарының жинақталуын зерттеу керек.

Шешуі.

$$4 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2}$ қатарының жинақталуын зерттеу үшін гармоникалық қатармен

салыстырамыз $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$

$\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} < \frac{1}{n^2}$ ($n=1,2,3,\dots$) болатындықтан және Жинақталудың 1-салыстыру

белгісі бойынша /гармоникалық қатар жинақталмайтындықтан/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2}$

қатары да жинақталмайды

3 Мысал

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(3n-1)^2} + \dots$ қатарының жинақталуын зерттеу керек

Шешуі. Берілген қатарды геометриялық қатармен салыстырамыз

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Жинақталудың 1-салыстыру белгісі бойынша $\frac{1}{(n-\frac{1}{3})^2} < \frac{1}{n^2}$ ($n=1,2,3,\dots$).

Геометриялық қатар жинақталатындықтан, берілген $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(3n-1)^2} + \dots$ қатар жинақталады

4 Мысал :

Жинақталудың Даламбер белгісі бойынша $1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot (\frac{1}{3})^2 + 4 \cdot (\frac{1}{3})^3 + \dots$ қатарының жинақталуын зерттеу керек

Шешуі. Жалпы мүшесі $u_n = n(\frac{1}{3})^{n-1}$. Сонда $u_{n+1} = (n+1)(\frac{1}{3})^n$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1) \cdot (\frac{1}{3})^n}{n \cdot (\frac{1}{3})^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{3}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} < 1$$

Қатар жинақталады

5 Мысал :

Жинақталудың Даламбер белгісі бойынша $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$ қатарының жинақталуын зерттеу керек

Шешуі. Жалпы мүшесі $u_n = \frac{n}{2^n}$. Сонда $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$$

Қатар жинақталады

6 Мысал :

Жинақталудың Даламбер белгісі бойынша $\frac{1 \cdot 2}{10} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10^3} + \dots$

қатарының жинақталуын зерттеу керек

Шешуі. Жалпы мүшесі $u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)}{10^n}$.

Сонда $u_{n+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)(n+2)}{10^{n+1}}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)(n+2)}{10^{n+1}}}{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)}{10^n}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)(n+2)10^n}{10^{n+1}1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)} = \frac{n+2}{10};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{10} = \frac{1}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} n + 2 = \infty$$

Қатар жинақталмайды.

7 Мысал :

Жинақталудың Даламбер белгісі бойынша $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \dots$

қатарының жинақталуын зерттеу керек

Шешуі. Жалпы мүшесі $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n}$ Сонда

$$u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n \cdot (3n+3)}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n \cdot (3n+3)}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1) \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n \cdot (3n+3)} = \frac{2n+1}{3n+3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+3} = \frac{2}{3} < 1$$

яғни қатар жинақталады

8 Мысал :

Жинақталудың Коши белгісі бойынша $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$ қатарының

жинақталуын зерттеу керек

Шешуі. Жалпы мүшесі $u_n = \frac{n}{2^n}$;

Жинақталудың Коши белгісі бойынша

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1,$$

қатар жинақталады

9 Мысал .

Жинақталудың Коши белгісі бойынша $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2} + \frac{1}{(\ln 2)^3} + \frac{1}{(\ln 2)^4} + \dots$

қатарының жинақталуын зерттеу керек .

Шешуі. Жалпы мүшесі $u_n = \frac{1}{(\ln 2)^n}$;

Коши белгісі бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln 2)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} < 1$

қатар жинақталады

10 Мысал .

Жинақталудың Коши белгісі бойынша. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$

қатарының жинақталуын зерттеу керек

Шешуі. Жалпы мүшесі $u_n = \frac{1}{n^n}$; және Коши белгісі бойынша

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

қатар жинақталады

11 Мысал .

Жинақталудың Коши белгісі бойынша.

$(\frac{5}{2} \cdot 4) + (\frac{7}{3} \cdot 4)^2 + (\frac{9}{4} \cdot 4)^3 + (\frac{11}{5} \cdot 4)^4 + \dots$ қатарының жинақталуын зерттеу керек

Шешуі. Жалпы мүшесі $u_n = (\frac{3+2n}{n+1})^n$;

және $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(\frac{3+2n}{n+1})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2n}{n+1} = 2 > 1$

Қатар жинақталмайды.

Бақылау сұрақтары мен тапсырмалар:

1. Сандық қатардың анықтамасы.
2. Сандық қатардың жалпы мүшесін қалай атайды?
3. Қатардың қандай қосындысын n-ші дербес қосынды деп атайды?
4. Қандай қатарды гармоникалық деп атайды?
5. Қандай қатарды геометриялық прогрессияның қатары деп атайды?
6. Қандай қатарды жинақталатын деп атайды?
7. Даламбер белгісін шектік түрде дәлелдеңіз.

8. Коши белгісін дәлелдеңіз
9. Коши-Маклорен интегралдық белгісін дәлелдеңіз.
10. Қандай қатар абсолютті жинақталады?
11. Қандай қатар шартты жинақталады?
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}$ қатарының абсолютті жинақтылығына зертте.
13. Риман теоремасын келтір және дәлелде .
14. Коши теоремасын келтір және дәлелде.
15. Қандай қатар ауыспалы таңбалы деп аталады?
16. Коши критерийін келтір және дәлелде.

2 Функциялық тізбектер мен қатарлар

2.1 Функциялық тізбектер мен қатарлардың жинақталуы

$$f_n(x), n=1,2,\dots \quad (2.1)$$

функциялық тізбегін және сәйкес

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \quad (2.2)$$

функционалдық қатарды қарастырайық.

Егер x аргументін бекітсек, бұл функциялық тізбек пен қатар сандық тізбек пен қатарға айналады.

E -қандайда элементтер жиыны болсын, ал (2.1) E жиынында анықталған функциялық тізбек болсын.

Анықтама 1 Егер кез келген $x \in E$ және барлық $n=1,2,\dots$ үшін $|f_n(x)| \leq M$ теңсіздігі орындалатындай $M > 0$ тұрақтысы бар болса, онда (2.1) тізбегі E жиынында шенелген деп аталады.

$$|f_n(x)| \leq M$$

Анықтама 2 Егер кез келген $x \in E$ және барлық $n=1,2,\dots$ үшін $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ ($f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$) теңсіздігі орындалса, онда (2.1) тізбегі E жиынында монотонды кемімелі (өспелі) деп аталады.

Бұл анықтамада $f_n(x), n=1,2,\dots$, функциялары нақты мән қабылдайды деп саналады.

Анықтама 3 Егер $\{f_n(x_0)\}$ жинақты сандық тізбек болса, онда (2.1) тізбегі $x_0 \in E$ нүктесінде жинақты деп аталады.

Егер (2.1) тізбегі E жиынының әрбір нүктесінде жинақталса, онда ол E жиынында жинақты деп аталады.

Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in E$ орындалса, онда (2.1) тізбегі $f(x)$, $x \in E$ функциясына жинақталады деп аталады.

(2.2) қатары үшін ұқсас анықтамалар беруге болады.

Анықтама 3' Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сандық қатар жинақты болса, онда (2.2) қатары жинақты деп аталады.

Егер (2.2) қатары E жиынының әрбір нүктесінде жинақталса, онда ол E жиынында жинақты деп аталады.

Анықтама 4. Егер E жиынында $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ қатары жинақты болса, онда (2.2) қатары E жиынында абсолютті жинақты деп аталады.

Сандық қатарларға ұқсас, $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, $n=1,2,\dots$, қосындысы (2.2) қатарының n -ші дербес қосындысы деп аталады, ал E жиынында жинақты

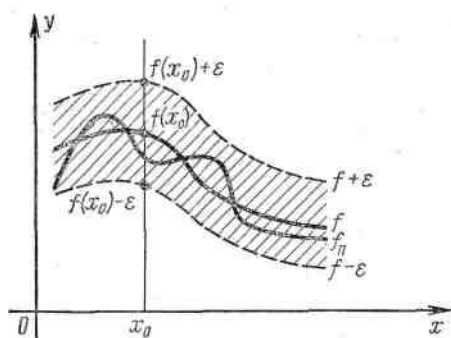
(2.2) қатарының дербес қосындысының шегі $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ қатардың қосындысы деп аталады.

Функциялық тізбектер мен қатарлардың бірқалыпты жинақталуы

Анықтама 5 (2.1) функциялық тізбегі және f функциясы берілсін. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін n_ε нөмірі табылып, $n \geq n_\varepsilon$ болғанда

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

теңсіздігі орындалса, онда (2.1) функциялық тізбегі E жиынында f функциясына бірқалыпты жинақталады деп аталады.



Сурет 1- ε -аймағы

Егер функциялық $\{f_n\}$ тізбегі E жиынында f функциясына бірқалыпты жинақталса, онда $f_n \rightarrow f$, E жиынында бірқалыпты жинақты деп белгілейміз.

Егер (2.1) функциялық тізбегі E жиынында f функциясына жай жинақталса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ саны және кез келген $x \in E$ үшін ε мен x тәуелді $n_0 = n_0(\varepsilon; x)$ нөмірі табылып, $n \geq n_0$ болғанда (2.3) теңсіздігі орындалады.

Ал бірқалыпты жинақтылық кезінде кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін n_ε нөмірін тек қана ε санына тәуелді және $x \in E$ тәуелсіз етіп таңдалады және $n \geq n_0$ болғанда (2.1) теңсіздігі E жиынының барлық нүктелерінде орындалады, яғни f_n функцияларының «графиктері» f функциясының графигінің айналасында, яғни « ε -аймағында» орналасады. (Сурет 1)

Сонымен бірқалыпты жинақтылық кезінде кез келген $\varepsilon > 0$ саны және барлық жеткілікті үлкен n , $n \geq n_\varepsilon$ үшін E жиынында қателігі ε -нан кіші болатындай f_n функцияларының мәндерін f функциясымен жуықтауға болады.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \quad (2.4)$$

қатарын (2.1) қатарының n -ші қалдығы деп атайды.

Егер (2.1) қатары E жиынында жинақталса, онда (2.1) қатарының n -ші қалдығы да E жиынында жинақталады. Бұл жағдайда (2.2) қатарының қосындысын $r_n(x)$ деп белгілесек, онда $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$.

Сандық қатарлар теориясының анықтамасына сәйкес әрбір функциялық қатар өзінің дербес қосындыларының тізбегі болып табылады:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), n = 1, 2, \dots$$

Әрбір (2.2) функциялық тізбегінің мүшелері қатардың дербес қосындыларының тізбегі болатындай (2.2) қатары бар болады. Бұл қатардың мүшелері $u_1(x) = f_1(x), u_2(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), n = 2, 3, \dots$ теңдіктері арқылы біркәлпті анықталады.

Яғни функциялық қатарлар үшін теоремаларды функциялық тізбектер үшін және керісінше құрып дәлелдеуге болады.

Теорема 1 (Тізбектің біркәлпті жинақталуының Коши критеріі) $f_n, n = 1, 2, \dots$, функциялық тізбегі E жиынында біркәлпті жинақталуы үшін кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін n_ε нөмірі табылып, барлық $n \geq n_\varepsilon$, бүтін $p \geq 0$ және барлық $x \in E$ үшін

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad (2.5)$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Кейде тізбектің біркәлпті жинақталуының қарапайым жеткілікті шарттарын қолдану тиімді болады.

Теорема 2 (Вейерштрасс белгісі). $f_n, n = 1, 2, \dots$, функциялық тізбегі берілсін. Егер

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, a \geq 0, \quad (2.6)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $\{a_n\}$ сандық тізбегі табылып, барлық $n = 1, 2, \dots$, және барлық $x \in E$ үшін

$$|f(x) - f_n(x)| \leq a_n, \quad (2.7)$$

теңсіздігі орындалса, онда $\{f_n\}$ функциялық тізбегі E жиынында f функциясына біркәлпті жинақталады.

Дәлелдеу. (2.7) шарты бойынша кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін n_ε нөмірі табылып, $n \geq n_\varepsilon$ болғанда $a_n < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады.

(2.7) шарты бойынша барлық $n = 1, 2, \dots$, және барлық $x \in E$ үшін $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, теңсіздігі орындалады, ал бұл $\{f_n\}$ функциялық тізбегінің E жиынында f функциясына біркәлпті жинақталуын білдіреді.

Қатарлар үшін де біркәлпті жинақталу ұғымын енгізуге болады

Анықтама 6 Егер

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (2.8)$$

функциялық қатарының дербес қосындыларының тізбегі E жиынында бірқалыпты жинақты болса, онда (3.8) функциялық қатары E жиынында бірқалыпты жинақты болады.

Сонымен, (2.8) функцияналдық қатарының E жиынында бірқалыпты жинақтылығынан

$$s_n(x) \rightarrow s(x). \quad (2.9)$$

(2.7) болатындай $s(x)$ функциясының бар болуын білдіреді.

(2.7) теңдігінен $s_n(x) \rightarrow s(x)$, E болғандықтан $s(x)$ функциясы (2.8) қатарының қосындысы болады.

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

болсын

Онда $s(x) - s_n(x) = r_n(x)$ және (2.7) шартына эквивалентті :

$r_n \rightarrow 0$, E жиынында бірқалыпты жинақты (2.7) түрімен ауыстыруға болады. Сондықтан (2.6) функциялық қатары E жиынында бірқалыпты жинақты болуы үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |r_n(x)| = 0. \quad (2.10)$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

(2.9) және (2.10) шарттарының эквиваленттілігін дәлелдейміз.

Шынымен, (2.9) шарты орындалса, онда $\varepsilon > 0$ саны үшін n_ε нөмірі табылып, барлық $n \geq n_\varepsilon$ және барлық $x \in E$ үшін $|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздігі орындалады. Бұдан барлық $n \geq n_\varepsilon$ үшін $\sup_{x \in E} |r_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, орындалады, ал бұл (2.10) шартына тіреледі. Керісінше (2.10) шарты орындалса, онда $\varepsilon > 0$ саны үшін n_ε нөмірі табылып, барлық $n \geq n_\varepsilon$ және барлық $x \in E$ үшін $\sup_{x \in E} |r_n(x)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады, ал бұдан барлық $n \geq n_\varepsilon$ және барлық $x \in E$ үшін $|r_n(x)| < \varepsilon$, теңсіздігі орындалады, ал бұл (2.9) шартына тіреледі. Тұжырым дәлелденді.

$$s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x),$$

болатындығын ескеріп, теорема 1 қолданып, қатардың жинақталуының критеріін аламыз

Теорема 5 (қатардың бірқалыпты жинақталуының Коши критеріі)

(2.8) функциялық қатарының E жиынында бірқалыпты жинақты болуы үшін кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін n_ε нөмірі табылып, барлық $n \geq n_\varepsilon$, бүтін $p \geq 0$ және барлық $x \in E$ үшін

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad (2.11)$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Салдар (қатардың бірқалыпты жинақталуының қажетті шарты).

Егер (2.6) функциялық қатары E жиынында бірқалыпты жинақталса, онда

$$u_n(x) \rightarrow 0, \quad (2.12)$$

E жиынында бірқалыпты жинақталады

(2.11) шартында $p = 0$ деп алсақ, онда (2.12) шартына келеміз.

Кейде қатардың бірқалыпты жинақталуының қарапайым жеткілікті шарттарын қолдану тиімді болады.

Теорема 4 (Вейерштрасс белгісі). Мүшелері E жиынында анықталған $u_n(x)$ функциялар болатын (2.6) функциялық қатары мен келесі сандық қатар берілсін:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0, n = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Егер (2.13) қатары жинақталса және

$$|u_n(x)| \leq a_n, n = 1, 2, \dots, \quad (2.14)$$

теңсіздігі орындалса, онда (2.6) функциялық қатары E жиынында бірқалыпты және абсолютті жинақталады.

Абсолютті жинақсыз болатын қатарға қолдануға болатын қатардың бірқалыпты жинақталуының жеткілікті белгісін қарастырайық.

Теорема 5 (Дирихле белгісі).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x), \quad (2.15)$$

қатары берілсін, мұндағы $a_n(x)$ және $b_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, функциялары E жиынында анықталған және келесі шарттарды қанағаттандырсын:

1) $\{a_n(x)\}$ тізбегі әрбір $x \in E$ үшін монотонды және E жиынында нөлге бірқалыпты жинақталсын;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, қатарының $B_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ дербес қосындылары E

жиынында шенелген болсын.

Онда (2.15) функциялық қатары E жиынында бірқалыпты жинақталады.

Теорема 6 (Абель белгісі). Егер:

1) $\{a_n(x)\}$ тізбегі E жиынында шенелген:

$$|a_n(x)| \leq M, x \in E, n = 1, 2, \dots,$$

және әрбір $x \in E$ үшін монотонды өспелі немесе кемімелі болса,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ қатары E жиынында бірқалыпты жинақталса,

онда (2.15) функциялық қатары E жиынында бірқалыпты жинақталады.

2.2 Бірқалыпты жинақталатын функциялық тізбектер мен қатарлардың қасиеттері

Теорема 7 Егер $u_n(x)$, $n=1,2,\dots$, функциялары $E \subset E^m$ жиынында үзіліссіз және $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатары E жиынында бірқалыпты жинақталса, онда оның қосындысы $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ E жиынында бірқалыпты жинақталады.

Теорема 8 Егер $u_n(x)$, $n=1,2,\dots$, функциялары $E \subset E^m$ жиынында үзіліссіз және $f_n \xrightarrow{\text{}} f$, E жиынында, онда f функциясы E жиынында үзіліссіз болады.

Бұл әрбір $x_0 \in E$ үшін

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f_n(x),$$

орындалуын білдіреді, яғни n және x бойынша алынған шектердің орнын ауыстыруға болады.

Теорема 9 $u_n(x)$, $n=1,2,\dots$, функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатары $[a,b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақталсын, онда кез келген $c \in [a,b]$ нүктесі үшін $\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t) dt$ қатары $[a,b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақталады. Егер

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

болса, онда

$$\int_c^x s(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t) dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Соңғы формуланы $\int_c^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t) dt$ түрінде жазсақ, онда

теорема шарттары орындалғанда қатарды мүшелеп интегралдауға болатындықты білдіреді.

Теорема 10 Егер $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f_n, n=1,2,\dots$, тізбегі сол кесіндісінде f функциясына бірқалыпты жинақталса, онда әрбір $c \in [a,b]$ нүктесі үшін $\int_c^x f_n(t) dt \xrightarrow{\text{}} \int_c^x f(t) dt$, $[a,b]$ орындалады.

Дербес жағдайда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x f_n(t) dt = \int_c^x \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right] dt.$$

Теорема 11 $u_n(x)$, $n=1,2,\dots$, функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалдансын және олардың туындыларынан құралған

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

қатары $[a, b]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақталсын.

Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатары ең болмағанда бір $c \in [a, b]$ нүктесінде жинақталса, онда ол $[a, b]$ кесіндісінде жинақталады, ал оның қосындысы

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

$[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданады және келесі теңдік орындалады:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Соңғы формуланы келесі түрде жазсақ,

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

теореманың шарттары орындалған кезде қатарды мүшелеп дифференциалдауға болатындықты білдіреді.

2.3 Дәрежелік қатардың жинақталу радиусы және жинақталу облысы

Анықтама 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (2.16)$$

түріндегі функцияналдық қатарлар, мұндағы a_n и z_0 - берілген комплекс сандар, ал z - комплекс айнымалы, дәрежелік қатарлар деп аталады. a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, сандары (2.16) дәрежелік қатарының коэффициенттері деп аталады.

Егер (2.16) қатарында

$$\zeta = z - z_0,$$

алмастыруын енгізсек, онда келесі қатарды аламыз:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad (2.17)$$

(2.16) қатарының жинақтылығын зерттеу (2.17) қатарының жинақтылығын зерттеуге эквивалентті екені анық, сондықтан алда (2.17) түріндегі қатарларда ζ айнымалысының орнына z -ті алатын боламыз.

Теорема 1 (Абель теоремасы). Егер

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (2.18)$$

дәрежелік қатары $z = z_0 \neq 0$ үшін жинақталса, онда ол $|z| < |z_0|$ болғандағы кез келген z -тер үшін абсолютті жинақталады.

Салдар. Егер (2.18) дәрежелік қатары $z = z_0$ болғанда жинақталмаса, онда ол $|z| > |z_0|$ болғандағы кез келген z -тер үшін де жинақталмайды.

Анықтама 2 $R \geq 0$ (R - сан немесе $+\infty$ символы) шамасы берілсін. Егер $|z| < R$ болатын барлық z -тер үшін (2.18) қатары жинақты, ал $|z| > R$ болатын барлық z -тер үшін (2.18) қатары жинақсыз болса, онда R санын (2.18) дәрежелік қатарының жинақталу радиусы деп аталады.

$|z| < R$ болғандағы, z нүктелер жиыны (2.18) қатарының жинақталу облысы деп аталады.

Теорема 2. Кез келген (2.18) дәрежелік қатарының R жинақталу радиусы бар болады. Жинақталу облысында, яғни $|z| < R$ болғандағы кез келген z -тер үшін (2.18) қатары абсолютті жинақталады. $|z| \leq r$ кез келген облысында (2.18) қатары бірқалыпты жинақталады (мұндағы r бекітілген және $r < R$).

Теорема 3 (Абель). Егер (2.18) дәрежелік қатары $z = R$ болғанда жинақталса, онда қатар $[0, R]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақталады.

Салдар. Егер (2.18) дәрежелік қатары $z = R$ болғанда жинақталса, онда оның қосындысы $[0, R]$ кесіндісінде үзіліссіз болады. Бұл тұжырымды әдетте Абельдің дәрежелік қатарлар туралы екінші теоремасы деп аталады.

Теорема 4. R саны

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

дәрежелік қатарының жинақталу радиусы болсын, онда оны

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad (2.19)$$

(2.19) Коши-Адамар формуласы деп аталады және осы формула арқылы радиусты табуға болады.

Аналитикалық функциялар

Анықтама 3 Егер $f(z)$ функциясы үшін $R > 0$ саны табылып, $|z - z_0| < R$ облысында ол (1.1) дәрежелік қатар түрінде өрнектелетін болса, яғни

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R, \quad (2.20)$$

теңдігі орындалатындай a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, комплекс сандары бар болса, онда $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде аналитикалық деп аталады

Аналитикалық функциялардың нүктедегі қосындысы, айырмасы және көбейтіндісі қайтадан сол нүктеде аналитикалық болады.

Лемма 1. Егер

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

оң R жинақталу радиусымен алынған (2.20) жинақталатын қатардың қалдығы болса, онда

$$r_n(z) = O((z - z_0)^{n+1}) \text{ при } z \rightarrow z_0,$$

және келесіні білдірді

$$r_n(z) = o((z - z_0)^n) \text{ при } z \rightarrow z_0,$$

Теорема 5. z_0 нүктесінде аналитикалық $f(z)$ функциясының (2.20) дәрежелік қатар түріндегі өрнектелуі жалғыз, яғни егер

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R, R > 0,$$

Онда

$$a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 6. Егер $R > 0$ саны

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (2.21)$$

дәрежелік қатарының жинақталу радиусы болса, онда:

1) f функциясының $(x_0 - R, x_0 + R)$ интервалында (2.21) қатарынан мүшелеп дифференциалдау арқылы табылатын кез келген ретті туындылары бар болады;

2) кез келген $t \in (x_0 - R, x_0 + R)$ үшін

$$\int_{x_0}^t f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(t - x_0)^{n+1}}{n+1},$$

яғни жинақталу интервалында дәрежелік қатарды мүшелеп интегралдауға болады;

3) (2.21) қатарын мүшелеп дифференциалдағаннан және интегралдағаннан шыққан дәрежелік қатарлардың және (2.21) қатарының жинақталу радиустары бірдей болады.

Теорема 7. Егер f функциясы x_0 нүктесінде аналитикалық болса, яғни сол нүктенің маңайында (2.5) қатары арқылы өрнектелсе және сол қатардың жинақталу радиусы $R > 0$ саны болса, онда

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

яғни

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

2.4 Элементар функциялардың Тейлор қатарына жіктелуі

Анықтама 1 f функциясы x_0 нүктесінің қандай да бір маңайында анықталсын және осы нүктеде оның кез келген ретті туындылары бар болсын. Онда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (2.22)$$

қатары f функциясының x_0 нүктесіндегі Тейлор қатары деп аталады.

Келесі сұрақ туындайды: $f(x)$ функциясының Тейлор қатары қай кезде қандай да бір интервалда $f(x)$ -ке жинақталады? Бұл сұраққа жауап беру үшін

кез келген $n = 0, 1, 2, \dots$ үшін орындалатын f функциясы үшін Тейлор формуласын жазайық

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x), \quad (2.23)$$

Бұл формулада $r_n(x)$ Тейлор формуласының қалдық мүшесін білдіреді.

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

деп (2.23) формуласын келесі түрде жазайық

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x), \quad (2.24)$$

мұндағы $s_n(x)$ - Тейлор қатарының n -ші дербес қосындысы.

Осыдан f функциясы қарастырылатын интервалда өзінің Тейлор қатарының қосындысына тең болу үшін, яғни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$$

орындалу үшін, осы интервалдан алынған барлық x -тер үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті. Егер ол орындалса, онда (2.23) формуласынан Тейлор формуласының $r_n(x)$ қалдық мүшесін, сонымен қатар (2.24) Тейлор формуласының қалдық мүшесінің қосындысына тең болатынын көреміз.

Енді функцияның дәрежелік қатарға жіктелуінің бір жеткілікті шартын көрсетейік.

Теорема 8. f функциясы және оның кез келген ретті туындылары $(x_0 - h, x_0 + h)$ интервалында шенелген болсын, яғни барлық $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ және барлық $n = 0, 1, 2, \dots$ үшін $M > 0$ тұрақтысы табылып

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad (2.25)$$

теңсіздігі орындалсын.

Онда $(x_0 - h, x_0 + h)$ интервалында f функциясы Тейлор қатарына жіктеледі, яғни

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < h, \quad (2.26)$$

Дәлелдеуі. a саны қандай болса да,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad (2.27)$$

екенін ескереміз.

Шынымен, n_0 келесі теңсіздік орныдалатындай болсын

$$\frac{|a|}{n_0} < \frac{1}{2},$$

Онда барлық $n \geq n_0$ үшін

$$\frac{|a|}{n} < \frac{1}{2},$$

СОНДЫҚТАН

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{a}{n_0+1} \cdot \frac{a}{n_0+2} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0},$$

мұндағы теңсіздіктің оң жағы $n \rightarrow \infty$ нөлге ұмтылады, осыдан (2.27) теңдігі шығады. Бұл теңдік $\frac{a^n}{n!}$ (выражение) өрнегі $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ жинақталатын қатардың жалпы мүшесі болып табылатындығынан шығады. (2.26) формуласын дәлелдеу үшін келесіге көз жеткізу жеткілікті

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0,$$

мұндағы $r_n(x)$ - Тейлор формуласындағы f функциясының қалдық мүшесі. $r_n(x)$ -ті Лагранж түрпатында алайық. (2.25) теңсіздіктерінен

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

шығады, мұндағы $|\xi - x_0| < |x - x_0| < h$. (2.27) сәйкес

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

онда $|x-x_0| < h$ болғанда (2.24) шарты орындалады.

Теорема дәлелденді.

Анықтама 2 f функциясы $x_0=0$ нүктесінің қандай да бір маңайында анықталсын және осы нүктеде оның кез келген ретті туындылары бар болсын. Онда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

қатары f функциясының $x_0=0$ нүктесіндегі Маклорен қатары деп аталады.

Маклорен қатары Тейлор қатарының дербес түрі болып табылады

Кейбір негізгі элементар функциялардың Маклорен қатарына жіктелуін қарастырайық.

$f(x) = e^x$ **функциясының қатарға жіктелуі.**

$f^{(n)}(x) = e^x$ болғандықтан, онда кез келген бекітілген $h > 0$ үшін барлық $x \in (-h, h)$ және барлық $n = 0, 1, 2, \dots$ болғанда

$$0 < f^{(n)}(x) < e^h,$$

Осылайша, 8- теореманың шарттары орныдалды ($x_0 = 0$), сондықтан e^x функциясы Тейлор қатарына кез келген ақырлы интервалда жіктеледі, яғни барлық сандар осінде. Бұл жағдайда $f^{(n)}(0) = 1$ болғандықтан, онда бұл жіктелу келесі түрге келеді

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.28)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ қатары барлық кешен жазықтығында абсолютті жинақталатындығын еске түсірейік. Барлық $z = x$ үшін оның қосындысы e^x тең екендігіне көз жеткіздік. z

комплекс болған жағдайда оның қосындысын сәйкесінше e^z деп белгілейді; осылайша

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

формуласы z комплекстілер үшін e^z функциясының анықтамасы болып табылады.

shx және chx функцияларының қатарға жіктелуі.

(2.28) формуласында x -ті $-x$ -ке алмастырып (бұл жай белгілеуді ауыстыру), келесіні аламыз

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

Бұл формулалардың оң жақтарында функцияларды дәрежелік қатарларға жіктеудің жалғыздығына байланысты chx және shx функцияларының Тейлор қатарлары тұр.

$\sin x$ және $\cos x$ функцияларының қатарға жіктелуі. Эйлер формулалары.

Егер $f(x) = \sin x$, онда $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, сондықтан $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ барлық x -

тер үшін орындалады. 8-ші теоремаға сәйкес, $\sin x$ функциясы дәрежелік қатарға барлық сандар осінде жіктелетіндігі шығады. Синус үшін Тейлор формуласын еске алсақ, $\sin x$ үшін Тейлор қатарын аламыз

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

Сәйкесінше косинус үшін Тейлор қатары

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

дәл солай барлық сан осінде жинақталады.

$\ln(1+x)$ функциясының қатарға жіктелуі.

$\ln(1+x)$ үшін Тейлор формуласы келесі түрде болады

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

$r_n(x)$ қалдық мүшесін Лагранж формуласында жазайық.

$$[\ln(1+x)]^{(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

ескеріп

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1,$$

аламыз.

$$\text{Егер} \quad 0 \leq x \leq 1, \text{ онда} \quad 0 < \frac{1}{1+\theta x} \leq 1,$$

және сондықтан

$$|r_n(x)| < \frac{1}{n+1}$$

және жеке жағдайда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0, \quad (2.29)$$

Егер $-1 < x < 0$, онда $r_n(x)$ қалдық мүшесін Коши түрінде жазуға ыңғайлы:

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Бұл жағдайда

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1$$

және

$$\frac{1}{1+\theta x} = \frac{1}{1-\theta|x|} < \frac{1}{1-|x|},$$

сондықтан

$$|r_n(x)| \leq \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n \cdot \frac{1}{|1-\theta x|} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

$-1 < x < 0$ болғанда (2.29)-ді аламыз.

Осылайша,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad (2.30)$$

барлық $x \in (-1; 1]$ үшін.

$x = -1$ болғанда (2.30) теңдігінің оң жағындағы қатар гармоникалық қатардан тек -1 көбейткішімен ғана ерекшеленеді, сондықтан жинақталмайды. $|x| > 1$ болғандағы барлық x -тер жинақталмайды, немесе бұл жағдайда (2.30) қатарының n -ші мүшесі нөлге ұмтылмайды, сонымен қатар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n} \right| = +\infty.$$

$(1+x)^\alpha$ биномының қатарға жіктелуі.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Бақылау сұрақтары мен тапсырмалар:

- 1 Қандай тізбекті функциялық тізбек деп атайды ?
- 2 Қандай қатарды функционалдық қатар деп атайды ?
- 3 Нүктеде, жиында жинақталатын функциялық тізбектің (қатардың) анықтамаларын беріңіздер.
- 4 Қандай қатар жиында абсолютті жинақты деп аталады ?
- 5 Жиында бірқалыпты жинақталатын функциялық тізбектер мен қатарлардың анықтамаларын беріңіздер.

6 Функциялық тізбектер мен қатардың бірқалыпты жинақталуының Коши критеріін дәлелдеңіз.

7 Функциялық тізбектер мен қатардың бірқалыпты жинақталуының Вейерштрасса белгісін дәлелдеңіз.

8 Функциялық тізбектер мен қатардың бірқалыпты жинақталуының Дирихле және Абель белгілерін дәлелдеңіз

9 Қандай қатарды дәрежелік қатар деп атайды?

10 Қатардың жинақталу радиусының анықтамасын беріңдер.

11 Қатардың жинақталу облысының анықтамасын беріңдер.

12 Коши-Адамар формуласын жазыңдар.

13 Қандай функциялар аналитикалық деп аталады?

14 Қандай шарттар орындалғанда дәрежелік қатарды мүшелеп дифференциалдауға және интегралдауға болады?

15 Қандай қатарды Тейлор қатары деп атайды?

16 Келесі функциялардың Тейлор қатарына жіктелуін жазыңдар: e^x , shx , chx , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$

3 Дифференциалдық теңдеулерді дәрежелік қатарлардың көмегімен интегралдау

3.1 Коши есебінің туралы теорема

Нормальді түрдегі бірінші ретті теңдеуден бастайық. Коши есебі

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (3.1)$$

түрінде берілген болсын.

Егер f функциясы (x_0, y_0) нүктесінде голоморфты болса, онда (3.1) Коши есебі x_0 нүктесінде голоморфты және жалғыз шешімі бар болады. Бұл шешім (3.1) түрінде болады.

x_0, y_0 бастапқы берілгендерді $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ нөлдік деп санауға болады, немесе бұған $x - x_0 = \xi, y - y_0 = \eta$ түрлендірулері арқылы келуге болады. Осылайша, (3.1) Коши есебінің орнына

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (0) = 0 \quad (3.2)$$

есебін қарастыруға болады.

Коши теоремасы Егер f функциясы $(0, 0)$ нүктесінде голоморфты, яғни

$$f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \quad |x| < p, \quad |y| < r \quad (3.3)$$

жіктелуі орын алады, онда (3.0) Коши есебінің

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k, \quad |x| < p_1 < p \quad (3.4)$$

0 нүктесінде голоморфты жалғыз шешімі бар.

Дәлелдеуі: Теореманың тұжырымы дәлелденеді, егер барлық C_k коэффициенттері (жалғыз түрде) табылса және (3.3) қатар берілген 0 нүктесінің аймағында жинақталады. Осыған байланысты дәлелдеуді

2 бөлікке бөлеміз.

I бөлім ((3.4) формальді (жалғыз) шешімді құру). (3.4) шешімді анықталмаған коэффициенттер тәсілімен іздейміз. (3.2) қатарды

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n \quad (3.5)$$

теңдеуіне қойып,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k C_k x^{k-1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k \quad (3.6)$$

аламыз.

(3.6) теңдігінен тепе-теңдік немесе (3.4) қатар (3.5) дифференциалдық теңдеудің шешімі және бірдей x дәрежеде коэффициенттерді теңестіре

$$x^0: 1 \cdot C_1 = a_{00} \Rightarrow C_1 = a_{00}$$

$$x^1: 2 \cdot C_1 = a_{10} + a_{01} C_1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2} (a_{10} + a_{01} a_{00}) = p_2(a_{\lambda\mu})$$

аламыз.

Дәл осылай x^{n-1} болғанда (3.6)-дегі коэффициенттерді теңестіріп,

$$C_k = p_k(a_{\lambda\mu}) \quad (3.7)$$

табамыз, мұндағы p_2 - өз аргументтері бойынша оң коэффициенттерімен (p_2 -де бұл коэффициенттер $\frac{1}{2}$ -ге тең) алынған полином.

Осылайша (3.4) формальді шешім құрылды. C_k анықтамасының жалғыздығынан, егер (3.1) Коши есебінің голоморфты шешімі табылса, онда ол жалғыз екені шығады.

II бөлім. Ал енді (3.2) қатар 0 нүктесінің кейбір аймағында жинақталатындығын дәлелдейік. Ол үшін (3.2) қатарды мажорлайтын, яғни

$$|C_k| \leq \overline{C_k} \quad (k=1, 2, \dots)$$

болатын

$$\begin{aligned} |x| &< p_1 \\ |x| &< p_1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

кейбір аймағында жинақталатын оң коэффициентті

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{C_k} x^k$$

дәрежелік қатарын құру жеткілікті. Онда (3.2) қатар дәл сол (3.8) аймақта шартты түрде жинақталады.

(3.2) қатарды құру үшін

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(0) = 0, \quad (3.9)$$

мажорантты Коши есебін қарастырамыз. Мұндағы $F(x, y) = f(x, y)$ функциясының кейбір мажорантасы.

$F(x, y)$ -тің орнына Коши мажорантасын аламыз, мұндағы

$0 < p' < p$, $0 < r' < r$, ал $M = (|x| < p, |y| < r$ аймағында (3.1) қатардың абсолютті жинақтылығымен жинақталатын)

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}| p'^m r'^n = M \quad (3.10)$$

қатардың қосындысы.

F мажорантасы (3.10) шығатын

$$|a_{mn}| \leq \frac{M}{p'^m r'^n} \equiv A_{mn}$$

жинақталатын (3.4) дәрежелік қатары Коши бағалауы негізінде құрылады.

Қатарды x және y дәрежелерімен A_{mn} коэффициенттерімен алғанда

$$\begin{aligned} \sum A_{mn} x^m y^n &= \sum \frac{M}{p'^m r'^n} x^m y^n = M \sum \left(\frac{x}{p'} \right)^m \left(\frac{y}{r'} \right)^n = \\ &= \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{p'} \right) \left(1 - \frac{y}{r'} \right)} \equiv F(x, y) \quad (|x| < p', |y| < r') \end{aligned}$$

шығады.

Мажорантты (3.9) Коши есебі келесі түрге келеді:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{p'}\right)\left(1 - \frac{y}{r'}\right)}, \quad y(0) = 0 \quad (3.11)$$

(3.11) есебіне кіретін дифференциалдық теңдеу (3.10) есептің теңдеуі үшін мажорантты теңдеу деп аталады.

(3.11) мажорантты есебінің жалғыз ғана шешімі бар болады. Соны анықтайық. Мажорантты теңдеуді интегралдаймыз.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\bar{y}}{r'}\right) d\bar{y} &= \frac{M}{1 - \frac{x}{p'}} dx \\ -\frac{r'}{2} \left(1 - \frac{\bar{y}}{r'}\right)^2 &= -Mp' \ln\left(1 - \frac{x}{p'}\right) + C \end{aligned} \quad (3.12)$$

$\bar{y}(0) = 0$ бастапқы шартты қанағаттандырырып, $C = -\frac{r'}{2}$ табамыз. Осы C мәнін (3.12)ге қойып және екі жағын $\left(-\frac{2}{r'}\right)$ -ке көбейтеміз.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\bar{y}}{r'}\right)^2 &= 1 + \frac{2Mp'}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{p'}\right) \\ \bar{y} &\text{ қатысты шешеміз.} \\ \bar{y} &= r' \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2Mp'}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{p'}\right)}\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Бұл шешім екі голоморфты функциялардың суперпозициясы сияқты 0 нүктесінде голоморфты.

$$\sqrt{1 + \alpha}, \quad \alpha = \frac{2Mp'}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{p'}\right)$$

Осылайша, (3.13) шешім келесі түрге келтіріледі:

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k x^k \quad (3.14)$$

Мұндағы қатар 0 нүктесінің кейбір аймағында жинақталады (голоморфты функцияның анықтамасы бойынша). (3.14) қатардың жинақталу облысын бағалайық.

Белгілі Абель теоремасына сәйкес x -тің оң мәндерін зерттеумен шектелу жеткілікті. Логарифмдік және биномиалдық қатарлардың жинақталу радиусы бірге тең болса, онда x -тің қабылдайтын мәндері

$$\left. \begin{aligned} 0 < x < p' \\ -\frac{2Mp'}{r'} \ln\left(1 - \frac{x}{p'}\right) < 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

екі теңсіздіктің жүйесін қанағаттандыру керек. Соңғы теңсіздік $|\alpha| < 1$ теңсіздігінен шығып отыр ($\alpha < 0$).

(3.15) теңсіздігінің екіншісін шығарсақ.

$$\ln\left(1 - \frac{x}{2Mp'}\right), \quad 1 - \frac{x}{p'} < e^{-\frac{r'}{2Mp'}} \\ x < p' \left(1 - e^{-\frac{r'}{2Mp'}}\right)$$

(3.15) теңсіздігінің біріншісі автоматты түрде орындалады. Осылайша (3.14) қатар

$$|x| < p_1 = p' \left(1 - e^{-\frac{r'}{2Mp'}}\right) \quad (3.16)$$

облысында жинақталады.

Енді (3.14) қатарының барлық коэффициенттері оң және (3.16) шарт орын алатындығын көрсетеміз.

Бірақ бұл C_k -ны тапқан алгоритм сияқты, яғни $\overline{C_k}$ -ны анықталмаған коэффициенттер тәсілімен табуға болады.

$$\overline{C_k} = P_k(A_{\lambda\mu}) \quad (3.17)$$

мұндағы P_k - (3.15)-тегідей полиномдар, бірақ аргументтері басқа: f функциясының жіктелісінің коэффициенттері емес, ал F мажорантасының жіктелісінің коэффициенттері. (3.16) формуласынан P_k полиномдарының коэффициенттерінің оң болатындығына және (3.14) бағалауына сәйкес барлық $\overline{C_k}$ (3.16) бағалауы бойынша орын алады.

Осылайша (3.14) қатар формальді шешімді мажорлайды.

3.2 Қатар түріне келтірілген сызықтық теңдеудің шешімі

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x) \equiv f(x, y) \quad (3.17)$$

нормальді түрде жазылған сызықтық теңдеуді қарастырайық.

Бұл теңдеудің оң жағындағы $f(x, y)$ y -ке қатысты сызықтық функция бола тұра

$$y_0 : y = y_0 + (y - y_0)$$

кез келген нүктесінде y -ке қатысты голоморфты. Сондықтан Коши теоремасының шарттары орындалу үшін y_0 -ді кез келген деп алып, p және q -ді x_0 нүктесінде голоморфты етіп алу жеткілікті. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ деп болжаймыз.

Сонымен

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x), \quad y(0) = 0 \quad (3.18)$$

Коши есебі тұрғызылған болсын.

p және q 0 нүктесінде голоморфты деп болжаймыз:

$$\begin{cases} p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \\ q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \end{cases} \quad |x| < p \quad (3.19)$$

Тұжырым. (3.18) Коши есебінің 0 нүктесінде голоморфты жалғыз шешімі бар болады; сонымен қатар бұл шешімді құратын (3.2) қатары p және q функциялары құратын (3.19) қатары сияқты

$$|x| < p \quad (3.20)$$

облысында жинақталады.

Бұл тұжырымды жалпы жағдайдағыдай дәлелдйміз. Сонымен бірге (3.17) теңдеудің сызықтығына байланысты одан да кең облыста анықталған мажорантаны алуға болады. Бұл (3.20) облысында (3.4) шешімнің жинақтылығы шығады.

Алдымен анықталмаған коэффициенттер тәсілімен (3.4) формальді шешімді құрамыз.

$$C_k = P_k(p_\lambda, q_\mu) \quad (3.21)$$

(3.14) қатардың жинақтылығын дәлелдеу үшін (3.21) мажорантты Коши есебін қолданамыз, мұндағы F - (3.17) функциясының мажорантасы. F мажорантасын құру үшін p және q функцияларын

$$\Phi(x) = \frac{M}{1 - \frac{x}{p'}}, \quad \Phi(x) = \frac{M}{1 - \frac{x}{p'}}, \quad |x| < p', \quad |x| < p' \quad |x| < p' \quad (3.22)$$

(мұндағы M - қандай да бір оң сан)

жалпы мажорантасымен алмастыруға болады.

Шынымен, ρ -дан кіші ρ' оң санын алып

$$\sum |P_k| \rho'^k = M_1, \quad \sum |q_k| \rho'^k = M_2$$

Сондықтан

$$|P_k| \leq \frac{M_1}{\rho'^k}, \quad |q_k| \leq \frac{M_2}{\rho'^k}$$

және

$$\sum \frac{M_1}{\rho'^k} x^k = \frac{M_1}{1 - \frac{x}{\rho'}}; \quad \sum \frac{M_2}{\rho'^k} x^k = \frac{M_2}{1 - \frac{x}{\rho'}}$$

қатарлары (3.17) қатарларды мажорлайды. Сол себепті p және q үшін жалпы мажорантасы ретінде (40) функцияны алуға болады, мұндағы $M = \max(M_1, M_2)$

Сонымен

$$F(x, y) = \Phi(x)y + \Phi(x) = \Phi(x)(y+1)$$

немесе

$$F(x, y) = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} (y + 1), \quad |x| < \rho'$$

Осылайша мажорантты Коши есебі ретінде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} (y + 1), \quad y(0) = 0$$

алуға болады.

Бұл есепті шығарғаннан кейін

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} dx, \quad \ln(y+1) = -M\rho' \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) + C$$

$$(y(0) = 0 \Rightarrow C = 0), \quad \ln(y+1) = -M\rho' \ln\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)$$

Осыдан

$$y+1 = \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)^{-M\rho'}$$

$$y = -1 + \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)^{-M\rho'}$$

Алынған шешім 0 нүктесінде голоморфты:

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k x^k, \quad |x| < \rho' \quad (3.23)$$

Коши теоремасындағы жалпы жағдайдағыдай (3.21) қолдансақ.

$$\bar{C}_k > 0, \quad |C_k| \leq \bar{C}_k (k = 1, 2, \dots)$$

Сонымен (3.23) қатар (3.2) формальді қатарды мажорлайды, осыдан (3.2) қатар $|x| < \rho'$ облысында жинақталады. Бірақ ρ' -та ρ -ға мейлінше жақын етіп алуға болады. Сондықтан (3.2) қатар (3.20) барлық интервалында Коши есебінің шешімін құрайды. Тұжырым дәлелденді.

Тәжірибеде сызықтық теңдеу үшін Коши есебінің голоморфты шешімін құру мүмкіндігі p және q функцияларының аналитикалық қасиеті мен аналитикалық құрылымына байланысты. Егер жеке жағдайда бұл функциялар полиномды болса, онда y_0 ғана емес, сонымен қатар x_0 -ді де қалағанымызша алуға болады, ал шешім болатын

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (x - x_0)^k \quad (3.24)$$

қатары x -тің барлық мәндерінде жинақталады. p және q $\frac{P(x)}{Q(x)}$ полиномдарының қатынасы болған жағдайда, x_0 -ді бөлімнің нөлі болмайтын (x_0 -дің тек қана осындай тандауында y_0 -дің орнына кез келген санды лауға болады) кез келген санды алуға болады; сонымен қатар (3.24) қатардың жинақталу радиусы x_0 -ден ең жақын бөлімдегі нөлдерге (комплексілерді қоса)

дейінгі арақашықтыққа тең. Егер p және q - кез келген бүтін функциялар (полином болу міндетті емес) болса, онда x_0 мен y_0 - кез келген және (3.24) қатар x -тің барлық мәндерінде жинақталады.

Белгіленген x_0 мен y_0 -ді таңдауда және (3.24) қатардың жинақталу облысына қатысты сызықтық теңдеулердің екі артықшылығы жалпы теорияны құруды жеңілдететін теориялық және қолданбалы мағынасы бар. Сызықтық емес теңдеулердің мұндай қасиеттері жоқ.

Дәлелденген Коши теоремасы және оның жағдайы дифференциалдық теңдеулердің нормальді жүйесі үшін де қолданылады.

(3.8) Коши есебі құрылған болсын.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_m}{dx} &= f_m(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_m(x_0) &= y_m^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

Барлық $f_m(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ нүктесінде голоморфты болсын; онда x_0 нүктесінде голоморфты болатын (3.8) Коши есебінің жалғыз шешімі табылады.

Коши есебінің сызықтық жүйесі

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_m}{dx} &= \sum P_{mi}(x)y_i + f_m \\ y_m(x_0) &= y_m^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

шешімін құрайтын Коши есебі $P_{mi}(x)$ және $f_m(x)$ қатарлары жинақталатын облыста жинақталады.

Жоғарғы ретті теңдеулер (және осындай теңдеулер жүйесі) үшін де Коши есебінің бар болатындығы және голоморфты шешімнің жалғыздығы туралы Коши теоремасы орын алады.

Нормальді түрдегі n -ші реті теңдеулер үшін Коши есебін қарастырайық.

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Егер f функциясы $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ нүктесінде голоморфты болса, онда Коши есебінің x_0 нүктесінде голоморфты жалғыз шешімі бар болады.

Сызықтық n -ші ретті теңдеу үшін

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Коши есебі $P_1, \dots, P_n$ және f функциялары x_0 нүктесінде голоморфты, ал $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ - кез келген сандар шарттарымен берілген Коши есебінің x_0 нүктесінде голоморфты шешімі табылады, ал осы шешімді құратын

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1!}(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} C_k (x - x_0)^k$$

қатар $P_1, \dots, P_n$ және f функциялары құрайтын қатар жинақталатын облыста жинақталады.

Бұл тұжырым Коши есебі сызықтық болатын сәйкес нормальды жүйесі үшін Коши есебінің теңдігімен шығады.

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\dots\dots\dots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -P_1(x)y_n - \dots - P_{n-1}(x)y_2 - P_n(x)y_1 + f(x) \\ y_1(x_0) &= y_0, \quad y_2(x_0) = y_0', \dots, y_n(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Бұл (сызықтық) жүйенің барлық коэффициенттері және f функциясы x_0 нүктесінде голоморфты. Ал онда (3.15) Коши есебінің ізделінді функциясының қандай да бастапқы мәндерін алмасақ та x_0 нүктесінде голоморфты болатын $y_1, \dots, y_n$ жалғыз шешімі табылады. Сонымен қатар $y_1 = y$ бар болады. Бұл шешім (3.15) қатар түрінде келтіріледі.

3.3 Біртекті екінші ретті сызықтық теңдеуді дәрежелік қатарлардың көмегімен шешу.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3.28)$$

біртекті 2-ші ретті сызықтық теңдеуді қарастырайық.

p және q коэффициенттері қандай да x_0 нүктесінде голоморфты деп болжаймыз, онда $p(x)$ және $q(x)$ коэффициенттері осы нүкте аймағында қандай да $|x - x_0| < \rho$ облысында жинақталатын $x - x_0$ дәрежесімен алынған қатарлар түрінде келтіріледі. Сол себепті Коши теоремасын пайдаланып осы нүктеде голоморфты фундаменталды шешімдер жүйесін құруға болады, яғни голоморфты шешімдерден тұратын – сызықтық кеңістіктер шешімінің голоморфты базисін.

Сонымен, (3.28) теңдеудің коэффициенттерінің голоморфтылығына қатысты соңғысын дәрежелік қатарлар арқылы интегралдай аламыз.

Осының бір мысалын қарастырайық.

$$y'' + y = 0$$

теңдеуін дәрежелік қатарлар арқылы интегралдаңдар.

Алдымен 0 нүктесінде нормаланған (y_1, y_2) голоморфты базисін құрамыз. Бұл нүкте ($x \in R$ кез келген нүкте сияқты) y -тің мәніндегі коэффициенттердің голоморфтылығының нүктесі. Коши теоремасы сызықтық теңдеулер үшін бұл базистің бар болатындығын және жалғыздығына кепілдік береді; y_1 және y_2 функцияларын құратын қатарлар бүтін функциялар ретінде барлық x -тердің мәндерінде жинақталады. Бізге тек y_1 және y_2 құру қалады.

y_1 -ді келесі түрде құрамыз.

$$y_1 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(1)} x^k$$

C_k -ны y_1 функциясы үшін Тейлор коэффициенттері сияқты тізбектелген дифференциалдау тәсілімен іздейміз.

$$C_k^{(1)} = \frac{y^{(k)}(0)}{k!} \quad (k \geq 2)$$

Осылайша $y_1^{(k)}(0)$ іздеуге келеміз.

$$y_1'' = -y_1 \quad (3.29)$$

тепе-теңдігінен

$$y_1''(0) = -y_1(0) (y_1(0) = 1) \Rightarrow y_1''(0) = -1$$

табамыз. (3.29)-гі дифференциалдаймыз.

$$y_1''' = -y_1'$$

Осыдан

$$y_1'''(0) = -y_1'(0) (y_1'(0) = 0) \Rightarrow y_1'''(0) = 0$$

$$y_1^{(4)} = -y_1'' \Rightarrow y_1^{(4)}(0) = -y_1''(0) = -(-1) \Rightarrow y_1^{(4)}(0) = 1$$

Сондықтан

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \cos x$$

Дәл осылай

$$y_2 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots = \sin x$$

Пайымдағанымыз бойынша y_1, y_2 қатарлары барлық x -тің мәндерінде жинақталады, ал олардың қосындысы $\cos x$ және $\sin x$ - бүтін функциялар.

$\cos x$ және $\sin x$ функциялары 0 нүктесінде нормаланған голоморфты базисті құрайтындығына тексеру арқылы оңай көз жеткізуге болады.

Табылған голоморфты базисті пайдаланып

$$|x| < +\infty, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty \quad (3.30)$$

облысында

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

жалпы шешімін аламыз.

Қарастырылған дифференциалдық теңдеулерді интегралдау әдісі Коши теоремасына сүйеніп дифференциалдық теңдеулер жүйесіне де қолданылады. Бұл әдісті біртекті сызықтық теңдеулер жүйесіне қолдану ыңғайлы. Ол үшін біртекті сызықтық теңдеулердегідей жүйенің коэффициенттерінің голоморфтылығының қандай да бір нүктесінде голоморфты шешімдерінің фундаменталды жүйесін құру жеткілікті.

3.4 Полиномды және рационал коэффициентті дифференциалдық теңдеулерді қатарлар көмегімен шешу

Дифференциалдық теңдеулердің шешімі квадратураларда анықталатындығы өте сирек кездеседі.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (3.31)$$

теңдеуін қарастырамыз.

Мұндағы $p_1(x), p_2(x), f(x)$ функциялары r жинақталу радиусымен (яғни $|x - x_0| < r$ жинақталатын) x_0 нүктесі аймағында дәрежелік қатарларға жіктеледі:

$$p_1(x) = a_{10} + a_{11}(x - x_0) + a_{12}(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}(x - x_0)^k, \quad (3.32)$$

$$p_2(x) = a_{20} + a_{21}(x - x_0) + a_{22}(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}(x - x_0)^k, \quad (3.33)$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k, \quad (3.34)$$

x_0 нүктесін (3.31) теңдеуінің қарапайым нүктесі деп атайды. Жеке жағдайда, егер $a_0(x) \neq 0$ шарты орындалғанда (3.31) теңдеуін $a_0(x)$ бөлгенде орын алады. Олай болса

$$p_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad p_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$$

Коэффициенттері рационал функциялар болып табылады және жинақталу радиусы x_0 -ден $a_0(x)$ полиномының ең жақын нөліне дейін болатын дәрежелік қатарларға жіктеледі.

Теорема. x_0 нүктесінде аналитикалық коэффициенттерімен берілген (61) теңдеуі үшін Коши есебінің (3.32)-(3.34) қатарларының жинақталу радиусы сияқты

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k$$

дәрежелік қатары түрінде келтірілетін

$$y(x_0) = C_0, \quad y'(x_0) = C_1,$$

кез келген бастапқы шарттарымен берілген шешімі бар болады.

Дәлелдеуі:

Қарапайымдылық үшін $x_0 = 0$ деп алып және шешімді келесі қатар түрінде іздейміз.

$$y = C_0 + C_1(x) + \dots + C_n x^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k. \quad (3.35)$$

Дифференциалдаймыз.

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k C_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_{k+1} x^k, \quad (3.36 \text{ а})$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)k C_{k+1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) C_{k+2} x^k. \quad (3.36 \text{ б})$$

(3.36а) және (3.36б) өрнектеріне (3.33) және (3.35)) қатарларын көбейтеміз.

$$\begin{aligned} p_1(x) \cdot y'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_{k+1} x^k \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [a_{1k} C_1 + a_{1k-1} 2C_2 + \dots + a_{10} (k+1) C_{k+1}] x^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_{1k} x^k, \end{aligned}$$

$$p_2(x) \cdot y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_{2k} C_0 + a_{2k-1} C_1 + \dots + a_{20} C_k] x^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k} x^k.$$

(3.1) тендеуіне қойғаннан кейін келесі тендікке келеміз.

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)C_{k+2} + d_{1k} + d_{2k}] x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

$k \geq 2$ болған жағдайда C_k коэффициенттерін анықтау үшін x^k коэффициенттерін салыстыру келесі арқылы келесі қатынастарды аламыз:

[illegible]

d_{1k} және d_{2k} сандары $C_0, C_1, \dots, C_{k+1}$ коэффициенттері арқылы өрнектеледі. C_0 және C_1 коэффициенттері

$$C_0 = y(x_0) = c_0, \quad C_1 = y'(x_0) = c_1. \quad (3.38)$$

алғашқы шарттарынан анықталады.

Содан кейін (3.37) жүйесінің бірінші теңдеуінен C_2 , екіншісінен - C_3 және т.с.с. анықталады.

Бізге оң жақ бөлігі нөлдік, оның құрамындағы $a_0(x)$ көпмүшеліктің екінші реттен жоғары емес түбірлері болады, егер x_0 - екінші ретті түбір:

$$a_0(x) = (x - x_0)^2 \phi(x), \quad \phi(x_0) \neq 0 \quad (3.39)$$

болса, онда $a_1(x_0) = 0$. Көрсетілген шарттар бойынша (3.36 а) теңдеуін x_0 нүктесінің маңайында келесі түрде көшіруге болады.

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)h_1(x)y' + h_2(x)y = 0 \quad (3.40)$$

мұндағы $h_1(x), h_2(x)$ - рационал функциялар. x_0 нүктесінде аналитикалық (яғни x_0 нүктесінің кейбір аймағында жинақталатын дәрежелік қатарларға жіктелетін) $h_1(x), h_2(x)$ функцияларымен берілген (3.40) түріндегі жалпы теңдеуін қарастырайық.

Анықтама. Екінші ретті дифференциалдық теңдеу (3.40) түрі жазылатын болсын, мұндағы $h_1(x)$ және $h_2(x)$ функциялары x_0 нүктесінің кейбір аймағында жинақталатын

$$h_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad h_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

дәрежелік қатарларына жіктеледі. Онда x_0 нүктесі (3.40) теңдеуінің әлсіз сингулярлы нүктесі деп аталады, егер a_0, b_0, b_1 коэффициенттерінің ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болса.

Келесі теорема (3.40) теңдеуінің әлсіз сингулярлы нүкте маңайында жалпыланған дәрежелік қатар түріндегі шешімін береді. Алда ол арнайы түрдегі $h_1(x), h_2(x)$ рационал функциялар жағдайында қолданылады.

Теорема. x_0 нүктесінде әлсіз сингулярлығымен берілген $h_1(x), h_2(x)$ коэффициенттері $|x - x_0| < r$ болғанда

$$h_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad h_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

қатарлары түрінде келтірілетін

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) h_1(x) y' + h_2(x) y = 0 \quad (3.41)$$

теңдеуінің

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k, \quad C_0 \neq 0 \quad (3.42)$$

жалпыланған дәрежелік қатар түріндегі шешімі бар болады, мұндағы α - $\alpha(\alpha - 1) + a_0\alpha + b_0 = 0$ анықтаушы теңдеудің «үлкен» түбірі (3.42) дәрежелік қатары $|x - x_0| < r$ болғанда жинақталады.

Түсініктеме. Егер α_1, α_2 - анықтаушы теңдеудің түбірлері болса, онда α - ның орнына $\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_1) \geq 0, \operatorname{Re}(\alpha - \alpha_2) \geq 0$ орындалғандағы түбір алынады. Заттық және әр түрлі түбірлер жағдайында, бұл α - ең үлкен түбір дегенді білдіреді. Келесі материалды қабылдауда кедергі болмайтындай түбірлерін заттық деп санап және $(x - x_0)^\alpha$ дәрежесін α бүтін болмаған жағдайда келесі түрде түсіну керек:

$$(x - x_0)^\alpha = \begin{cases} (x - x_0)^\alpha, & x - x_0 > 0 \text{ болғанда} \\ |x - x_0|^\alpha e^{i\pi\alpha}, & x - x_0 < 0 \text{ болғанда} \end{cases}$$

Дәлелдеуі. Жалпылықты бұзбай $x_0 = 0$ деп санаймыз. (3.42)-ті (3.41) теңдеуіне қойып және соңғысында $h_1(x)$ пен $h_2(x)$ коэффициенттерін сәйкес қатарлармен алмастырамыз

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k + \alpha)(k + \alpha - 1)C_k + (k + \alpha)a_0C_k + (k + \alpha - 1)a_1C_{k-1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \alpha a_k C_0 + b_0C_k + b_1C_{k-1} + \dots + b_k C_0 \right] x^{k+\alpha} = 0 \quad (3.43)$$

C_k сандарын анықтау үшін $x^{k+\alpha}$ -ғы коэффициенттерді нөлге теңестіру керек. $k = 0$ болған жағдайда

$$\alpha(\alpha - 1)C_0 + \alpha a_0 C_0 + b_0 C_0 = C_0 [\alpha(\alpha - 1) + a_0\alpha + b_0] = C_0 Q(\alpha) = 0$$

Егер $C_0 = 0$ болса, онда тривиалды шешім шығатындығына оңай көз жеткізуге болады. Сондықтан $C_0 \neq 0$ (нақтылық үшін $C_0 = 1$ деп аламыз). α - ны келесі арақатынас арқылы анықтайық.

$$Q(\alpha) \equiv \alpha(\alpha - 1) + a_0\alpha + b_0 = 0 \quad (3.44)$$

(3.44) теңдеуін анықтаушы теңдеу деп атайық. α_1 және α_2 - (3.44) теңдеудің түбірлері болсын. Егер $\alpha_1 - \alpha_2$ айырымы бүтін сан болмаса, α кез келген түбір, керісінше жағдайда $\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_1), \operatorname{Re}(\alpha - \alpha_2)$ екі саны теріс болмайтын түбір (онда $\alpha + k$ кез келген $k \geq 1$ болғанда алып тасталған түбірмен сәйкес келемейді, осыдан $Q(\alpha + k) \neq 0$). Ондай таңдау коэффициенттерді табу үшін (3.43) теңдігінен туындайтын теңдеулердің құрылымымен анықталады:

[illegible]

$C_k, k \geq 1$ коэффициенті ретінде α -ны таңдаған кезде нөлге айналмайтын

шамасы тұр.

$$\begin{aligned} Q_k &= [(k-1+\alpha)a_1 + b_1]C_{k-1} + [(k-2+\alpha)a_2 + b_2]C_{k-2} + \dots + [\alpha a_k + b_k]C_0 = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} [(\alpha + j)a_{k-j} + b_{k-j}]C_j \end{aligned} \quad (3.46)$$

СЫЗЫҚТЫҚ ТҰРПАТЫ.

$$C_k = -\frac{Q_k}{Q(\alpha + k)}, \quad k \geq 1 \quad (3.47)$$

алынған $\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ қатарының жинақтылығын дәлелдейік. Алдымен

$$\begin{aligned} Q(\alpha+k) &= (\alpha+k)(\alpha+k-1) + (\alpha+k)a_0 + b_0 = \\ &= \alpha(\alpha-1) + \alpha a_0 + b_0 + k(2\alpha+k-1+a_0) = \\ &= Q(\alpha) + k(2\alpha+k-(\alpha_1-\alpha_2)) = k(k+(\alpha-\alpha_1)+(\alpha-\alpha_2)) \end{aligned} \quad (3.48)$$

ескерсек. $(Q(\alpha)=0 \text{ және } \alpha_1 + \alpha_2 = -(a_0 - 1))$.

$\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ мажорантты қатарын құрайық. $k \leq |\alpha_1 - \alpha_2|$ болғанда $p_k = |C_k|$ болсын. $k > |\alpha_1 - \alpha_2|$ болғанда

$$|C_k| = \frac{|Q_k|}{|Q(\alpha + k)|}$$

тендігіне сүйенеміз және (3.48) пайдаланамыз.

$$|Q(\alpha + k)| \geq k(k - |\alpha_1 - \alpha_2|)$$

Жоғарыдағы теоремадағыдай, $\rho < r$ болғанда $|a_n| < M\rho^{-n}$, $|b_n| < M\rho^{-n}$ шығатындай $M > 0$ табылады. (76) формуласын пайдаланып

$$|Q_k| \leq M[(k+|\alpha|)\frac{|C_{k+1}|}{\rho} + (k-1+|\alpha|)\frac{|C_{k-2}|}{\rho^2} + \dots + (1+|\alpha|)\frac{|C_0|}{\rho^k}]$$

аламыз.

Егер $\rho > |\alpha_1 - \alpha_2|$ болғанда

$$k(k - |\alpha_1 - \alpha_2|)p_k = M[(k + |\alpha|)\frac{p_{k-1}}{\rho} + (k - 1 + |\alpha|)\frac{p_{k-2}}{\rho^2} + \dots + (1 + |\alpha|)\frac{p_0}{\rho^k}], \quad (3.49)$$

онда осы қатынаспен анықталған p_k сандары үшін $p_k \geq |C_k|$ аламыз. Осыдан (3.49) теңдеуінен

$$\rho^k(k - |\alpha_1 - \alpha_2|)p_k - (k-1)(k-1 - |\alpha_1 - \alpha_2|)p_{k-1} = M(k + |\alpha|)p_{k-1},$$

бұдан $k \rightarrow \infty$ $\frac{p_{k-1}}{p_k} \rightarrow \rho$. Бұл $|x| < \rho$ болғанда $\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ мажорантты қатары жинақталады, сонымен бірге $|x| < \rho$ болғанда $\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ келтірілген қатары жинақталады. ρ -ны r -ге керегімізше жақын етіп алуға болады, осымен $|x| < r$ болғанда $\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ қатарының жинақтылығы дәлелденеді.

Теорема дәлелденді.

Теоремаға қосымша. Егер (3.44) анықтаушы теңдеуінің түбірлерінің $\alpha - \alpha_1$ айырымы бүтін сан болмаса, онда анықталмаған коэффициенттер әдісімен (3.41) теңдеуінің екі шешімі шығады:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x - x_0)^{\alpha_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k_1} (x - x_0)^k, \\ y_2(x) &= (x - x_0)^{\alpha_2} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k_2} (x - x_0)^k, \end{aligned} \quad (3.50)$$

мұндағы C_{k_i} коэффициенттері $k \geq 1$ болғанда (3.45) жүйесімен ($\alpha = \alpha_1$ болғанда $C_{01} = 1$, $C_{02} = 1$) анықталады. Жазылған қатарлар $|x - x_0| < r$ болғанда жинақталады, $y_1(x)$, $y_2(x)$ функциялары сызықтық тәуелсіз.

Егер $\alpha_1 - \alpha_2 = \pm n$, мұндағы n - оң бүтін сан, онда $y(x)$ шешімінен сызықтық тәуелсіз, (3.42) формуласынан шығатын (3.41) теңдеуінің $z(x)$ шешімі келесі түрде болады:

$$z(x) = Ay(x) \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{\alpha - n} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_0)^k, \quad \gamma_0 \neq 0, \quad (3.51)$$

мұндағы A және γ_k тұрақтыларын анықталмаған коэффициенттер әдісімен табуға болады.

Дәлелдеуі. $y_1(x)$, $y_2(x)$ функцияларының сызықтық тәуелсіздігі анық (олардың комбинациясы нөлге тең бола алмайды, себебі $x \rightarrow x_0$ болғанда олар әр түрлі).

Екінші тұжырымды (мұндағы (3.44) теңдеуінің түбірлері α арқылы белгіленген, $\alpha - n$) дәлелдеу үшін Остроградский-Лиувиль формуласын қолданамыз. $y(x)$, $z(x)$ шешімдер жүйесінің $W(x)$ Вронский анықтауышы үшін ($x_0 = 0$ болғанда)

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = -\frac{h_1(x)}{x} = -\frac{a_0}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1}.$$

Осыдан
$$\ln W(x) = -a_0 \ln x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} x^k + \ln C,$$

яғни ($C=1$ деп аламыз) $W(x) = x^{-a_0} e^{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} x^k} = x^{-a_0} e^{\omega(x)}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} x^k$ қатары $|x| < r$ болғанда жинақталатын қатарын интегралдаудан шықты, ол $|x| < r$ да жинақталады. Жинақталатын қатарды көбейту орынды болса, онда

$$\omega^n(x) = \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} x^k \right)^n$$

функциясы $|x| < r$ болғанда жинақталатын

$$\omega^n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} x^k$$

(қатарларды тізбектей көбейту арқылы алуға болады).

$$\text{Бұдан} \quad e^{\omega(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n(x)}{n!}, \quad |x| < r. \quad (3.52)$$

теңдігі айқын.

$\omega^n(x)$ -тің орнына (3.52) өрнегін қойып және қосудың ретін ауыстырып (қарастырып жатқан қатарлардың абсолютті жинақтылығымен сипатталады), $W(x)$ үшін $|x| < r$ болғанда $A_0 = e^{\omega(0)} = 1$ коэффициентімен алынған жинақталатын қатар түріндегі

$$W(x) = x^{-a_0} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

өрнегін аламыз. Осыдан Остроградский-Лиувилль формуласы бойынша

$$z(x) = y(x) \int \frac{W(t)}{y^2(t)} dt = y(x) \int \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k / \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k \right)^2 \right] \frac{dt}{t^{2\alpha+a_0}}$$

шаршы жақшалдағы қатынас $x_0 = 0$ нүктесінің маңайында жинақталатын $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k$ қатарымен анықталады, мұндағы $\beta_0 = 1$ ($C_0 = 1$ және $A_0 = 1$). Бұдан басқа $\alpha + (\alpha - n)$ түбірлерінің қосындысы $(1 - a_0)$ -ге тең, яғни $2\alpha + a_0 = n + 1$. Осыдан

$$\begin{aligned} z(x) &= y(x) \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^{k-n-1} \right) dt = \\ &= \beta_n y(x) \ln x + y(x) \frac{1}{x^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{k-n} x^{k-n} + \text{const.} \end{aligned}$$

(қосындыдағы штрих $k=n$ -мен алынған мүше онда жоқ дегенді білдіреді, константаны алда нөл деп санаймыз).

$$z(x) = \beta_n y(x) \ln(x) + x^{\alpha-n} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k \quad \text{қатары} \quad \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{k-n} x^k,$$

қатарларын көбейткеннен шықты және ол осы қатарлардың жинақталу интервалының қиылысында жинақталады (яғни $x_0 = 0$ нүктесінің қандай да бір аймағында).

$n=0$ болғанда, яғни анықтаушы теңдеудің түбірлері сәйкес болғанда, $\beta_0 = 1$ ескеріп, (3.51)-тегі келесіні аламыз:

$$z(x) = y(x) \ln x + x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k$$

$n>0$ болғанда (3.51)-тегі γ_0 коэффициенті нөлден өзгеше: $\gamma_0 = C_0 \beta_0 = 1$, β_n коэффициенті кейде нөлге тең болуы мүмкін.

3.4 Бессель теңдеуінің дәрежелік қатар түріндегі шешімі

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3.55)$$

теңдеуінің коэффициенттері $x = x_0$ нүктесінің $|x - x_0| < \rho$ аймағында голоморфты болса, онда Коши теоремасы бойынша $x = x_0$ нүктесінің дәл сол аймағында голоморфты болатын жалғыз шешімі табылады және ол келесі алғашқы шарттарды қанағаттандырады: $y = y_0$, $y' = y'_0$ $x = x_0$ болғанда, мұндағы y_0 және y'_0 -ті ерікті түрде алуға болады. Бұл шешімді $|x - x_0| < \rho$ облысында жинақталатын келесі дірежелік қатар түрінде келтіруге болады:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k (x - x_0)^k \quad (3.56)$$

Әдетте $x = x_0$ нүктесінде нормаланған голоморфты фундаменталды шешімдердің жүйесін құрады.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(1)} (x - x_0)^k \\ y_2 &= x - x_0 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(2)} (x - x_0)^k \end{aligned} \right\}$$

Онда $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ формуласы $|x - x_0| < \rho$, $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty$ облысында (3.55) теңдеудің голоморфты жалпы шешімін береді.

Егер (3.55) теңдеудің коэффициенттері $x = x_0$ нүктесі аймағының ешбір аймағында голоморфты болмаса, онда $x = x_0$ нүктесі осы теңдеудің ерекше нүктесі деп аталады. Жалпы жағдайда $x = x_0$ ерекше нүктесі аймағында голоморфты шешімдердің табылатындығын айта алмаймыз. Бірақ көп жағдайда $x = x_0$ ерекше нүктесі аймағында

$$y = (x - x_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k \quad (C_0 \neq 0),$$

$(x - x_0)$ дәрежесімен алынған жинақталатын дәрежелік қатардың $(x - x_0)^\rho$ -ға көбейтіндісінен тұратын жалпыланған дәрежелік қатар түріндегі шешімді табуға болады. Егер ρ - оң бүтін сан немесе нөл болса, онда (3.56) жалпыланған дәрежелік қатар кәдімгі дәрежелік қатарға айналады және біз $x = x_0$ нүктесі аймағында голоморфты шешімді аламыз.

Дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық теориясында (3.56) жалпыланған дәрежелік қатар түрінде ең болмағанда бір дербес шешім табылатындығына кепілдік беретін келесі теорема дәлелденеді.

Теорема. Егер

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

(3.55) теңдеуде $p(x)$ және $q(x)$ коэффициенттері бөлшектің алымындағы қатарлар $|x - x_0| < R$ облысында жинақталады, сонымен қатар p_0, q_0 және q_1 бір мезгілде нөлге тең болмайтын

$$p(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k}{x - x_0}, \quad q(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k}{(x - x_0)^2} \quad (3.57)$$

түрінде келтірілетін болса, онда (3.55) теңдіктің (3.56) жалпыланған дәрежелік қатар түрінде келтірілетін ең болмағанда бір шешімі бар болады (мұндағы қатар (3.57) жіктелудегі қатарлар сияқты $|x - x_0| < R$ облысында жинақталады).

Оның аймағында $p(x)$ және $q(x)$ коэффициенттері (3.57) түріне келтірілетін $x = x_0$ ерекше нүктесі дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық теориясында регулярлы ерекше нүктесі деп аталады.

ρ саны табылатын

$$\rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0 = 0, \quad (3.58)$$

теңдеуі $x = x_0$ ерекше нүктесінде анықтаушы теңдеу деп аталады, ал C_k коэффициенттері анықталмаған коэффициенттер тәсілімен табылады.

Егер (3.58) анықтаушы теңдеудің ρ_1 және ρ_2 түбірлері әр түрлі және олардың айырымы оң бүтін санға тең болмаса, онда (3.58) түріндегі екі сызықтық тәуелсіз дербес шешім табылады. Керісінше жағдайда

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx,$$

формуласымен анықталатын екінші дербес шешім

$$\gamma_{-1} y_1 \ln(x - x_0) \quad (3.59)$$

түріндегі қосылғыштан тұра алады.

Еселі түбірлер жағдайында екінші дербес шешім (3.59) түріндегі қосылғыштан тұрады.

(3.55) түрдегі теңдеудің қарапайым мысалы ретінде

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0 \quad (3.60)$$

Эйлер теңдеуі бола алады.

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

Бессель теңдеуін қарастырайық, мұндағы n - тұрақты теріс емес сан, $x=0$ - тұрақты ерекше нүкте (неліктен?). Осы ерекше нүкте аймағында екі сызықтық тәуелсіз дербес шешімдерін құрайық.

$$p^2 - n^2 = 0 \quad (3.61)$$

теңдеуі $x=0$ ерекше нүктедегі анықтаушы теңдеу болады (неліктен?).
 $p_1 = n$, $p_2 = -n$ - оның түбірлері. $p_1 = n$ түбіріне сәйкес келетін шешім
 $C_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ арнайы мәнін таңдағанда келесі түрге келеді:

$$y_1 = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k},$$

мұндағы қатар x -тің барлық мәнінде жинақталады (неліктен). $J_n(x)$ функциясы n -ші ретті бірінші текті Бессель функциясы деп аталады.

Жеке жағдайда, бірінші текті Бессель функциясы, яғни $n=0$ болғандағы Бессель теңдеуінің 1-ші ретті дербес шешімі:

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (3.62)$$

келесі түрге ие болады:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Егер n нөлге тең болмаса және оң бүтін сан болмаса, онда (3.61) анықтаушы теңдеудің түбірлерінің $2n$ -ге тең айырымы нөлден үлкен оң сан болуы мүмкін, ал Бессель теңдеуінің екінші дербес шешімінде $\ln x$ болмайды. Ол келесі түрде болады:

$$y_2 = J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}.$$

$J_{-n}(x)$ функциясы $J_n(x)$ функциясына қарағанда $x=0$ ерекше нүктесінде ақырсыз: ол $x=0$ -де шексіздікке ұмтылады.

$y_1 = J_{-n}(x)$ және $y_2 = J_n(x)$ дербес шешімдері сызықтық тәуелсіз. Сондықтан қарастырылып отырған жағдайда Бессель теңдеуінің жалпы шешімі:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x) \quad (n - \text{бүтін емес})$$

n оң бүтін сан болғанда екінші дербес шешім ретінде

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! (k+n)!} \times \\ \times \left[2 \ln \frac{x}{2} + 2C - \sum_{v=1}^k \frac{1}{v} - \sum_{v=1}^{n+k} \frac{1}{v} \right] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k},$$

мұндағы $C=0,5772157\dots$ – Эйлер тұрақтысы, ал $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} = 0$ алуға болады.

Бұл функция екінші текті n -ші ретті Бессель функциясы деп аталады. $Y_n(x)$ функциясы $x=0$ ерекше нүктесінде теңсіздікке ұмтылатындығы айқын.

Кейде екінші дербес шешім ретінде $\frac{1}{\pi} Y_n(x)$ функциясын қарастырған ыңғайлы. Бұл функция n -ші ретті Вебер функциясы деп аталады.

n оң бүтін сан болған жағдайда Бессель теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$$

түріне ие болады.

$n=0$ болғанда, яғни (3.62) түріндегі Бессель теңдеуі үшін, екінші дербес шешім ретінде

$$Y_0(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left[\ln \frac{x}{2} + C - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \right].$$

алуға болады.

$Y_0(x)$ функциясы $x=0$ ерекше нүктесінде шексіздікке ұмтылатындығы айқын. Кейде $Y_0(x)$ -тің орнына $\frac{1}{\pi} Y_0(x)$ функциясын алады. Бұл функция нөлінші ретті Вебер функциясы деп аталады.

$n=0$ болғанда Бессель теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$

Жалпы Бессель функциялары қарапайым функциялар емес. Бірақ $J_{\frac{2k+1}{2}}(x)$ және $J_{-\frac{2k+1}{2}}(x)$ қарапайым функциялар арқылы өрнектелетіндігін дәлелдеуге болады. Жеке жағдайда

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Бақылау сұрақтары мен тапсырмалар:

- 1 Коши есебінің табылатындығы теореманы дәлелдеңіз.
- 2 Голоморфты шешімнің жалғыздығы туралы теореманы дәлелдеңіз
- 3 Қатар түріне келтірілген сызықтық теңдеудің шешімі қалай табылады?
- 4 Сызықтық теңдеу дәрежелік қатардың көмегімен қалай шешіледі?.
- 5 Дифференциалдық теңдеулердің шешімі квадратурада қалай анықталады?
- 6 Бессель функциясының дәрежелік қатарға жіктелуін көрсетіңіз.
- 7 Қатардың бір қалыпты жинақтылық шартын көрсетіңіз.
- 8 Вейерштрасс теоремасын дәрежелі қатарға қалай қолданады?
- 9 Аналитикалық функцияның дәрежелік қатарға жіктелуін көрсетіңіз.

4 Аналитикалық функциялардың бірқалыпты жинақты қатарлары

4.1 Қатардың бір қалыпты жинақтылық шарты

Кейбір G облысында барлық мүшелері аналитикалық болатын шектеусіз

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \quad (4.1)$$

қатарын алалық. (4.1) қатар G облысының әрбір z нүктесінде жинақты болды деп жориық және оның қосындысы $f(z)$ арқылы белгілейік.

Осындай шарт G облысында немесе ең болмағанда $\bar{G}$ облысында тұтас жататын кез келген тұйық $\bar{G}'$ облысындағы (4.1) қатардың бір қалыпты жинақтылық шарты болып табылады. Бұл екі бөлімінен тұратын Вейерштрасс теоремасымен анықталады.

Сонымен, (4.1) қатарды G облысында тұтас жататын кез келген тұйық $\bar{G}'$ облысында бір қалыпты жинақты болады деп жорып, дәлелдейік, біріншіден, (4.1) қатарды G облысында аналитикалық $f(z)$ функцияны кескіндейтін, екіншіден, (4.1) қатардағы қалған сан рет дифференциалданғаннан кейін осы сияқты G облысында іштей жататын кез келген тұйық $\bar{G}'$ облысында бір қалыпты жинақты болатын жаңа қатардың алынатын және $f(z)$ функциянының сәйкес туындысын беретін немесе, қысқаша айтқанда: (4.1) қатарды мүшелеп сан рет дифференциалдауға болатынын дәлелдейік:

Ескерту: Нақты сандар облысында мұнда жай теорема жоқ, өйткені нақты айнымалы функциялардың бір қалыпты жинақты қатарын, жалпы айтқанда, мүшелеп дифференциалдауға болмайтыны белгілі



1 сурет- G облысы

Теореманың бірінші бөлігін дәлелдеу үшін, (4.1) қатардың бір қалыпты жинақтылығынан оның $f(z)$ қосындысы G облысында іштей жататын кез келген тұйық $\bar{G}'$ облысындағы үздіксіз функция, ендеше, G облысының барлық жерінде үздіксіз функция екенін көреміз. Бізге $f(z)$ функциясының G облысының кез келген z_0 нүктесінде шектеулі туындысы болтындығын дәлелдеу жеткілікті. z_0 нүктесін тұйық үзінді тегіс C контурымен қоршайық. Оның барлық ішкі нүктелері сол контурдың өзінің нүктесімен бірге G

облысында жататын болсын (1 сурет). Берілген (4.1) қатар шарт бойынша C контурында бір қалыпты жинақты болады. ζ арқылы C контурының кез келген нүктесін, ал z арқылы C -ның ішіндегі кез келген нүктесін белгілеп, (4.1) қатардың барлық мүшесін $\zeta - z$ -ке бөлеміз Осылай алынған

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} + \dots + \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}, \quad (4.2)$$

қатары C -да жататын барлық ζ нүктелер үшін бір қалыпты жинақты болады. Мұндай қатарды мүмкіндігінше C сызығының бойымен мүшелеп интегралдауға болады.

Интегралды C бойымен жүргізе отырып, нәтижесінде алынған қатардың барлық мүшесін $2\pi i$ -ге бөлсек, мынаны аламыз:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_1(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_2(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad (4.3)$$

$f_n(z)$ функциясы C -ның ішіндегі барлық жеде, C контурының өзіндегі нүктені қосып есептегенде, шарт бойынша аналитикалық болғандықтан, Коши формуласын пайдаланып, (4.3) қатарды төмендегі түрде жазамыз:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z), \quad (4.3')$$

(4.3') қатардың оң жақ бөлігінде қосындысы $f(z)$ -ке тең берілген (4.1) қатар тұр, демек, былай жазамыз:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad (4.3'')$$

$f(z)$ функциясы C контурына іштей, барлық z нүктелері үшін Коши типті интегралымен (4.3'') кескінделетіндіктен, осы барлық z нүктелерінде оның шектеулі туындысы болады. Дербес жағдайда, $f(z)$ функциясының $z = z_0$ нүктесінде шектеулі туындысы болуы керек. z_0 нүктесі деп G облысының кез келген нүктесін түсінетіндіктен де $f(z)$ функциясын G облысында аналитикалық функция деп қорытамыз. Осымен Вейерштрасс теоремасының бірінші бөлімі дәлелденді.

Осы қорытындыға басқаша жолмен, Морера теоремасын пайдаланып та келуге болады. Шынында да, біріншіден, $f(z)$ функциясының G облысында үздіксіз екенін көрдік, екіншіден, (4.1) қатардың C контурында бір қалыпты жинақты болатындығынан, оны C сызығының бойымен мүшелеп интегралдауға болады:

$$\int_C f(\zeta)d\zeta = \int_C f_1(\zeta) + \int_C f_2(\zeta) + \dots + \int_C f_n(\zeta), \quad (4.4)$$

Бұл жерде C деп z_0 нүктесінің кейбір маңайында жататын кез келген үзінді тегіс сызық деп түсіну жеткілікті, $f_n(z)$ функциясы C -ның ішінің барлық жерінде, C контурының өзінің нүктесін қосқанда аналитикалық функция болғандықтан, Кошидің негізгі теоремасы бойынша

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = 0 (n = 1, 2, 3, \dots),$$

демек, (4.4) теңдіктен мынаны аламыз :

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = 0,$$

Сонымен , (4.1) қатар G облысында үздіксіз функция , ол функция үшін: $\int_C f(\zeta) d\zeta = 0$ болады; интеграл кей z_0 нүктесінің C маңайында жататын кез келген түйік C контурының бойымен алынады. Морера теоремасының әсерінен $f(z)$ функциясы көрсетілген z_0 нүктесінің маңайында аналитикалық болуы тиіс . z_0 деп G облысының кез келген нүктесі екенін тағы да еске түсірсек, бұдан біздің ұйғарымымыздың дұрыстығын білеміз.

Енді теореманың екінші бөлігін дәлелдеуге өтейік . G облысының z_0 нүктесін, барлық ішкі нүктелері және C контурының өз нүктелері G облысында жататындай , үзінді тегіс C контурымен қоршаймыз. ζ арқылы C контурының кез келген нүктесін , ал z арқылы C -ның ішіндегі кез келген нүктесін белгілеп, берілген (4.1) қатарды $(\zeta - z)^2$ -ге бөліп , C контурында бір қалыпты жинақты болатын қатарды аламыз:

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} = \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z)^2} + \frac{f_2(\zeta)}{(\zeta - z)^2} + \dots + \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}, \quad (4.5)$$

(4.5) қатарды C сызығы бойымен мүшелеп интегралдап және алынған қатардың барлық мүшесін $2\pi i$ -ге бөліп, төмендегі өрнекті табамыз :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_1(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_2(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad (4.6)$$

Коши формуласын қолданып , (4.6) қатарды төмендегі түрде жазамыз:

$$f'(z) = f_1'(z) + f_2'(z) + \dots + f_n'(z), \quad (4.6')$$

яғни (4.1) қатардың берілген туынды мүшелерінен құралған қатар C -ның ішінде жатқан z -тің кез келген нүктесінде (4.1) қатардың қосындысынан алынған қатардың туындысына жинақты болатынын көреміз, атап айтқанда, $z = z_0$ болғанда, z_0 -тің G облысының кез келген нүктесі екенін ескеріп, G облысының әрбір нүктесінде (4.1) қатарды мүшелеп дифференциалдауға болатындығына көзіміз жеткіземіз. Енді бізге берілген (4.1) қатардың туынды мүшелерінен құралған (4.6') қатардың G облысында тұтас жатқан $\overline{G}'$ облысының барлық жерінде бір қалыпты жинақты болатындығы көрсету ғана қалды.

Шынында, айталық $z_0 - \overline{G}'$ облысының кез келген нүктесі делік. C облысында өзі және оның барлық ішкі нүктелері жататындай z_0 нүктесін центр алып, мейлінше кіші $2d$ радиус арқылы Γ шеңберін жүргіземіз. z_0 нүктесінің σz_0 маңайын қарастырайық: $|z - z_0| < d * \zeta$ нүктесі Γ шеңберін

сызғанда z нүктесі σz_0 маңайында қалып қояды, олардың ара қашықтығы $|\zeta - z|$ барлық уақытта оң d санына үлкен болған қалпында қалады. Берілген (4.1) қатар Γ шеңберінде бір қалыпты жинақты болатындықтан да, келген мейлінше аз $\varepsilon > 0$ үшін $\zeta \in \Gamma$ нүктесі қандай болса да, былай болады:

егер $n \geq N = N(\varepsilon)$ болса,

$$|f_{n+1}(\zeta) + f_{n+2}(\zeta) + \dots| < \varepsilon.$$

Осыны ескеріп, (4.6') қатардың $(n+1)$ -ші мүшесінен бастап барлық мүшелерін қарастырайық:

$$f'_{n+1}(z) + f'_{n+2}(z) + \dots = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_{n+1}(\zeta) f_{n+2} + \dots d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad (4.7)$$

(4.7) теңдіктен мынаны аламыз:

$$|f'_{n+1}(z) + f'_{n+2}(z) + \dots| < \frac{\varepsilon 4\pi d}{2\pi d} = \frac{2\varepsilon}{d},$$

Соңғы теңсіздік туынды (4.6') қатардың қалдық мүшесі модулі бойынша жеткілікті үлкен номерлі саннан бастап, σz_0 маңайына жататын z нүктесіне байланысты болмай, кез келген мейлінше аз оң саннан кіші болатынын көрсетеді, басқаша айтқанда, (4.6) қатар кез келген z_0 нүктесінің $z_0 \in \overline{G}'$ маңайында бір қалыпты жинақтылығын дәлелдейік. Гейне – Борель әсерінен $\overline{G}'$ облысы σ маңайының әрқайсысында дәлелденген бойынша туынды қатар бір қалыпты жинақты болатын шектеулі болатын шектеулі санмен жабылуы мүмкін. Демек, (4.6') қатар $\overline{G}'$ облысының барлығында бір қалыпты жинақты болады.

Аналитикалық функцияның туындысы аналитикалық функция болатынын ескеріп, (4.6/) қатардың G -да біртұтас іштей жатқан кез келген іштей жатқан, кез келген тұйық $\overline{G}'$ облысында бір қалыпты жинақты болатын G облысының аналитикалық функциялар қатары екенін көреміз. Осы қатарға дәлелденген сөйлемді біртіндеп қолданып, мынаны аламыз:

$$f''(z) = f_1''(z) + f_2''(z) + \dots + f_n''(z) + \dots, \quad (4.8)$$

жалпы алғанда

$$f^{(\rho)}(z) = f_1^{(\rho)}(z) + f_2^{(\rho)}(z) + \dots + f_n^{(\rho)}(z) + \dots, \quad (4.8/)$$

Сонымен қатар барлық алынатын қатарымыз G облысына біртұтас іштей жатқан кез келген тұйық $\overline{G}'$ облысында бір қалыпты жинақты қатарлар.

4.2 Вейерштрасс теоремасын дәрежелі қатарға қолдану

Жинақтылық радиусы $R > 0$ болатын

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots, \quad (4.9)$$

кез келген дәрежелік қатардың жинақты дөңгелек ішінде аналитикалық $f(z)$ функцияны кескіндейтінін және осы функцияның $f'(z)$ туындысы қатарды

мүшелеп дифференциалдау арқылы алынатындығын көрдік. Бұл нәтижелердің бәрі Вейерштрасс теоремасының қарапайым салдары сияқты алынатыны сөзсіз. Шынында да, бір жағынан (4.9) қатар жинақтылық дөңгелегіне бір тұтас іштей жатқан кез келген $|z-a| \leq r (r < R)$ дөңгелекте бір қалыпты жинақты болатынын білеміз; екінші жағынан, бұл қатардың барлық мүшесі комплекс айнымалы z жазықтығының барлық жерінде аналитикалық функция. Демек, Вейерштрасс теоремасының негізінде (4.9) қатардың қосындысы жинақтылық дөңгелегінің ішінде аналитикалық функция болу керек. Теореманың екінші бөлімін қабылдай отырып, (4.9) дәрежелі қатарды қанша болса, сонша рет мүшелеп дифференциалдауға болатынын көреміз.

Осының нәтижесінде жинақтылық радиуысы R болатын, яғни жинақтылық дөңгелегі (4.9) қатардың жинақтылық дөңгелегімен дәл келетін

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \dots + nc_n(z-a)^{n-1} + \dots, \quad (4.10)$$

$$f''(z) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(z-a) + \dots + (n-1)nc_n(z-a)^{n-2} + \dots, \quad (4.11)$$

жалпы түрде

$$f^{(p)}(z) = 2 \cdot 3 \dots p c_p + 2 \cdot 3 \dots p(p+1)c_{p+1}(z-a) + \dots, \quad (4.12)$$

дәрежелік қатарды аламыз. Шынында да, (4.10) туынды қатардың жинақтылық радиуысы R –ден үлкен де бола алмайды, өйткені кері жағдайда, (4.10) туынды қатарды мүшелеп интегралдау арқылы алынған алғашқы (4.9) қатардың жинақтылық радиуысы да R -ден үлкен болар еді.

Сонымен, туынды қатардың жинақтылық радиуысы R –ге тең. Дербес жағдайда (4.9) - (4.12) қатарларда $z=a$ деп ұйғарып мынаны аламыз:

$$c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \dots, c_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!} \quad (4.13)$$

Коэффициенттері c_p осы формуламен алынған дәрежелі (2.1) қатар Тейлор қатары деп аталады.

Сонымен, жинақтылық радиуысы оң болатын кез келген дәрежелі қатар Тейлор қатары екенін көреміз. (4.9) дәрежелі қатардың c_p коэффициенттері үшін (4.13) формуладан басқа өрнек беруге болады. С арқылы (4.10) қатардың жинақтылық дөңгелегінің ішінде жататын центрі $z=a$ нүктесінде орналасқан кез келген шеңберді белгілеп, және Коши формуласын қолданып, мынаны табамыз:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (4.14)$$

осыдан z параметрі бойынша дифференциалдау арқылы мынаны аламыз:

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}}, \quad (4.15)$$

(4.14) және (4.15) формуладағы z – C –ның ішінде жатқан кез келген нүктені білдіреді; бұл формулаларда, жекелеп алғанда, $z=a$ деп ұйғарып, мынаны табамыз:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a}, \quad (4.14')$$

$$f^{(p)}(a) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{p+1}}, \quad (4.15')$$

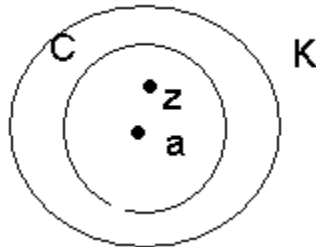
Осыдан дәрежелі қатардың коэффициенттері c_p үшін (4.15) формула негізінде төмендегі интегралдық формуланы аламыз:

$$c_p = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}} \quad (p = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.16)$$

4.3 Аналитикалық функцияның дәрежелік қатарға жіктелуі

Алдыңғы бөлімде жинақтылық радиусы оң болатын кез келген дәрежелі (4.9) қатардың қосындысы оның жинақтылық дөңгелегінің ішінде аналитикалық функция екенін көрдік. Енді бұған кері сөйлемді дәлелдейік: қайсы бір дөңгелек ішіндегі аналитикалық функция дәрежелі қатарға жіктеледі.

Айталық, $f(z)$ функция радиусы R , центрі a нүктесіндегі кейбір K шеңберінің ішінде аналитикалық функция болсын. Z арқылы K шеңберінің ішінде жатқан кез келген нүктені белгілейік, a нүктесін центр ретінде алып, z нүктесі ішінде жататындай радиусы ρ ($\rho < R$) болып келген C шеңберін сызалық. (2-сурет).



2 сурет - C шеңбері

$f(z)$ функциясы шарт бойынша, шеңбердің нүктесімен қоса алғанда, осы C шеңберінің ішінде аналитикалық функция болғандықтан, оның z нүктесіндегі мәнін Коши формуласы бойынша төмендегідей жазуға болады:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^1}, \quad (4.17)$$

Біздің міндетіміз (4.17) интегралды $(z-a)$ -ға қатысты дәрежелі қатардың қосындысы түрінде өрнектеу.

Осы мақсатпен $\frac{1}{\zeta - z}$ өрнегін мына түрде жазамыз :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - z) \left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a} \right)}, \quad (4.18)$$

C шеңберінде ζ нүктесі қандай болмасын, $u = \frac{z-a}{\zeta-a}$ бөлшегінің модулі тұрақты оң сан $q (q < 1)$ -ге тең болады, өйткені $:/|u| = \frac{|a-z|}{|\zeta-a|} = \frac{|z-a|}{\rho} = q < 1$. Демек, $u = \frac{1}{1-u}$ өрнегін шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы ретінде қарастыруға болады:

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^n + \dots,$$

Осыдан, u -ды оның $\frac{z-a}{\zeta-a}$ мәнімен алмастырып, мынаны аламыз:

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = 1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \dots, \quad (4.19)$$

(4.18) формулаға (4.19) өрнекті қойып мынаны табамыз:

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3} + \dots, \quad (4.20)$$

ζ нүктесі C шеңберінің қандай нүктесі болғанымен де (4.19) қатар осымен қоса (4.20) қатар z тұрақты болғанда бір қалыпты жинақты болады, өйткені оның мүшелерінің модульдері q бөлімі ζ -ге тәуелді болмайтын шектеусіз кемімелі геометриялық прогрессия қатардың бір қалыпты жинақтылығын бұзбай, оны $f(\zeta)$ -ге көбейтіп, мынаны аламыз:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} + \frac{(z-a)f(\zeta)}{(\zeta-a)^2} + \frac{(z-a)^2 f(\zeta)}{(\zeta-a)^3} + \dots, \quad (4.21)$$

(4.21) қатардың C шеңберінің бойымен мүшелеп интегралдап және интегралдағаннан алынған барлық мүшені $2\pi i$ -ге бөліп, оның бір қалыпты жинақтылығын төмендегідей өрнекті алуға қақымыз бар:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a} + (z-a) \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^2} + (z-a)^2 \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^3} + \dots,$$

немесе (4.17) формуланы пайдаланып, соңғы қатарды былай жазамыз:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots, \quad (4.22)$$

мұндағы

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.23)$$

(4.23) формуламен анықталатын (4.22) қатардың c_n коэффициенттері z -ке тәуелді емес, өйткені c_n -ның мәндерін өзгертпей, K шеңберінің ішінде жататын, a нүктесін қоршайтын, кез келген тұйық контурды C интегралдау жолы ретінде алуға болады. (4.22) қатардың c коэффициенттері алдыңғы пункттің негізінде мынадай формуламен өрнектелуі мүмкін:

$$c = f(a), c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Сонымен, біз K шеңберінің ішіндегі кез келген $f(z)$ функциясы нүктесінде z - a -ға қатысты дәрежелі (4.21) қатарының қосындысы түрінде кескінделетінін дәлелдейік.

Егер $f(z)$ функциясы a нүктесінің кейбір маңайында аналитикалық болса, яғни центрі a нүктесіндегі мейлінше кіші радиусы бар, ішінде $f(z)$ функциясы аналитикалық болатын дөңгелек бар болса, онда $f(z)$ функциясы осы a нүктесінде аналитикалық деп атағанбыз. Қысқаша, осындай a нүктесін берілген функциясының дұрыс нүктесі де, ал кез келген $f(z)$ функциясының дұрыс емес нүктесін ерекше нүкте деп атайтын боламыз. Мысалы, $\frac{1}{1-z}$ функциясы үшін кез келген нүкте $z(z \neq 1)$ дұрыс нүкте; $z=1$ ерекше нүкте болады.

Алдыңғы пунктте дәрежелі қатар өзінің жинақтылық дөңгелегінің ішінде аналитикалық $f(z)$ функциясы үшін дұрыс нүктелер болатындығын көрдік. Жинақтылық дөңгелегінің шеңберін алсақ, онда ең кем дегенде $f(z)$ функциясының ерекше бір нүктесі болады. Шынында да, керісінше алып, дәрежелі қатардың жинақтылық дөңгелегі шеңберінің барлық нүктелері оның қосындысы $f(z)$ үшін дұрыс нүктелер деп ұйғаруымыз керек. Бұл жағдайда жинақтылық дөңгелегі шеңберінің әрбір нүктесі ішінде $f(z)$ функциясы аналитикалық болатын кейбір k дөңгелектің центрі болады. Гейне –Борель леммасы бойынша жинақтылық дөңгелегі шеңберінің әрбір нүктесі кем дегенде осы дөңгелектердің бірінің ішінде жататындай, G облысын құратын, осы дөңгелектің бірінің ішінде жататындай, G облысының шекарасына дейінгі ең кіші ара қашықтықты белгілесек, $f(z)$ функциясының жинақтылық дөңгелекпен концентрлі радиусы $R+\rho$ дөңгелегінің ішінде аналитикалық болатынын көреміз. Осы пункттің нәтижесінен $f(z)$ функциясының Тейлор қатары радиусы $R+\rho$ дөңгелек ішінде жинақты болуға тиісті, яғни берілген қатардың жинақтылық радиусы ең болмағанда $R+\rho$ -ге тең, былай болуы мүмкін емес өйткені шарт бойынша ол R -ге тең.

Сонымен, егер a нүктесі $f(z)$ функциясының дұрыс нүктесі болса, онда бұл функция осы нүктенің маңайында z - a -ға қатысты дәрежелік қатарға жіктеледі, сонымен қатардың жинақтылық дөңгелегі шеңберінің центрі a нүктесінде болып, a нүктесіне ең жақын $f(z)$ функциясының ерекше нүктесі арқылы өтеді.

Бұл сөйлем, бір жағынан, осы қатармен кескінделетін функцияның табиғаты арасында тығыз байланысты тағайындалады; бұл дәрежелі қатарлар теориясының тек комплекс облыста ғана өзінің толық түсінік алатындығын көрсетеді. Сонымен, мысалы, нақты сандар облысында қала отырып,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

қатардың не себепті $x < -1$ және $x \geq +1$ мәндерінде жинақты болудан қалатынын түсінуге болмайды, ал сол кезде $\frac{1}{1+x^2}$ функциясы тәуелсіз айнымалы x -тің барлық мәндері үшін анықталады. Сонымен қатар $x = \pm 1$ мәні бұл функция үшін айрықша болмайды. Алайда бұл құбылыстың көрінісі комплекс айнымалының

тұрғысынан толық түсіндіріледі. Шыныда, $\frac{1}{1+z^2}$ функциясының $z=\pm i$ болғанда ерекше нүктелері бар, сондықтан қарастырылып отырған қатардың жинақтылық радиусы бірге тең.

Бақылау сұрақтары мен тапсырмалар:

- 1 Коши есебінің табылатындығы теореманы дәлелдеңіз.
- 2 Голоморфты шешімнің жалғыздығы туралы теореманы дәлелдеңіз
- 3 Қатар түріне келтірілген сызықтық теңдеудің шешімі қалай табылады?
- 4 Сызықтық теңдеу дәрежелік қатардың көмегімен қалай шешіледі?
- 5 Дифференциалдық теңдеулердің шешімі квадратурада қалай анықталады?
- 6 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ қатарының жинақтылығын дәлелдеңіз.
- 7 Қатардың бір қалыпты жинақтылық шартын көрсетіңіз.
- 8 Вейерштрасс теоремасын дәрежелі қатарға қалай қолданады?
- 9 Аналитикалық функцияның дәрежелік қатарға жіктелуін көрсетіңіз.
- 10 Дәрежелік қатарды қай кезде жинақталатын деп атайды?

5 Кешендік облыстағы кейбір қатарлар теориясы

5.1 Сандық қатарлардың жинақталуы

Кешендік облыстағы қатарлар теориясы математикалық талдау курсына қатарлар теориясы сияқты құралады. Сондықтан кешендік қатарлар теориясының кейбір мағлұматтарын қысқаша шолып өтейік. Егер $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n + iy_n\}_{n=1}^{\infty}$ шектеусіз сандар тізбегі болса, онда мына өрнекті

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad (5.1)$$

кешендік мүшелі сандар қатары деп атайды да, бұл сандар қатарының дербес қосындыларының

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n, \quad (5.2)$$

белгілі бір шектеулі тиянақты шегін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad (5.3)$$

сандық қатардың қосындысы деп атайды, да былай белгіленеді $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$. Егер

сандық қатардың дербес қосындыларының белгілі бір тиянақты шектеулі шегі бар болса, онда сандық қатарды жинақсыз қатар деп атайды. Сөйтіп, (5.1) туралы көптеген мәселелер оған сәйкес сандар тізбегі немесе бәрі бір ол қатардың дербес қосындылары (5.2) арқылы шешіледі екен. Егер сандық қатар (5.1) жинақты болса, онда (5.3) орындалады да, (1)-ді былай жазуға болады:

$$S = S_n + R_n \quad (5.4)$$

мұндағы

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} z_k \text{ сандар қатарының қалдығы, } n \rightarrow \infty \text{ нөлге ұмтылады.}$$

Керісінше, сандар қатарының қалдығы $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, (5.4) –тен (5.3) орындалатыны көрінеді, сөйтіп (5.1) сандық қатардың қалдығы жинақты болса, қатардың өзі де жинақты болады. Сандар тізбегі жайында дәлелденген ұйғарулар бойынша сандық қатардың (5.1) жинақты болу үшін z_n мүшелерінің нақты x_n

және жорамал y_n бөліктерінен құралған қатарлар $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} x_k$ және $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} y_k$ жинақты болуы қажетті және жеткілікті.

Сондай-ақ сандар тізбегінің жинақтылығының қажетті және жеткілікті шарты (Коши критерийі) (5.1) сандық қатардың жинақтылығы үшін де дұрыс болады.

Егер де сандық қатар мүшелерінің абсолют шамасы $|z_n|$ бойынша құрылған қатар.

$|z_n|$ жинақты болса, онда (5.1) қатарды абсолют шамасы жинақты қатар қатар деп атайды.

Абсолют жинақты қатарды кез келген санға көбейтуге, екі абсолют жинақты қатарды мүшелеп қосуға, мүшелеп алуға болады және қатарларды көбейту туралы Коши теоремасы да орындалады, абсолют жинақты

қатарлардың мүшелерінен орнын алмастырғаннан оның жинақтылығы да, қосындысы да өзгермейтіні мәлім. Ендеше сандар қатарының жинақтылығында абсолют жинақтылық ең тиімді, ең керекті жинақтылық. Сондықтан да комплекс мүшелі қатардың абсолют жинақтылығын білуге тырысады. Ол үшін практикада көбінесе математикалық анализ курсынағы мүшелері оң қатарларының жинақтылықтың жеткілікті белгілері болып саналатын салыстыру белгісін, Коши және Даламбер белгілерін қолданады.

1. Салыстыру белгісі. Егер (5.1) қатарының жалпы мүшесінің модулі белгілі бір нөмірінен $(n < n_0)$ бастап, мүшелері оң жинақты қатарының $R_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сәйкес мүшелерінен артық болмаса, яғни $|z_n| \leq a_n (n \geq n_0)$ болса, (5.1) абсолют жинақты.

2. Даламбер белгісі. Егерде қатардың мүшелері үшін $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = D_n \rightarrow D$ болса, $D < 1$ жайында (5.1) жинақсыз.

3. Коши белгісі. Егер қатардың мүшелері үшін $\sqrt[n]{|z_n|} = K_n \rightarrow K$ болса, онда $K < 1$ жағдайында (5.1) абсолют жинақты, $K > 1$ жағдайында (5.1) жинақсыз.

Кейбір G облысында барлық мүшелері аналитикалық болатын шектеусіз

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \quad (5.5)$$

қатарын алалық. (5.2) қатар G облысының әрбір z нүктесінде жинақты болды деп жорық және оның қосындысы $f(z)$ арқылы белгілейік.

Осындай шарт G облысында немесе ең болмағанда $\bar{G}$ облысында тұтас жататын кез келген тұйық $\bar{G}'$ облысындағы (5.5) қатардың бір қалыпты жинақтылық шарты болып табылады. Бұл екі бөлімінен тұратын Вейерштрасс теоремасымен анықталады.

Сонымен, (5.5) қатарды G облысында тұтас жататын кез келген тұйық $\bar{G}'$ облысында бір қалыпты жинақты болады деп жорып, дәлелдейік, біріншіден, (5.5) қатарды G облысында аналитикалық $f(z)$ функцияны кескіндейтін, екіншіден, (5.5) қатардағы қалған сан рет дифференциалданғаннан кейін осы сияқты G облысында іштей жататын кез келген тұйық $\bar{G}'$ облысында бір қалыпты жинақты болатын жаңа қатардың алынатын және $f(z)$ функцияның сәйкес туындысын беретін немесе, қысқаша айтқанда (5.5) қатарды мүшелері сан рет дифференциалдауға болатынын дәлелдейік.

Нақты сандар облысында мұнда жай теорема жоқ, өйткені нақты айнымалы функциялардың бір қалыпты жинақты қатарын, жалпы айтқанда, мүшелері дифференциалдауға болмайтыны белгілі. Қатардың бір қалыпты жинақтылығынан оның $f(z)$ қосындысы G облысында іштей жататын кез келген тұйық $\bar{G}'$ облысындағы үздіксіз функция, ендеше, G облысының барлық жерінде үздіксіз функция екенін көреміз. Бізге $f(z)$ функциясының G

облысының кез келген z_0 нүктесінде шектеулі туындысы болтындығын дәлелдеу жеткілікті. z_0 нүктесін тұйық үзінді тегіс C контурымен қоршайық. ζ арқылы C контурының кез келген нүктесін, ал z арқылы C -ның ішіндегі кез келген нүктесін белгілеп, (5.5) қатардың барлық мүшесін $\zeta - z$ -ке бөлеміз. Осылай алынған

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} + \dots + \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}, \quad (5.6)$$

қатары C -да жататын барлық ζ нүктелер үшін бір қалыпты жинақты болады. Мұндай қатарды мүмкіндігінше C сызығының бойымен мүшелеп интегралдауға болады.

Интегралды C бойымен жүргізе отырып, нәтижесінде алынған қатардың барлық мүшесін $2\pi i$ -ге бөлсек, мынаны аламыз:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_1(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_2(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad (5.7)$$

$f_n(z)$ функциясы C -ның ішіндегі барлық жеде, C контурының өзіндегі нүктені қосып есептегенде, шарт бойынша аналитикалық болғандықтан, Коши формуласын пайдаланып, (5.7) қатарды төмендегі түрде жазамыз:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z),$$

қатардың оң жақ бөлігінде қосындысы $f(z)$ -ке тең берілген (5.5) қатар тұр, демек, былай жазамыз:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

$f(z)$ функциясы C контурына іштей, барлық z нүктелері үшін Коши типті интегралымен (10¹¹) кескінделетіндіктен, осы барлық z нүктелерінде оның шектеулі туындысы болады. Дербес жағдайда, $f(z)$ функциясының $z = z_0$ нүктесінде шектеулі туындысы болуы керек. z_0 нүктесі деп G облысының кез келген нүктесін түсінетіндіктен де $f(z)$ функциясын G облысында аналитикалық функция деп қорытамыз. Осымен Вейерштрасс теоремасының бірінші бөлімі дәлелденді.

Осы қорытындыға басқаша жолмен, Морера теоремасын пайдаланып та келуге болады. Шынында да, біріншіден, $f(z)$ функциясының G облысында үздіксіз екенін көрдік, екіншіден, (5.5) қатардың C контурында бір қалыпты жинақты болатындығынан, оны C сызығының бойымен мүшелеп интегралдауға болады:

$$\int_C f(\zeta)d\zeta = \int_C f_1(\zeta)d\zeta + \int_C f_2(\zeta)d\zeta + \dots + \int_C f_n(\zeta)d\zeta, \quad (5.8)$$

Бұл жерде C деп z_0 нүктесінің кейбір маңайында жататын кез келген үзінді тегіс сызық деп түсіну жеткілікті, $f_n(z)$ функциясы C -ның ішінің барлық жерінде, C контурының өзінің нүктесін қосқанда аналитикалық функция болғандықтан, Кошидің негізгі теоремасы бойынша

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = 0 (n = 1, 2, 3, \dots),$$

демек, (5.5) теңдіктен мынаны аламыз :

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = 0,$$

Сонымен, (5.5) қатар G облысында үздіксіз функция, ол функция үшін: $\int_C f(\zeta) d\zeta = 0$ болады; интеграл кей z_0 нүктесінің C маңайында жататын кез келген тұйық C контурының бойымен алынады. Морера теоремасының әсерінен $f(z)$ функциясы көрсетілген z_0 нүктесінің маңайында аналитикалық болуы тиіс. z_0 деп G облысының кез келген нүктесі екенін тағы да еске түсірсек, бұдан біздің ұйғарымымыздың дұрыстығын білеміз

5.2 Дәрежелік қатардың бірқалыпты жинақтылығы. Тейлор қатары

Дәрежелік қатар деп мынадай қатардың түрін атаймыз:

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (5.9)$$

мұндағы $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ коэффициенттері – мәні тұрақты комплекс сандар, z – тәуелсіз айнымалы.

(5.9) дәрежелік қатардың жинақтылық облысы деп осы қатар жинақты болатын жазықтықтағы z нүктелерінің жиынын айтамыз. Кез келген (1) түрдегі қатар $z=0$ нүктесінде жинақты болатындығы айқын, яғни нольдік нүкте әрқашанда жинақтылық облысында жатады.

Егер дәрежелік (5.9) қатар $z = z_0$ болғанда жинақты болса, $|z| < |z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген z -те абсолют жинақты болады.

Абельдің бұл сөйлемі геометрия терминдерінде былай тұжырымдалады: егер дәрежелік (5.9) қатар z_0 нүктесінде жинақты болса, ол қатар центрі нольдік нүктедегі z_0 нүктесі арқылы өтетін шеңбердің ішіндегі әрбір нүктеде абсолют жинақты болады.

Шарт бойынша $c_0 + c_1 z_0 + c_2 z_0^2 + \dots + c_n z_0^n + \dots$ қатары жинақты болады, демек $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$

Берілген дәрежелік қатар ішінде жинақты болатын, ал сыртында жинақсыз болатын радиусы R , центрі нольдік нүктедегі дөңгелектер болады.

Бұл сөйлем кез келген дәрежелік қатарда дұрыс болуы үшін оларға бірінші екі типтегі қатарларды енгізу керек. Бірінші жағдайда (жинақтылық облысы жалғыз нольдік нүктеде құралғанда) $R=0$ деп алу керек екені айқын, ал екінші жағдайда (қатар бүкіл жазықтықта жинақты болғанда) $R=+\infty$ деп алу керек.

Міне, радиусы R осы дөңгелекті дәрежелік қатардың жинақтылық дөңгелегі, ал R –оның жинақтылық радиусы деп аталады. Жоғарыда баяндалған дарға сәйкес кез келген дәрежелік қатардың белгілі бір жинақтылық радиусы R болады, сонымен қатар $0 \leq R \leq +\infty$. Жинақтылық дөңгелегінің

($0 \leq R \leq +\infty$) шеңберіндегі нүктелерге келсек, олардың біреуінде қатар жинақты, ал екіншісінде жинақсыз болуы мүмкін.

Дәрежелік (5.9) қатардың коэффициенттерін негізге алып,

$$|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \sqrt[n]{|c_n|}, \dots \quad (5.10)$$

сандық тізбегін құрамыз. Бұл тізбектің барлық мүшелері теріс емес нақты сандар ретінде қарастырылады.

Сандар тізбегінің ең үлкен шегі l арқылы белгілелік, яғни

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Сонда (5.9) дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы R мына формула арқылы анықталады:

$$R = \frac{1}{l}. \quad (5.11)$$

Бұл формула Коши-Адамар формуласы деп аталады.

Ескертпе. $l=0$ болғанда (5.11) формула $R = +\infty$, ал $l = +\infty$ болған жағдайда $R=0$ деп қабылдау қажет.

(5.11) формуланы қорытқанда біз мына үш жағдайды жеке-жеке қарастырамыз:

1. $l = -\infty$ $(R=0)$,
2. $l=0$ $(R = +\infty)$,
3. $0 < l < +\infty$ $(R = \frac{1}{l})$.

Біз дәрежелік $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$ қатарының оның жинақтылық дөңгелегінің ішіндегі кез келген нүктеде абсолют жинақты болатындығын көрдік. Мынадай сұрақ туады: жинақтылық дөңгелегінің ішінде (1) қатар бір қалыпты жинақты болмай ма? Яғни $|z| < R$ болғанда? Осылай тұжырымдалған сұраққа «жоқ» деп жауап беру керек; мәселен қатар

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

қатары $|z| < 1$ болғанда бір қалыпты жинақты болмайды. Шынында да, бір жағынан, $|z| < 1$ болса, z -ке тәуелсіз $(1 + z + z^2 + \dots + z^N) < N + 1$ теңсіздігін аламыз.

Екінші жағынан, z бірге ұмтылғанда $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z}$ функциясы шектеусіздікке

ұмтылады. Сондықтан, $\frac{1}{1-z} - (1 + z + z^2 + \dots + z^N)$ айырымының модулі z , $|z| < 1$ -ке тәуелсіз алдын ала берілген кез келген оң саннан кем болып қала алмайды. Алайда, егер $r < R$ болса, әрбір дәрежелік қатар $|z| < r$ дөңгелегінде бір қалыпты жинақты болады. Шынында, $|c_n z^n| = |c_n| |z^n| \leq |c_n| r^n$, өйткені жалпы мүшесі $|c_n| r^n$ сан қатары жинақты ($r < R$) болатындықтан, бір қалыпты жинақты қатарлардың белгісі бойынша берілген қатар бір қалыпты жинақты болады.

Дәрежелік (5.9) қатардың мүшелері шын мәнінде үздіксіз функциялар екенін еске алсақ, дәлелденген жағдайдан мынадай қорытынды шығады:

Дәрежелік қатардың қосындысы $|z| \leq r$ болғанда қандай болмасын $r, r < R$, яғни $|z| < R$ болғанда, үздіксіз функция болады, яғни жинақтылық дөңгелегінің ішінде үздіксіз функция. Сөйтіп, $R > 0$ болатын дәрежелік қатар оның жинақтылық дөңгелегінің ішінде үздіксіз функцияны өрнектейді.

5.3 Голоморфтық функцияның дәрежелік қатарға жіктелеуі

Коши теоремасынан және оның көмегімен алынған аналитикалық функцияның дәрежелік қатарға жіктелуін аналитикалық функцияның мәнін түсіндіретін өте маңызды салдар алуымызға болады. Комплекс айнымалының кез келген функциясы жайындағы анықтаманың жалпылығы соншалық, мұндай функцияның комплекс айнымалы жазықтығының G облысының кейбір бөлігіндегі өзгеріс- сипатынан оның G облысының басқа бөліктеріндегі өзгеріс- сипаты жайында қорытындылап айтуға болмайды. Мысалы, айталық, $f(z)$ функциясы комплекс айнымалы z -тің барлық жазықтығында анықталған болсын, сонымен қоса, $|z| \leq 1$ болғанда $f(z) = i$, болсын. Бұл жерде біз $f(z)$ функциясының $|z| > 1$ болғандағы мәніне қатысты еш нәрсе айта алмаймыз, өйткені z -тің осындай мәндері үшін қалауымызша $f(z)$ функциясын анықтай аламыз. Егер $f(z)$ функциясы үздіксіз болуға тиісті болса, онда іс басқаша қойылады: ол уақытта соңғы мысалдағы $f(z)$ функциясының $|z| = 1$ шеңберіне шектеусіз аз шамаға ғана айырылады. Бұл жағдайда функциялардың мәні кейбір жалпы заң арқылы өзара байланысқан болады. Бұл ішкі қасиет z жазықтығының бір бөлігіндегі функция мәнін біле отырып, жазықтықтың басқа бөліктеріндегі өзгеріс – сипаты жайында азды- көпті нақты қорытынды беріге болатындай етіп, функциональдық мәндерді өзара байланыстырады; біз неғұрлым функциялар класын қарастырған сайын мұның қасиеті соғұрлым күшті болатындығы белгілі.

Егер сызықтың мейлінше аз доғасында осы функцияның мәні белгілі болса, бұл облыста функция толығынан аналитикалық, яғни осы облыста бір мәнді анықталған болады. Коши формуласы, контурдың өзінде функцияның мәні белгілі болса, аналитикалық функцияның тұйық C контур ішіндегі барлық мәнін анықтауға болатындығын көрсетеді. Аналитикалық функцияның дәрежелік қатарға жіктелуі туралы теореманың негізінде біз аналитикалық функцияның қасиетін жалпы түрде ашатындай шамамыз бар

Бұл қасиетті жалпы түрде былай тұжырымдаймыз: егер қайсыбір G облысында екі $f(z)$ және $\varphi(z)$ функцияның, осы облыстың шектеусіз E нүктелері жиынында бірдей мәндері болса, сонымен қоса E жиынының кем дегенде G -ның ішінде жататын бір шекті нүктесі болса, онда бұл функциялар G облысының барлық жерінде өзара тең болады.

Егер $f(z)$ функциясының ішінде ең аз дегенде бір шекті нүктесі болатын мәні шексіз z_k нүктелер тізбегінде болса, біз G облысында аналитикалығы бір- ақ жолмен анықталады.

Теореманың салдары ретінде G облысында аналитикалық $f(z)$ және $\varphi(z)$ функциясы

1) G облысының қайсысы бір мейлінше аз нүктелер маңайының барлық жерінде $f(z) = \varphi(z)$ болса,

2) G облысында бүтіндей жататын кез келген аз сызығында $f(z) = \varphi(z)$ болса, онда олар өзара теңбе-тең болады.

Бұл кез келген үздіксіз кешен айнымалы функцияның ғана емес, аналитикалық функцияға да тән тамаша қасиеттердің бірі G облысында үздіксіз кез келген кешен айнымалы функция жағдайында, G облысының бір нүктесінің маңайындағы оның мәні осы облыстың барлық нүктелеріндегі мәнін анықтай алмайды.

Егер $f(z)$ функциясы a нүктенің кез келген маңайында $z - a$ -ға қатысты дәрежелі қатарға жіктелсе, онда осы нүктеде голоморфтық деп атауға келісеміз. Алдыңғы айтылғанға сүйеніп, функцияның a нүктесіндегі голоморфтық қасиеті оның осы нүктедегі аналитикалық болу қасиетімен эквивалентті. Шынында, егер $f(z)$ функциясы a нүктесінде голоморфтық болса, онда анықтама бойынша a нүктесінде радиусы кейбір ρ болып келген κ дөңгелегі табылып, оның ішінде $f(z)$ функциясы $z - a$ -ға қатысты дәрежелі қатарға жіктеледі. $f(z)$ функциясы дәрежелі қатардың қосындысы ретінде осы κ дөңгелегінің ішінде, демек, a нүктесінде аналитикалық болуы тиіс.

Керісінше, егер $f(z)$ функциясы бойынша a нүктесінде аналитикалық болса, онда центрі осы нүкте болатын кейбір ρ радиусы κ дөңгелегі табылып, осы дөңгелек ішінде $f(z)$ аналитикалық функциясы болады. $f(z)$ функциясы κ дөңгелегінің ішінде аналитикалық функциясы ретінде болаындықтан κ ішінде жинақты болатын $z - a$ -ға қатысты дәрежелі қатардың қосындысы түрінде өрнектеуге болады. Демек, $f(z)$ функциясы a нүктесінде голоморфтық болады.

G облысының әрбір нүктесіндегі голоморфтық функцияны біз қысқаша осы облыста голоморфты деп атаймыз.

$f(z)$ функциясын кейбір G облысында голоморфтық деп айту функцияның сол G облысында аналитикалық деп тұжырымдаумен пара-пар.

Сонымен, облыста аналитикалық функцияның, осы облыстың әрбір нүктесінде шектеулі туындысы болатын бір мәнді функция сияқты анықтамасын шығара отырып, біз мұндай функцияның сол облыста голоморфтық болатынын, яғни осы облыстың әрбір кез келген нүктесінің маңайында функцияның дәрежелік қатарға жіктелетінін көрсеттік.

Нақты айнымалы функциялар жағдайында дәрежелі қатарға жіктеу әр уақытта, тіпті функциялардың барлық ретті туындылары болған күнде де мүмкін бола бермейді; кешен айнымалы функциялары үшін мұндай жіктеудің мүмкіншілігін қарастырып, отырған облыстың барлық жерінде бірінші дәрежелі туындының бар болуынан шығып отыр.

5.4 Лоран қатарының жинақталу облысы

Айталық $f(z)$ функциясы a нүктесінде ортақ центрі бар, шекарасы K және k шеңберден тұратын дөңгелек сақинаның ішінде голоморфтық болсын. Бұл шеңберлердің радиустарын сәйкес R және r арқылы белгілейік. Біз сақина ішінде жатқан әрбір z нүктесінде $f(z)$ функциясына жинақты болатын $z-a$ оң және теріс дәрежелері бойынша орналасқан қатар құрамыз, яғни $r < |z-a| = p < R$. Осы мақсатпен $r < r' < p < R' < R$ шарты орындалатындай r' және R' радиустарын алып және c және C арқылы центрі a нүктесіндегі осы радиустардың шеңберін белгілейміз.

Шарт бойынша $f(z)$ функциясы c және C шеңберлерін бірге алғанда осы шеңбер арасындағы сақинада голоморфты болады. Коши формуласын қолданып, мына теңдікті аламыз:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (5.12)$$

мұндағы C мен c интегралдау жолдарының екеуі де оң бағытта өтеді.

$\frac{1}{\zeta - z}$ жіктеуін (5.12) формуладағы интегралдарға қойып және ζ -ге қатысты бір қалыпты жинақталатын салдарынан мүшелеп интегралдауды орындап, мынаны аламыз:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} d\zeta, \quad (5.13)$$

немесе

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n},$$

c_n және b_n үшін біріктіріп бір формула түрінде жазуға болады:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots),$$

мұндағы γ интегралдау контуры центрі a нүктесіндегі берілген сақинаның ішінде жатқан кез келген шеңбер.

Интеграл астындағы функциялар берілген сақинаның барлық жерінде голоморфтық болғандықтан, c_n және b_n мәндерін өзгертпей, олардағы интегралдау жолы ретінде осы сақинаның ішінде жатқан центрі a нүктесіндегі кез келген γ шеңберін аламыз; екінші жағынан, мынаны аламыз:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{-n+1}} = c_{-n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

Алынған белгілеулердің негізінде (5.13) жіктеуді былай жаза аламыз:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n},$$

немесе

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

Сонымен, берілген сақинаның ішінде жатқан барлық z үшін дұрыс екі бөлектен тұратын (5.13) қатары арқылы $f(z)$ функциясының бейнесін алдық: оның бірінші бөлігі $(z-a)$ дәрежелерінің өсуі бойынша орналасқан $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ қатарды, $(z-a)$ -ға қатысты дәрежелі қатар); екінші бөлігі $(z-a)$ дәрежелерінің теріс кемуі бойынша орналасқан $\sum_{n=-1}^{\infty} c_n(z-a)^n$, қатарды береді $(\frac{1}{z-a})$ -ға қатысты дәрежелі қатар). Бұл екі қатардың екеуі де берілген сақинаның ішіндегі әр нүктеде жинақты болады. (5.13) қатар **Лоран қатары** деп аталады.

Лоран қатарының дұрыс және бас бөліктері

Лоран қатарынан (5.13) тұратын екі бөлекті жеке қарастырайық. Бірінші қатар $\sum_{n=-1}^{\infty} c_n(z-a)^n$ қатары K шеңберінің ішінде жатқан барлық z нүктелері үшін жинақты болатын кәдімгі дәрежелері қатар Лоран қатарының **дұрыс бөлігі** деп аталады. Егер былай деп алсақ:

$$c_{-n} = b_n, \quad \frac{1}{z-a} = z',$$

Онда екінші қатарды да $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ жай дәрежелі қатар ретінде қарастыруға болады. Жаңа белгілеулерде бұл қатар мына түрде болады:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z'^n, \quad (5.14)$$

Бұл (5.14) қатар $\frac{1}{R} < |z'| < \frac{1}{r}$ болғанда жинақты болатыны белгілі, өйткені егер $r < |z-a| < R$ болса, онда бастапқы қатар жинақты болады.

Демек, z' - ке қатысты (5.14) қатар дәрежелі қатар болатын барлық z' нүкте үшін жинақты болады, $|z| < \frac{1}{r}$ және $|z'| < \frac{1}{r}$ болғандығы z' айнымалысының голоморфтық функциясын кескіндейді.

Бұрынғы айнымалы z - ке қайта оралып, $|z-a| < r$ теңсіздігі орындалатын барлық z үшін $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ қатары жинақты болатыны көреміз, яғни k шеңберінің сыртында жатқан барлық z нүктелерде және k сыртындағы барлық жерде голоморфтылық $f_2(z)$ функциясын кескіндейді. (5.13) жіктеуіне енетін екінші қатары Лоран қатарының **бас бөлігі** деп аталады. Сонымен $f(z)$ функциясы қосынды түрінде былай жазылады:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

мұндағы $f_1(z)$ - K шеңберінің ішіндегі голоморфтық функция. K және k шеңберінің арасындағы сақина ішіндегі $f_1(z)$ және $f_2(z)$ функцияның екеуі де голоморфтық.

5.5 Бірмәнді функцияның ерекше нүктелерінің классификациясы

K шеңберінің ішінде оның a центрі бір мәнді $f(z)$ функциясының ерекше нүктесі болғандағы жағдай аса көңіл аударарлық. Бұл жағдайда Лоран жіктеуі:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad (5.15)$$

K шеңберінің ішінде жатқан $z=a$ нүктесінен басқа, кез келген z нүктесінде жинақты болады және K шеңберінің центрінен басқа нүктелердің бәрінде де голоморфтық болатын $f(z)$ функциясын оңашаланған ерекше нүктесі деп аталынады да, ал ол функция бұл нүктенің маңайында (4) жіктеумен кескінделеді. Бір мәнді $f(z)$ функциясының оңашаланған ерекше нүктелерін классификациялау негізіне біз ол функцияны осындай нүктелердің маңайында жіктеу әдісін аламыз. Мұнда үш жағдай болуы мүмкін:

1. (5.15) Лоран жіктеуінде $z-a$ – ның теріс дәрежелерінің шектеусіз жиыны бар. Бұл жағдайда a нүктесі $f(z)$ функциясының елеулі ерекше нүктесі деп аталады.

2. (5.15) жіктеуде $(z-a)$ – ның теріс дәрежелерінің тек шектеулі саны бар. Бұл жағдайда a нүктесін $f(z)$ функциясының полюсі деп атаймыз.

3. (5.15) жіктеуде $z-a$ – ның теріс дәрежелері мүлдем жоқ. Бұл жағдайда a нүктесін $f(z)$ функциясының жөнделетін ерекше нүктесі деп аталады.

Бір мәнді функцияның оңашаланған нүктелерін үш типке бөліп, енді әрбір көрсетілген типтердің маңайында функцияның өзгеріс – сипатын анықтайық (оңашаланған ерекше a нүктесінің маңайына деп $0 < |z-a| < R$ шартын қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің жинағын түсінеміз, мұндағы R – ді $f(z)$ функциясы барлық z нүктелерінде голоморфтық болатындай мейлінше аз етіп аламыз).

Елеулі ерекше нүкте. Сохоцкий теоремасы

$f(z)$ функциясының елеулі ерекше нүктесінің маңайында өзгеріс – сипатын зерттеу ғана қалды. Біз жөнделінетін a нүктесі жағдайында z нүктесі a нүктесіне ұмтылғанда $f(z)$ функциясы анықталған шектеулі c_0 шекке ұмтылатынын көрдік; полюс жағдайында да функция шексіздікке тең анықталған шекке ұмтылады. Егер a елеулі ерекше нүкте болса, онда Ю. В. Соходский тағайындаған мынадай теорема орын алады: тұрақты A саны қандай да болсын, шектеулі не шектеусіз болсын, елеулі ерекше a нүктесіне жинақты болатын $z_1, z_2, \dots, z$ тізбегі табылып, ол мынаған тең болады:

$$\lim_{z_n \rightarrow \infty} f(z) = A,$$

Мұны қысқаша былай тұжырымдауға болады: елеулі ерекше нүктенің мейлінше аз маңайында $f(z)$ функциясы алдын ала берілген кез келген санға, шектеулі немесе шектеусіз санға мейлінше жуық мәндерді қабылдайды.

Енді A кез келген шектеулі комплекс сан болсаын, a нүктесінің қанадай да болсын аз маңайында $f(z) = A$ орындалатындай z нүктесі табылатын жағдай юолуы мүмкін. Бұл жағдайда Соходский теоремасы өз күшін сақтайды. Сондықтан a нүктесінің жеткілікті аз маңайында $f(z)$ функциясы A – ға тең емес деп болжауымызға болады. Егер осылай болса, онда $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$

функциясы елеулі ерекше нүктесі болатын, $z = a$ нүктеден басқа, a нүктесінің маңайында голоморфтық болады. Дәлелдеуіміз бойынша a нүктесіне жинақты болатын $\lim_{z_n \rightarrow a} \varphi(z_n) = \infty$ орындалатын z_n нүктелер тізбегі табылады, бұдан: $\lim_{z_n \rightarrow a} f(z_n) = A$ екені шығады. Дәлелдеу керектігі де осы.

Жөнделетін ерекше нүкте

Үшінші типтегі ерекше нүктені қарастырудан бастайық. Бұл жағдайда (1) жіктеуі кәдімгі дәрежелі қатарға айналады, демек, a нүктесінің барлық маңайында соның ішінде a нүктесінің өзінде голоморфтық функцияны береді. Берілген $f(z)$ функциясы, егер $z \neq a$ болса, біздің қатарымыздың қосындысымен бірдей болады. Демек, егер

$$f(a) = c_0,$$

деп ұйғарсақ, онда біз берілген $f(z)$ функциясын a нүктесінде голоморфтық функция етіп жасай аламыз. Сонымен, егер біз функциямызды осы ерекше нүктеде тиісті түрде анықтасақ, үшінші типтегі ерекше нүкте алдындағы жағдайдан жоқ болып кетеді, егер a нүктесі жөнделенетін ерекше нүкте болса, онда мынаны аламыз: $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$ дербес жағдайда, M және η оң сандары бар болып,

$$0 < |z - a| < \eta \text{ болғанда } |f(z)| < M, \quad (5.16)$$

орындалады.

(5.16) теңсіздіктің бар болуы қысқаша мына сөзбен білдіреміз: жөнделенетін ерекше нүктенің аз маңайында берілген функция шектелген болады. Алдағы уақытта мұның кері жағының юолатынын көреміз, егер оңашаланған ерекше нүктенің маңайында функция шектелген болса, онда бұл нүкте жөнделенетін ерекше нүкте болады.

Полюс

Енді біздің полюс деп атаған ерекше нүктенің екінші типін анализдеуге көшейік. Бұл жағдайда (5.15) жіктеудің $z-a$ теріс дәрежелі шектеулі саны

болады. (5.15) Лоран жіктеуіне енетін $\frac{1}{(z-a)}$ ең жоғарғы дәрежесін m арқылы белгілей отырып, мынаны аламыз:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m},$$

мұндағы $c_{-m} \neq 0$. Егер $m=1$ болса, a полюсі *жай*, ал $m>1$ болса, оны еселі деп атайды; m санын полюстің реті деп атайды. Осы жіктеудің екі жағын $(z-a)^m (z \neq a)$ көбейтіп, мынаны табамыз:

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+m} + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_{-2}(z-a)^{m-2} + \dots + c_{-m},$$

Алынған теңдіктің оң жағындағы бос мүшесі c_{-m} ноль болмайтын кәдімгі дәрежелі қатарда тұр.

Демек, a нүктесі $(z-a)^m f(z)$ функциясы үшін жөнделінетін ерекше нүкте болып табылады, сонымен қатар мынадай болады:

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = c_{-m} \neq 0,$$

Дербес дағдайда, бұл теңдіктен мынау шығады:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |z-a|^m |f(z)| = |c_{-m}|, \quad (5.17)$$

$|c_{-m}|$ -дан кіші кез келген оң санды q арқылы белгілеп, онда (5.17) салдардан

$$0 < |z-a| < \eta \text{ болғанда, } |z-a|^m |f(z)| > q$$

немесе

$$0 < |z-a| < \eta \text{ болғанда } |f(z)| > \frac{q}{|z-a|^m},$$

болатын жеткілікті аз η оң санын табамыз.

Соңғы теңсіздік z нүктесі a нүктесіне ұмтылғанда $|f(z)|$ шексіздікке ұмтылатындығын көрсетеді, ал мұны символмен былай жазамыз: $\lim_{z \rightarrow \infty} = \infty$, қысқаша айтқанда, полюсте функция шексіздікке айналады.

Ноль мен полюстің арасындағы байланыс

Айталық $f(z)$ функциясын a нүктесінде кейбір маңайында $f(z)$ функциясы

$$f(z) = c_m (z-a)^m + c_{m+1} (z-a)^{m+1} + \dots, \quad (5.18)$$

дәрежелік қатармен берілетін белгілі, мұндағы $c \neq 0$ немесе

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z),$$

бұл жағдайда $\varphi(z)$ функциясы a нүктесінде голоморфтық және нольге тең емес.

(5.18) салдарынан $\frac{1}{f(z)}$ кері шама былай беріледі:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-a)^m}, \quad (5.19)$$

әрі $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ функциясы a нүктесінде голоморфтық және нольден ерекше.

Былай болатынын

$$\psi(z) = \psi(a) + \psi'(a)(z-a) + \dots,$$

ескеріп, (5.19) – ден $a(z \neq a)$ нүктесінің маңайында мынаны аламыз:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{\psi(a)}{(z-a)^m} + \frac{\psi'(a)}{(z-a)^{m-1}} + \dots,$$

осыдан $\frac{1}{f(z)}$ функциясы үшін a нүктесі m – ретті полюс болатындығы шығады.

Керісінше, a нүктесін $f(z)$ функциясының m – ретті полюсі деп жорып, осы нүктенің маңайында ($z \neq a$) мынадай болатыны табамыз:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad (5.20)$$

Мұндағы z нүктесі a нүктесіне ұмтылғанда $\varphi(z)$ функциясы нольден басқа шекке ұмтылады, деме, оны a нүктесінде голоморфтық және нольге тең емес функция ретінде қарастыруға болады. (5.20) теңдіктің көмегімен

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m \frac{1}{\varphi(z)} = (z-a)^m \psi(z),$$

өрнегін құрып және жоғарыдағы есептеуді қолданып, мынаны табамыз:

$$\frac{1}{f(z)} = \psi(a)(z-a)^m + \psi'(a)(z-a)^{m+1} + \dots,$$

мұндағы $\psi(a) \neq 0$, ал бұдан, егер $\frac{1}{f(a)} = 0$ деп ұйғарсақ, a нүктесі $\frac{1}{f(z)}$ функциясының m – ретті нолі болатындығы шығады.

Сонымен, жоғарыда айтылғандардан мынадай қорытындығы келеміз: егер a нүктесі $f(z)$ функциясы үшін m ретінің ролі болса, онда сол нүкте $\frac{1}{f(z)}$ функциясы үшін m ретінің полюсі болады.

Бұдан мынау шығады, егер $f(z)$ функциясы нольге айналмаса, онда ол $\frac{1}{f(z)}$ функциясымен бірге a нүктесінде елеулі ерекше нүкте болады.

Мына $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \left(\frac{z}{1+i} \right)$ қатарының жинақтылық облысын Даламбер

белгісімен тапқан тиімді: $D_n = \frac{|f_{n+1}(z)|}{|f_n(z)|} = \frac{(n+1)^{n+1} * |z|n!}{(n+1)!|1+i|n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n * \frac{|z|}{|1+i|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \frac{|z|}{\sqrt{2}} < 1.$

Демек, берілген қатардың жинақтылық облысы $|z| < \frac{\sqrt{2}}{e} = R$

Төменде кешен облысында берілген кейбір қатарлардың есептерін шығару мысалдарын қарастырамыз:

1. Ал мына $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n$ (α – кез келген нақты сан) қатарының жинақтылық

облысын Коши белгісімен тапқан тиімді: $K_n = |z| \sqrt[n]{n^{\alpha}} = |z| n^{\frac{\alpha}{n}} = |z| e^{\frac{\alpha \ln n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |z| < 1$

Бұл қатардың қатардың жинақтылық облысы $|z| < 1$ (мұнда да $R = 1$)

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ қатарының жинақтылық облысын Даламбер белгісімен тапқан

ыңғайлы. Шынында $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}| |z|}{|c_n|} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = |z|$

Ал $|z| = 1$ шеңбердің нүктелерінде берілген қатардың мүшелерінің модульдерінен құралған қатардың $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ жинақты екені белгілі. Демек, берілген дәрежелік қатар $U_1(0) = \{z : |z| \leq 1\}$ бірқалыпты, абсолют жинақты

3. $f(z) = 1 - \cos z$ функциясының $z = 0$ нүктесі 2-ретті нөлі, өйткені $f(0) = 0, f'(z) = \sin z \Big|_{z=0} = 0, f''(z) = \cos z \Big|_{z=0} = 1 \neq 0 (p = 2)$

4. $f(z) = \sin z - z$ функциясы үшін $z = 0$ нүктесі 3-ретті нөлі, өйткені $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, ал $f'''(z) = -\cos z \Big|_{z=0} \neq 0 (p = 3)$

5. $f(z) = \sin z$ үшін $z = \pi k, (k - \text{бүтін сан})$ бірінші ретті нөлдері. Егер аналитикалық $f(z)$ функциясының $U_{\varepsilon}(a) = \{z : z + a, |z - a| < \varepsilon\}$ шағын төңірегінде оның басқа нөлдері болмайтынын мына төмендегі теорема көрсетеді.

Теорема Аналитикалық функцияның нөлдері оңашаланған.

Егер $z = a$ саны берілген $f(z)$ p еселі нөлі болса, онда $f(z) = (z - a)^p [C_p + C_{p+1}(z - a) + C_{p+2}(z - a)^2 + \dots] = (z - a)^p \phi(z)$ болады, мұндағы $(z - a)^p$ көбейткіші $z \neq a$ нүктелерінде нөлден айрықша, ал $\phi(z)$ аналитикалық функция және $\phi(z) \neq 0$. Олай болса, $\forall a \neq z \in U_{\varepsilon}(a)$ үшін $f(z) \neq 0$

Ілгеріде көрсетілгендей $\ln z_1 = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ функциясы нольдік нүктесі болмайтын кез

келген бір байланысты облыста аналитикалық функция, дербес жағдайда, мысалы, жорамал осьтен санағанда барлық жерде оң жағынан аналитикалық функция болады. Демек $\ln z$ -ті нақты дәрежелік, мысалы $z = 1$ маңайында жіктеуге болады. Сонымен қоса, бұл қатардың жинақтылық радиусы бірге тең болады.

6. Кешен айнымалы функцияның интегралын есептеу.

$f(z) = z$ $L : z_0$ және $z_1 = 1 + i$ нүктелерін қосатын түзу.

$$\int_L z dz = \int_L (x + iy)(dx + idy) = \int_L x dx + xidy + iydx - ydy = \int_L (x dx - y dy) + i \int_L (x dy + y dx) =$$

$$= \left. \begin{array}{l} z_0 = 0, x = 0, y = 0 \\ z_1 = x + iy, x = 1, y = 1 \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ x = y, dx = dy \end{array} \right| = \int_0^1 (x dx - x dx) + i \int_0^1 (x dx + x dx) = i$$

7. Кешен айнымалы функцияның интегралын есептеу.

$f(z) = z$ $L: z_0 = 0$ және $z_1 = 1 + i$ нүктелерін қосатын түзу.

$\int_L \frac{z dz}{z}$ ең алдымен $\frac{z}{z}$ бөлек есептеп алу керек,

$$\frac{z}{z} = \frac{(x + iy)(x + iy)}{(x - iy)(x + iy)} = \frac{x^2 + xiy + xiy - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + 2xiy - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Енді интегралды есептейміз:

$$\int_L \frac{z dz}{z} = \left(\int_L \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \int_L \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) (dx + idy) = \int_L \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx + i \int_L \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dy - \int_L \frac{2xy}{x^2 + y^2} dy + i \int_L \frac{2xy}{x^2 + y^2} dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} z_0 = 0, x = 0, y = 0 \\ z_1 = x + iy, x = 1, y = 1 \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ x = y, dx = dy \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx + i \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx + i \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2 + y^2} dx - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2 + y^2} dx = -1 + i$$

8. Кешен айнымалы функцияның интегралын есептеу. $\int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz$

$C: z_0 = 0$ және $z_1 = 1 + i$ екі нүктенің қосындысынын кесіндісі үшін.

Интегралды есептейік:

$$\int_C (1 + i - 2x + i2y) ds = \int_C [(1 - 2x) + i(1 + 2y)] ds = \int (1 - 2x + i + i2y) d(x + iy) = \int [(1 - 2x) + (i + i2y)]$$

$$(dx + idy) = \int dx - 2x dx + i dx + i2y dx + i dy - i2x dy - dy - 2y dy =$$

$$= \int dx - 2x dx + i dx + 2x dx + i dx - i2x dx - dx - 2x dx = \int -4x dx + i(1 + 2x + 1 - 2x) dx =$$

$$= \int -4x dx + i2x dx = 2(1 + i)$$

9. Кешен айнымалы функцияның интегралын есептеу.

$$\int_C (z^2 + z * \bar{z}) dz \quad C: |z| = 1 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$|z| = 1$ бөлек есептеп алайық:

$$z = e^{i\varphi}, \bar{z} = e^{-i\varphi}$$

$$dz = ie^{i\varphi} d\varphi, z^2 = (e^{i\varphi})^2 = e^{2i\varphi}$$

Енді интегралды есептейік:

$$\int_C (e^{2i\varphi} + e^{i\varphi} * e^{-i\varphi}) i e^{i\varphi} d\varphi = \int_0^\pi (i e^{3i\varphi} + i e^{i\varphi}) d\varphi = i \int_0^\pi e^{3i\varphi} d\varphi + i \int_0^\pi e^{i\varphi} d\varphi = i \frac{e^{3i\varphi}}{3i} + i \frac{e^{i\varphi}}{i} = -\frac{3}{1} - \frac{4}{3} + 1 = -\frac{8}{3}$$

10. Кешен айнымалы функцияның интегралын есептеу.

$$\int_0^i z \cos z dz = \left| \begin{array}{l} u = z \\ du = dz \\ dv = \cos z dz \\ v = \sin z \end{array} \right| = z \sin z \Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz = z \sin z \Big|_0^i + \cos z \Big|_0^i = i \sin i + \cos i - \cos 0 =$$

$$= -1 + \cos i + i \sin i = -sh1 + ch1 - 1 = ch1 - sh1 - 1$$

11. $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2}$

$0 < |z-1| < 2$ сақинада Лоран қатарын жіктеу керек.

$$0 < |x+iy-1| < 2 \quad 0 < \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 2 \quad 0 < (x-1)^2 + y^2 < 2$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z+1)^2} + \frac{D}{z+1};$$

$$1 = A(z+1)^2 + B(z-1)(z+1)^2 + C(z-1)^2 + D(z-1)^2(z+1);$$

$$1 = Az^2 + 2Az + A + Bz^3 + Bz^2 - Bz - B + Cz^2 - 2Cz + C + Dz^3 - Dz^2 - Dz + D;$$

$$z^3 \quad B+D=0$$

$$z^2 \quad A+B+C-D=0$$

$$z^1 \quad 2A-B-2C-D=0$$

$$z^0 \quad A-B+C+D=1$$

$$D = \frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4}; \quad C = \frac{1}{4};$$

$$f(z) = \frac{1}{4(z-1)^2} + \frac{1}{4(z-1)} + \frac{1}{4(z+1)^2} + \frac{1}{4(z+1)};$$

$$f(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{[(z-1)+2]} = \frac{1}{4[2+(z-1)]^2} = \frac{1}{16} \frac{1}{\left[1+\frac{z-1}{2}\right]^2} = \left[1+\frac{z-1}{2}\right]^{-2};$$

$$f(z) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} \right] + \frac{1}{16} \left[1 + (-2)\frac{z-1}{2} + \frac{(-2)(-3)(z-1)^2}{2!2^2} + \frac{(-2)(-3)(-4)(z-1)^3}{3!2^3} + \dots \right] +$$

12. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$; $z = 0$ нүктеде оңашаланған ерекше нүкте.

Себебі: $f(z) = \frac{\sin 0}{0} = \left(\frac{0}{0} \right)$; $f(z) = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$

$z = 0$ нүктеде берілген $f(z)$ функциясы үшін жөнделетін ерекше нүкте.

13. Егер $1 < |z| < 2$ болса, онда $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$, егер $2 < z < \infty$

болса, $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}-1}{z^n}$ жіктеулерін алу қиын емес.

Біз мұнда бір функция үшін екі Лоран жіктеуін алып отырмыз; алайда бұл жағдай жіктеудің жалғыздығы туралы теоремаға қайшы келмейді, өйткені көрсетілген жіктеулер әр түрлі дөңгелек сақиналар үшін орындалады.

Бақылау сұрақтары мен тапсырмалар:

- 1 Кешендік облыстағы қатарларды атаңыз
- 2 Кешендік облыстағы қатарлардың жинақталу белгілерін атаңыз
- 3 Дәрежелік қатардың бірқалыпты жинақтылығы қалай анықталады?
- 4 Голоморфтық функцияның дәрежелік қатарға жіктелеуінің шарттарын атаңыз
- 5 Лоран қатарының жинақталу облысын табу формулалары
- 6 Лоран қатарының дұрыс және бас бөліктерінің айырмашылықтары неде?
- 7 Ерекше нүктелерінің классификациясын атаңыз
- 8 Сохоцкий теоремасын дәлелдеңіз

А. Тесттік сұрақтар

1.1 Қосылғыштары сан болып табылатын $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ қосындысы:

- а) дәрежелік қатар
- б) сандық қатар
- в) функционалдық қатар
- г) бөліктік қатар
- д) қатар қосындысы

2.1 Алғашқы n - мүшесінің қосындысы қалай аталады:

- а) қатардың ортақ мүшесі
- б) қатар қосындысы
- в) n -ші ретті қосындысы
- г) n -ші дәрежелі қалдық
- д) орташа арифметикалық қатар

3.1 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ ($a; q$ -сандар) қатар түрін анықтаңыз:

- а) Лейбниц қатары
- б) гармоникалық қатар
- в) жалпыланған гармоникалық қатар
- г) геометриялық қатар
- д) Дирихле қатары

4.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қатар түрін анықтаңыз:

- а) Лейбниц қатары
- б) гармоникалық қатар
- в) жалпыланған гармоникалық қатар
- г) геометриялық қатар
- д) Дирихле қатары

5.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ қатардың қосындысын тап :

- а) 2
- б) -2
- в) -3
- г) 1
- д) 3,5

6.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ қатардың қосындысын тап :

- а) 1,5
- б) 2

- в) -3
- г) -1
- д) 1

7.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ қатардың қосындысын тап :

- а) 4
- б) -2
- в) -3
- г) -1
- д) 0,5

8.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+2)(n+3)}$ қатардың қосындысын тап :

- а) 2
- б) -2
- в) -3
- г) 1
- д) -1

9.1 n -ші мүшесінің формуласын анықтаңыз : $\frac{3}{5} + \frac{6}{7} + \frac{12}{9} + \frac{24}{11} + \dots +$

- а) $\frac{3 \cdot 2^{n-1}}{2n+3}$
- б) $\frac{3 \cdot 2^n}{2n-3}$
- в) $\frac{3 \cdot 2^{n-1}}{2n-3}$
- г) $\frac{3 \cdot 2^n}{2n+3}$
- д) $\frac{3 \cdot 2^n}{2n}$

10.1 Қатардың $(n-1)$ -ші мүшесін табыңыз $7 + \frac{9}{5} + \frac{11}{9} + \frac{13}{13} + \frac{15}{17} + \dots +$

- а) $\frac{2n+5}{4n-3}$
- б) $\frac{2n}{4n-3}$
- в) $\frac{2n+5}{4n}$
- г) $\frac{2n+3}{4n-7}$
- д) $\frac{2n-1}{4n-3}$

11.1 Қатардың n -ші мүшесінің формуласын көрсетіңіз $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots +$

- а) $\frac{1}{3n-1}$

- б) $\frac{1}{4n-1}$
 в) $4n-1$
 г) $3n-1$
 д) $4n+2$

12.1 Қатардың $n+1$ мүшесін анықтаңыз

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n-3}$
 а) $\frac{n+2}{n-2}$
 б) $\frac{n}{n-2}$
 в) $\frac{n+2}{n}$
 г) $\frac{n-2}{n+1}$
 д) $\frac{n+1}{n-2}$

13.1 Қатардың $(n+2)$ -ші мүшесін анықтаңыз

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^2} :$
 а) $\frac{n}{n^2+2n+4}$
 б) $-\frac{n}{n^2+4n}$
 в) $-\frac{n}{n^2+4n+4}$
 г) $\frac{n}{n^2+2n+4}$
 д) $\frac{n}{n^2+3n+4}$

14.1 Қатардың екінші мүшесін табыңыз

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!} :$
 а) 50
 б) 5
 в) 10
 г) 0,5
 д) 25

15.1 Даламбер бойынша қатарды есептеңіз $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} :$

- а) 2
 б) -2
 в) -3
 г) 1
 д) 0,5

16.1 Даламбер бойынша қатарды есептеңіз $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n}$:

- а) 1
- б) ∞
- в) $\frac{3}{2}$
- г) $\frac{2}{3}$
- д) $\frac{1}{3}$

17.1 Егер $e^z + x + 2y + z = 4$, $z'_x(1,1,0)$ табыңдар.

- а) 2
- б) -2
- в) -3
- г) 1
- д) -0,5

18.1 Даламбер бойынша қатарды есептеңіз

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n}$$

- а) ∞
- б) 1
- в) 0
- г) $\frac{1}{10}$
- д) $\frac{1}{2}$

19.1 Даламбер бойынша қатарды есептеңіз

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

- а) 20
- б) -2
- в) -3
- г) 1
- д) 2

20.1 Коши бойынша қатарды есептеңіз

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} :$$

- а) 1
- б) ∞
- в) 3
- г) $\frac{e}{3}$
- д) $\frac{1}{3}$

21.1 Коши бойынша қатарды есептеңіз

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n :$$

- а) 12
- б) -2
- в) -13
- г) 10
- д) -0,5

22.1 Коши бойынша қатарды есептеңіз

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n} :$$

- а) 2
- б) -2
- в) -3
- г) 1
- д) 0

23.1 Коши бойынша қатардың есептеңіз

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} :$$

- а) -1
- б) -2
- в) -3
- г) 1
- д) 0

24.1 Коши бойынша қатарды есептеңіз

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2} :$$

- а) 1
- б) 2
- в) -3
- г) -1
- д) 0

25.1 Қатарды жинақтылыққа зерттеу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n :$$

- а) абсолютті жинақты
- б) жинақсыз
- в) жинақты
- г) шартты жинақты
- д) дұрыс жауабы жоқ

26.1 Қатарды жинақтылыққа зерттеу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!} :$$

- а) шартты жинақты
- б) абсолютті жинақты
- в) жинақсыз
- г) жинақты
- д) бірқалыпты жинақты

27.1 Қатарды жинақтылыққа зерттеу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} :$$

- а) дұрыс жауабы жок
- б) абсолютті жинақты
- в) жинақсыз
- г) шартты жинақты
- д) жинақты

28.1 Қатарды жинақтылыққа зерттеу

$$\sum (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{n}{10^n} \right) :$$

- а) жинақты
- б) абсолютті жинақты
- в) шартты жинақсыз
- г) жинақсыз
- д) шартты жинақты

29.1 Қатарды жинақтылыққа зерттеу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} :$$

- а) абсолютті жинақты
- б) жинақсыз
- в) шартты жинақты
- г) жинақты
- д) шартты жинақсыз

30.1 Қатарды жинақтылыққа зерттеу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3 \sqrt{n}} :$$

- а) бірқалыпты жинақты
- б) жинақты
- в) шартты жинақты
- г) абсолютті жинақты
- д) жинақсыз

31.1 Қатарды жинақтылыққа зерттеу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n} :$$

- а) бірқалыпты жинақты
- б) жинақты
- в) шартты жинақты
- г) абсолютті жинақты
- д) жинақсыз

32.1 Қатарды жинақтылыққа зерттеу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n}} :$$

- а) бірқалыпты жинақты
- б) жинақты
- в) шартты жинақты
- г) абсолютті жинақты
- д) жинақсыз

33.1 Қатарды жинақтылыққа зерттеу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} :$$

- а) жинақсыз
- б) жинақты
- в) абсолютті жинақты
- г) шартты жинақты
- д) шартты жинақсыз

34.1 Қатарды жинақтылыққа зерттеу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} :$$

- а) шартты жинақты
- б) жинақты
- в) абсолютті жинақты
- г) дұрыс жауабы жоқ
- д) жинақсыз

35.1 Қатардың қосындысын тап $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots :$

- а) $\frac{1}{1-x^2}; |x| < 1$
- б) $\frac{1}{1-x}; |x| < 1$
- в) $1-x^2; |x| > 1$
- г) $+\infty$
- д) $\frac{1}{x}; |x| < 1$

36.1 Қатардың жинақтылық радиусын тап

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} x^{n-1} :$$

а) 3

б) $\frac{1}{2}$

в) ∞

г) $\frac{1}{3}$

д) 0

37.1 Қатардың жинақтылық радиусын тап

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} :$$

а) $+\infty$

б) 1

в) $\frac{1}{2}$

г) 0

д) $\frac{1}{3}$

38.1 Қатардың жинақтылық интервалын тап

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} x^{n-1} :$$

а) (-1;1)

б) (-3;3)

в) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

г) (-2;2)

д) при $x = 0$

39.1 Қатардың жинақтылық интервалын тап

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} :$$

а) $(-\infty; +\infty)$

б) $x = 0$

в) (-1;1)

г) $(-e; e)$

д) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

40.1 Қатардың жинақтылық интервалын тап

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^n :$$

а) $(-\infty; +\infty)$

б) $x = 0$

в) (1;2)

г) $(-e; e)$

д) $(-1; 1)$

41.1 Қатардың жинақтылық маңайын тап

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} :$$

а) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

б) $x = 0$

в) $(-1; 1)$

г) $(-e; e)$

д) $(-\infty; +\infty)$

42.1 Қатардың жинақтылық маңайын тап

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^n$$

а) $(-1; 1)$

б) $[-1; 1)$

в) $(-1; 1]$

г) $[-1; 1]$

д) $(-\infty; +\infty)$

43.1 e^x функциясын Маклорен қатарына жікте:

а) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

б) $e^x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$

в) $e^x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

г) $e^x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$

д) $e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \dots$

44.1 Коэффициенттері $c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \dots, c_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$

формуласымен алынған қай қатар Тейлор қатары деп аталады?

а) $c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$

б) $f''(z) = 2c_2 + 2*3c_3(z-a) + \dots + (n-1)nc_n(z-a)^{n-2} + \dots$

в) $f^{(p)}(z) = 2*3pc_p + 2*3\dots p(p+1)c_{p+1}(z-a) + \dots$

г) $f^{(p)}(z) = 2*3pc_p$

д) $c_0 - c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 - \dots + c_n(z-a)^n - \dots$

45.1 Егер $f(z)$ функциясы a нүктесінің кейбір маңайында аналитикалық болса, яғни центрі a нүктесіндегі мейлінше кіші радиусы бар, ішінде $f(z)$ функциясы аналитикалық болатын дөңгелек бар болса, онда $f(z)$ функциясын осы a нүктесінде аналитикалық деп атайды. Қысқаша, осындай a нүктесін берілген функциясының қандай нүктесі деп атаймыз?

а) оңашаланған

б) ерекше

в) дұрыс+

г) жай

д) дұрыс емес

46.1 Егер G облысында голоморфтық $f(z)$ ($f(z) \neq 0$) функциясы осы облыстың a нүктесінде нөлге тең болса, оның a нүктесінің кейбір маңайындағы жіктелу қандай түрде болады?

а) $f(z) = c_1(z-a)^2 + c_2(z-a)^2 + \dots$,

б) $\varphi(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$,

в) $f(z) = c_1(\eta-a) + c_2(\eta-a)^2 + \dots$,

г) $f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$, +

д) $f(z) = c_1(\zeta-a) + c_2(\zeta-a)^2 + \dots$,

47.1 Төмендегі функция үшін толық дәрежелі қатар құрыңыз: $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)^2$

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) z^n$

б) $\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) z$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right)$

$$\text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n z^n$$

$$\text{д) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n-1}\right)^n z^n$$

48.1 $\arctg z$ функциясының басты мәндерін нөлдік нүктенің маңайында дәрежелі қатарға жіктелу керек.

$$\text{а) } z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

$$\text{б) } z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^5}{2^2 \cdot 2! \cdot 5}$$

$$\text{в) } z - \frac{z^3}{2 \cdot 3}$$

$$\text{г) } z - \frac{z^3}{3}$$

$$\text{д) } z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

49.1 Кез келген $f(z)$ функциясының дұрыс емес нүктесін қандай нүктесі деп функция-атаймыз ?

а) оңашаланған

б) ерекше

в) дұрыс

г) жай

д) дұрыс емес нүкте болмайды

50.1 Егер $f(z)$ функциясы a нүктенің кез келген маңайында $z - a$ -ға қатысты дәрежелі қатарға жіктелсе, онда оны осы нүктеде қалай атаймыз ?

а) оңашаланған

б) келтірілген

в) арифметикалық

г) голоморфтық

д) ерекшеленген

51.1 $\arcsin z$ функциясының басты мәндерін нөлдік нүктенің маңайында дәрежелі қатарға жіктелу керек.

а) $z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^5}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} + \dots$

б) $z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^5}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} + \dots$

в) $z - \frac{z^3}{2 \cdot 3}$

г) z

д) $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$

52.1 Егер дәрежелі $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$, қатары $|z| < R$ дөңгелегінде жинақты болса және ол дөңгелекте модулі әр уақытта M -нен кем $f(z)$ функциясын кескіндесе, онда төмендегі теңсіздік орын алады. Сол теңсіздікті көрсет

а) $|c_n| < \frac{M}{R^n} (n = 0, 1, 2, \dots)$

б) $|c_n| > \frac{M}{R^n} (n = 0, 1, 2, \dots)$

в) $|c_n| \leq \frac{M}{R^n} (n = 0, 1, 2, \dots)$

г) $|c_n| \geq \frac{M}{R^n} (n = 0, 1, 2, \dots)$

д) $|c_n| = \frac{M}{R^n} (n = 0, 1, 2, \dots)$

53.1 $|z| > 1$ болғанда $e^{\frac{1}{1-z}}$ функциясын Лоран қатарына жіктеңіз.

а) $1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} - \frac{19}{120z^5} + \dots$

б) $\frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{19}{z^4} + \frac{65}{z^5} + \dots$

в) $1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$

г) $\frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \dots$

д) $1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} - \frac{19}{120z^5} + \dots + \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{19}{z^4} + \frac{65}{z^5} + \dots$

54.1 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ жіктеуде $z-a$ -ның теріс дәрежелері мүлдем жоқ. Бұл

жағдайда a нүктесін $f(z)$ функциясының қандай нүктесі дейміз?

- а) елеулі ерекше нүкте
- б) полюсті
- в) жөнделенетін ерекше нүктесі
- г) дұрыс нүкте
- д) бас нүкте

55.1 $z = \infty$ болғанда $\frac{z^2+1}{e^z}$, функциялары үшін $\cos z - \sin z$ ерекшеліктерін анықтаңыз.

- а) дұрыс нүкте
- б) бір ретті полюс
- в) реті ноль
- г) елеулі ерекше нүкте
- д) жөнделенетін ерекше нүкте

56.1 $f(z)$ және $\varphi(z)$ функцияларының $z = a$ нүктесінде n және m ретті полюстері қандай?

- а) егер $m > n$ болса, онда $m - n$ ретті ноль
- б) егер $m > n$ болса, онда $m - n$ ретті полюс
- в) $m + n$ ретті полюс
- г) $m = n$ болғанда – дұрыс нүкте
- д) $m = n$ жөнделенетін ерекше нүкте

57.1 $|z| > 1$ болғанда, $\ln \frac{1}{1-z}$ Лоран қатарына жіктеңіз.

а) олай болуы мүмкін емес, $|z| > 1$ болғанда функция бір мәнді болмайды

б) $1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$

в) Лоран қатарына жіктелмейді

г) $\frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{19}{z^4} + \frac{65}{z^5} + \dots$

д) 0

58.1 Лоран жіктеуінде $(z-a)$ -ның теріс дәрежелерінің тек шектеусіз

жиыны бар. Бұл жағдайда a нүктесін $f(z)$ функциясының қандай нүктесі дейміз?

- а) елеулі ерекше нүкте
- б) полюс
- в) жөнделенетін ерекше нүкте
- г) дұрыс нүкте
- д) жай полюс

59.1. $|z| > 1$ болғанда $e^{\frac{1}{1-z}}$ функциясын Лоран қатарына жіктеңіз.

- а) $1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} - \frac{19}{120z^5} + \dots$
- б) $\frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{19}{z^4} + \frac{65}{z^5} + \dots$
- в) $1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$
- г) $\frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \dots$
- д) $1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} - \frac{19}{120z^5} + \dots + \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{19}{z^4} + \frac{65}{z^5} + \dots$

60.1. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ жіктеуде $z-a$ -ның теріс дәрежелері мүлдем жоқ.

Бұл жағдайда a нүктесін $f(z)$ функциясының қандай нүктесі дейміз?

- а) елеулі ерекше нүкте
- б) полюсті
- в) жөнделенетін ерекше нүктесі
- г) дұрыс нүкте
- д) бас нүкте

61.1 $z = \infty$ болғанда $\frac{z^2+1}{e^z}$, функциялары үшін $\cos z - \sin z$ ерекшеліктерін анықтаңыз.

- а) дұрыс нүкте
- б) бір ретті полюс
- в) реті ноль
- г) елеулі ерекше нүкте
- д) жөнделенетін ерекше нүкте

62.1 $f(z)$ және $\varphi(z)$ функцияларының $z = a$ нүктесінде n және m ретті полюстері қандай?

- а) егер $m > n$ болса, онда $m-n$ ретті ноль
- б) егер $m > n$ болса, онда $m-n$ ретті полюс
- в) $m+n$ ретті полюс
- г) $m = n$ болғанда – дұрыс нүкте

д) $m = n$ жөнделенетін ерекше нүкте

63.1 $|z| > 1$ болғанда $\ln \frac{1}{1-z}$ Лоран қатарына жіктеңіз.

а) олай болуы мүмкін емес, $|z| > 1$ болғанда функция бір мәнді болмайды

б) $1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$

в) Лоран қатарына жіктелмейді

г) $\frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{19}{z^4} + \frac{65}{z^5} + \dots$

д) 0

64.1 Лоран жіктеуінде $(z-a)$ -ның теріс жержелерінің тек шектеусіз жиыны бар. Бұл жағдайда a нүктесін $f(z)$ функциясының қандай нүктесі дейміз?

а) елеулі ерекше нүкте

б) полюс

в) жөнделенетін ерекше нүкте

г) дұрыс нүкте

д) жай полюс

65.1. Бірқалыпты жинақты қатарлар мен тізбектердің қасиеті болмайтын сөйлемді анықта:

а) Егер функционалдық қатар X -те бірқалыпты жинақталса, ал оның мүшелері осы жиында үзіліссіз функциялар болса, онда бұл қатардың қосындысы X -те үзіліссіз болады;

б) Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|f_n(x) - f(x)\| = 0$, онда $f_n(x)$ X -те $f(x)$ -на бірқалыпты жинақталады.

в) Алдыңғы қатарды мүшелеп дифференциалдау нәтиесінен алынған дәрежелік қатардың жинақталу интервалы алдыңғы қатармен бірдей болады;

г) Жиындағы екі дербес функционалдық тізбек осы жиында бірқалыпты жинақталады;

д) Жиында бірқалыпты жинақталатын екі тізбек осы жиында бірқалыпты жинақталады.

66.1. $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$ қатардың қосындысын табу керек:

а) $\frac{1+x^2}{x^2}; x \neq 0$;

б) $1+x^2; x \neq 0$;

в) $1+x^2; x > 0$

г) $+\infty$;

д) $\frac{1}{1+x^2}; x > 0$.

67.1. $\frac{1}{2} - \frac{(x-1)}{4} + \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(x-1)^3}{16} + \dots$ қатардың қосындысын табу керек:

а) $\frac{2}{1+x}; -2 < x < 2;$

б) $\frac{1}{3-x}; -1 < x < 3;$

в) $\frac{1}{1+x}; -1 < x < 3;$

г) $+\infty;$

д) $\frac{2}{3-x}; -2 < x < 1.$

68.1 $\frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \dots$ қатардың қосындысын табу керек:

а) $\frac{1}{2+x}; |x| < 2;$

б) $\frac{2}{x}; 0 < x < 4;$

в) $+\infty;$

г) $\frac{1}{x-2}; |x| < 2;$

д) $\frac{1}{x}; 0 < x < 4.$

69.1. $\frac{1}{4} - \frac{(x-4)}{8} + \frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(x-4)^3}{32} + \dots$ қатардың қосындысын табу керек:

а) $\frac{1}{2(x-2)}; 2 < x < 6;$

б) $\frac{1}{4(x-2)}; 2 < x < 6;$

в) $\frac{1}{2(6-x)}; 1 < x < 4;$

г) $+\infty;$

д) $\frac{1}{x}; |x| < 2.$

70.1. $1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots$ қатардың қосындысын табу керек:

а) $\frac{1}{1+3x}; |x| < \frac{1}{3};$

б) $\frac{1}{x}; |x| < 3;$

в) $+\infty;$

г) $\frac{1}{1-3x}; |x| < \frac{1}{3};$

д) $1 - 3x; |x| < 3$.

71.1. $1 - \frac{(x-2)}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(x-2)^3}{8} + \dots$ қатардың қосындысын табу керек:

а) $\frac{2}{4-x}; 0 < x < 4$;

б) $\frac{2}{x}; 0 < x < 4$;

в) $\frac{1}{x}; |x| < 2$;

г) $\frac{1}{x-2}; |x| < 2$;

д) $+\infty$.

72.1. $\sum_{m=1}^{\infty} 3^{n-1} x^{n-1}$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

а) 3;

б) $\frac{1}{2}$;

в) ∞ ;

г) $\frac{1}{3}$;

д) 0.

73.1. $\sum_{m=1}^{\infty} 2^n x^n$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

74.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

75.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

76.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

77.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

78.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

79.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (4x)^n$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

80.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2n-1}$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

81.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1} x^n$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

82.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

а) $+\infty$;

б) 1;

в) $\frac{1}{2}$;

г) 0;

д) $\frac{1}{3}$.

83.1 $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

84.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

а) $\frac{1}{3}$;

б) $\sqrt{2}$;

в) $\frac{1}{2}$;

г) $+\infty$;

д) 0.

85.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{5^n}$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

86.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} x^n$ қатардың жинақталу радиусын табу керек:

а) ∞ ;

б) e ;

в) $\frac{1}{3}$;

г) 0;

д) $\frac{1}{e}$.

87.1 $n(x-5)$ функциясын $x-6$ дәрежелері бойынша қатарға жіктеу керек:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-6)^n}{n}, 1 < x \leq -1;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-6)^n}{n}, 5 < x \leq 7;$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-6)^n}{n}, 1 \leq x < -3;$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-6)^n}{n}, 1 \leq x < -3;$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-6)^n}{n}, -5 < x \leq 6.$

88.1 $\frac{1}{x^2 + 2x + 4}$ функциясын $x+1$ дәрежелері бойынша қатарға жіктеу керек:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{4^{n+1}};$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{3^n};$

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{3^n};$

г) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{3^{n+1}};$

д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{3^n}.$

89.1 2^x функциясын $x+1$ дәрежелері бойынша қатарға жіктеу керек:

а) $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} (x+1)^n, |x| < \infty;$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} (x+1)^n, |x| < \infty;$

в) $3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} (x+1)^n, |x| < \infty;$

$$\text{г)} 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} (x+1)^n, |x| < \infty;$$

$$\text{д)} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} (x+1)^n, |x| < \infty$$

90.1 $\frac{1}{x}$ функциясын $x+6$ дәрежелері бойынша қатарға жіктеу керек:

$$\text{а)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{6^{n+1}}, 0 < x < 10;$$

$$\text{б)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{6^{n+1}}, 0 < x < 8;$$

$$\text{в)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{6^{n+1}}, 0 < x < 12;$$

$$\text{г)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{6^{n+1}}, 0 < x < 15;$$

$$\text{д)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{6^{n+1}}, 0 < x < 10.$$

Б. Сандық қатарлар. Өзіндік жұмыс

1. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

$$1. \sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 14n + 48}.$$

$$2. \sum_{n=9}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 13n + 40}.$$

$$3. \sum_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 12n + 35}.$$

$$4. \sum_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 11n + 28}.$$

$$5. \sum_{n=7}^{\infty} \frac{6}{n^2 - 10n + 24}.$$

$$6. \sum_{n=7}^{\infty} \frac{54}{n^2 - 9n + 18}.$$

$$7. \sum_{n=6}^{\infty} \frac{8}{n^2 - 8n + 15}.$$

$$8. \sum_{n=6}^{\infty} \frac{72}{n^2 - 7n + 10}.$$

$$9. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{10}{n^2 - 6n + 8}.$$

$$10. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{90}{n^2 - 5n + 4}.$$

$$11. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{12}{n^2 - 4n + 3}.$$

$$12. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{18}{n^2 - n - 2}.$$

$$13. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{n^2 + 4n + 3}.$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{36}{n^2 + 7n + 10}.$$

$$15. \sum_{n=10}^{\infty} \frac{30}{n^2 - 14n + 48}.$$

$$16. \sum_{n=9}^{\infty} \frac{54}{n^2 - 11n + 28}.$$

$$17. \sum_{n=9}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 12n + 35}.$$

$$18. \sum_{n=8}^{\infty} \frac{72}{n^2 - 9n + 18}.$$

$$19. \sum_{n=8}^{\infty} \frac{12}{n^2 - 10n + 24}.$$

20. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 7n + 10}.$
21. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{60}{n^2 - 8n + 15}.$
22. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 5n + 4}.$
23. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{48}{n^2 - 6n + 8}.$
24. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{54}{n^2 + n - 2}.$
25. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{6}{n^2 - 4n + 3}.$
26. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{18}{n^2 - n - 2}.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n^2 + 4n + 3}.$
28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{36}{n^2 + n - 2}.$
29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2 + 6n + 8}.$
30. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{54}{n^2 + 5n + 4}.$

2. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^2 n}{n^3}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctgn^2}{n(n+1)(n+2)}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \sin n}{n - \ln n}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n}{n^3 + 2}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2 + \cos n\pi)}{2n^2 - 1}.$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 + \sin n}{\sqrt[3]{n^3 - n}}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}.$
10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2 - n}}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2 + 2}.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^3 + 5}.$
13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2 - 3}.$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 (2 + \cos n \pi)}.$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{\sqrt[4]{n^3}}.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1}.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 n}{n^4 + 3}.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \cos n \pi) \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7 + 5}}.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \sin n}{(n+1)(n+2)}.$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}.$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5 + n}}.$
23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}.$
24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 - \cos n}{\sqrt{n^2 - n}}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n(n+1)}.$
26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 + \cos n}{\sqrt[4]{n^4 - 1}}.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{n(n+2)}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \sqrt{n}}{n \sqrt{n}}.$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n(2+n^2)}}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n^3 + n}.$$

3. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(1 - \cos \frac{1}{n+1} \right).$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}} \sin \frac{1}{n+1}.$$

$$5. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}.$$

$$6. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 3}{n^2 - n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}-1}{n^3}} - 1 \right).$$

$$8. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \arcsin \frac{n+1}{n^3 - 2}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{\pi^2}} - 1 \right).$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}.$$

$$12. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{n-1}{n^3 - n}.$$

$$13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^2 + 5}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} - 1 \right).$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 - n + 2}.$$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{n^3 + 1}.$
19. $\sum_{n=3}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}.$
20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n \cdot \sqrt[4]{n^3}-1)}.$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right).$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}.$
23. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}} - 1\right).$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2\pi}{2n+1}.$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2.$
29. $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}.$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2 \sqrt[3]{n+5}}.$

4. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n)!}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{arctg} \frac{5}{n}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{n!}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n^2}{(n+2)!}.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}.$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{(3n)!}.$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n(n+1)!}.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}.$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}.$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n(n+2)!}.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}.$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n + 3}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}.$$

$$28. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n + 2}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}.$$

5. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n \cdot n^3.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1} \right)^{n^2}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \frac{n}{5^n}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n.$$

$$14. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3} \right)^{n^2}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n+1}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}.$$

$$19. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \arctg^n \frac{\pi}{3n}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5}{(2n+1)^n}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^{n^2}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 3^{n+2}}{5^n}.$$

$$30. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1} \right)^{3n}.$$

6. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(2n+1)}.$

4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5) \ln^2(4n-7)}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2(5n+2)}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2(n\sqrt{5}+2)}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1) \ln^2(n\sqrt{3}+1)}.$

8. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-3)}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(2n)}.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(2n)}.$

11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n}.$

12. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(n+1)}.$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3) \ln(3n+1)}.$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^2 n}.$

15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^2(2n)}.$

16. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(n+1)}.$

17. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)}.$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}.$

19. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}.$

20. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}.$
21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}.$
22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(n+7)}.$
23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}.$
24. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}.$
25. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)\ln^2(n/2)}.$
26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2+5)\ln n}.$
27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}.$
28. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}.$
29. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2+2)\ln(n/2)}.$
30. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}.$

7. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$
4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n (\ln \ln n)}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^4 - n^2 + 1}.$
6. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}.$
7. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4 \sqrt{2n+3}}.$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{n} \right)^n.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}.$$

$$12. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n tg \frac{1}{n}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n+1)}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3ncso(\pi/3n)}}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3/2)^n(n+1)}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{2^n}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n-1}} tg \frac{\pi}{4\sqrt{n}}.$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos(2/\sqrt{n+4})}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^n \frac{\pi}{2n}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

8. α -ге дейінгі дәлдікпен қатардың қосындысын табу керек:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}, \alpha = 0,01.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \alpha = 0,01.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}, \alpha = 0,001.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}, \alpha = 0,001.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \alpha = 0,01.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \alpha = 0,0001.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}, \alpha = 0,1.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}, \alpha = 0,1.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \alpha = 0,001.$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \alpha = 0,0001.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \alpha = 0,001.$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5} \right)^n, \alpha = 0,01.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{7^n}, \alpha = 0,0001.$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3} \right)^n, \alpha = 0,1.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \alpha = 0,001.$$

$$16. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}, \alpha = 0,01.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!2n}, \alpha = 0,00001.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!n!}, \alpha = 0,001.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}, \alpha = 0,001.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}, \alpha = 0,0001.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!n!}, \alpha = 0,00001.$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (n+1)}, \alpha = 0,001.$$

$$23. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)}, \alpha = 0,001.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}, \alpha = 0,01.$$

$$25. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)^n}, \alpha = 0,001.$$

$$26. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}, \alpha = 0,001.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}, \alpha = 0,01.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2 (n+3)}, \alpha = 0,01.$$

$$29. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^3 + 1)^2}, \alpha = 0,001.$$

$$30. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + n^3}, \alpha = 0,01.$$

В. «Функционалдық және дәрежелік қатарлар». Өзіндік жұмыс

1.Қатардың жинақталу облысын табу керек:.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n + 1}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + 1)^{x+2}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n e^{n(x^2-4) + x\sqrt{n}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{x^2 + n^2}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 \sin \frac{x^2+1}{n}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^{3x-x^2}}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin 3^{-nx}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctg 2^{nx}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{x^2+1} + 4}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n 4^{\frac{n^2}{x}}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx} + 1}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{n(x^2-4x+3) + x\sqrt{n}}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{-nx}}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \sin \frac{x^2+1}{n}}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^n}{1-x^n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x^2)}}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(\sqrt{n^3} + n\right)^{x+1}}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin 3^{nx}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n + e^x)}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg} 2^{-nx}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{2+3x-x^2}}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n e^{-\frac{n}{1+x^2} + x\sqrt{n}}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n + |x|^{-n}}{2}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)^n 4^{\frac{n^2}{x}}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^{x^2+2} + 3}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n + e^x)(n^2 + 1)}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x\sqrt{n}-1)^2}.$$

2. Қатардың жинақталу облысын табу керек:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3}{2n+3} (x+3)^{2n}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n} (x-3)^n.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}} (x+7)^n.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} (x-2)^{2n}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)\ln(n+3)} (x+6)^n.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{(2n-1)4^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3} (x-2)^{3n}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^n}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x-2)^n.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)3^n} (x+6)^n.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+1)^3} (x-4)^{2n}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+3)2^n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!} (x+5)^{2n+1}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 2^n} (x-3)^n.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)3^n} (x+4)^n.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!} (x+1)^{2n-1}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n} (x+3)^n.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(3n+1)^3} (x-1)^{3n}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+3)!} (x+4)^{2n+1}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n-1)2^n} (x+2)^n.$$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)^3} (x-4)^{3n}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)} (x+1)^n.$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4+1)^2} (x-3)^n.$

3. Қатардың жинақталу облысын табу керек:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2-6x+13)^n}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2} \sin^{3n} x.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 3^{\frac{n}{x-1}}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} (x^2-4x+6)^n.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} 2^{\frac{n}{4-x}}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x^2-5x+10)^n}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \sin^{2n}(2x).$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x+e)}{n+e}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \operatorname{tg}^{2n} x.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n}{\cos x}}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2(x^2+2)^n}.$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^4(3x).$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 4^{\frac{n}{x-2}}.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 5x + 11)^n}{5^n (n^2 + 5)}.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} \sin^{2n} x.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{2^n n^2}.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(x^2 - 2x + 3)^n}.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg}^n(2x).$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n \sin x}.$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 + 1)^n}{2^n (n + 1)}.$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tg}^n x.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} n 5^{\frac{n}{3-x}}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 (x^2 - 4x + 5)^n}.$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^{n/2}} \operatorname{tg}^n x.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n (x - e)}{n - e}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 2x + 2)^n}{2^n (n^2 + 2)}.$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n(2x).$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n \sin x}.$

4. Қатардың қосындысын табу керек:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)x^n}.$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n+1}.$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{nx^{4n-4}}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^5)^{n-1}}{n}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{3n}}.$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^4)^n}{n+1}.$
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n-1)}.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^{n-1}}{n}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}.$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)x^{5n}}.$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n+1}.$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)}.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{nx^{3n-3}}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^4)^{n-1}}{n}.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n(n+1)}.$
20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)x^{2n}}.$
21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^3)^n}{n+1}.$
22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)}.$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^{5n-5}}.$$

$$24. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n+1}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n(n+1)}.$$

$$26. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)x^{4n}}.$$

$$27. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^5)^n}{n+1}.$$

$$28. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+6}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{nx^{2n-2}}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^3)^{n-1}}{n}.$$

5. Қатардың қосындысын табу керек:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (n+5)x^{n-1}.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} (n+5)x^{2n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (n+4)x^{n-1}.$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)x^{3n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)x^{n-1}.$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{4n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n-1}.$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{5n}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^{n-1}.$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{6n}.$$

$$11. \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-2}.$$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{6n}.$
13. $\sum_{n=2}^{\infty} (n+4)x^{n-2}.$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{5n}.$
15. $\sum_{n=2}^{\infty} (n+3)x^{n-2}.$
16. $\sum_{n=2}^{\infty} nx^{4n}.$
17. $\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)x^{n-2}.$
18. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{3n+3}.$
19. $\sum_{n=2}^{\infty} (n+1)x^{n-2}.$
20. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n+2}.$
21. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n}.$
22. $\sum_{n=3}^{\infty} (n+1)x^{n-3}.$
23. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{3n}.$
24. $\sum_{n=3}^{\infty} (n+2)x^{n-3}.$
25. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{4n}.$
26. $\sum_{n=3}^{\infty} (n+3)x^{n-3}.$
27. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)x^{5n}.$
28. $\sum_{n=3}^{\infty} (n+4)x^{n-3}.$
29. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+5)x^{6n}.$
30. $\sum_{n=3}^{\infty} (n+5)x^{n-3}.$

6. x дәрежесі бойынша функцияны Тейлор қатарына жіктеу керек:

1. $\frac{9}{20 - x - x^2}$.

2. $\frac{x^2}{\sqrt{4 - 5x}}$.

3. $\ln(1 - x - 6x^2)$

4. $2x \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - x$

5. $\frac{\operatorname{sh} 2x}{x} - 2$.

6. $\frac{7}{12 + x - x^2}$.

7. $\frac{x}{\sqrt[3]{27 - 2x}}$.

8. $\ln(1 + x - 6x^2)$

9. $(x - 1)\sin 5x$

10. $\frac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x^2}$.

11. $\frac{6}{8 + 2x - x^2}$.

12. $\frac{1}{\sqrt[4]{16 - 3x}}$.

13. $\ln(1 - x - 12x^2)$

14. $(3 + e^{-x})^2$

15. $\frac{\arcsin x}{x} - 1$.

16. $\frac{7}{12 - x - x^2}$.

17. $x^2 \sqrt{4 - 3x}$

18. $\ln(1 + 2x - 8x^2)$

19. $2x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - x$

20. $(x - 1)\operatorname{sh} x$

21. $\frac{5}{6 + x - x^2}$.

22. $x^3 \sqrt{27 - 2x}$

23. $\ln(1 + x - 12x^2)$

24. $\frac{\sin 3x}{x} - \cos 3x$.

25. $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

26. $\frac{5}{6-x-x^2}$.
27. $\sqrt[4]{16-5x}$
28. $\ln(1-x-20x^2)$
29. $(2-e^x)^2$
30. $(x-1)chx$

7. 0,001 ге дейінгі дәлдікпен интегралды есептеу керек:

1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx.$
2. $\int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx.$
3. $\int_0^1 \cos x^2 dx.$
4. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$
5. $\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx.$
6. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx.$
7. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$
8. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx.$
9. $\int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx.$
10. $\int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx.$
11. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$
12. $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$
13. $\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x} dx.$
14. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}.$

15. $\int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx.$
16. $\int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$
17. $\int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx.$
18. $\int_0^{1,5} \frac{d}{\sqrt[4]{81+x^4}} x.$
19. $\int_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x} dx.$
20. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx.$
21. $\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}.$
22. $\int_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx.$
23. $\int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx.$
24. $\int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$
25. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}.$
26. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$
27. $\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}.$
28. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$
29. $\int_0^{0,5} e^{-3x^2/25} dx.$
30. $\int_0^1 \sin x^2 dx.$

Г) Өзіндік шығаруға арналған жаттығулар

1. $\sqrt[m]{z}$ -тің басты мәнін $z=1$ маңайында дәрежелі қатарға жіктеу керек; $m=2$ болғанда жеке түрде жіктеу.

Жауап. $1 + \frac{1}{m}(z-1) + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\frac{(z-1)^2}{2!} + \dots; 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}(z-1)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}(z-1)^3 - \dots$

2. $f(z)$ голоморфтық функциясы модулінің z_0 нүктесінде 0-ге тең емес минимумы болмайтынын дәлелдеу керек.

3. $e^u(x, y) + iv(x, y)$ аналитикалық функциясын қарастырып, мұндағы $u(x, y)$ және $v(x, y)$ -гармониялық түйіндес функциялар, гармониялық $u(x, y)$ функциясының облыстың ішкі нүктелерінде максимумды да, минимумды да қабылдамайтынын көрсеті керек.

4. $\arctg z$ және $\arcsin z$ функцияларының басты мәндерін нөлдік нүктенің маңайында дәрежелі қатарға жіктелу керек.

Жауап. $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots; z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^5}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} + \dots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ қатарының жинақтылық облысын анықтау керек.

Жауап. $|z| < 1$ болса, абсолют жинақты болады; $|z| \geq 1$ болса, жинақты болмайды.

6. 5-есептегі қатардың өзінің жинақтылық облысының қай бөлігінде бір қалыпты жинақты болатынын анықтау керек.

Жауап. $|z| \leq 1 - \delta (\delta > 0)$ болғанды.

7. Егер $\sum |f_n(z)|$ қатары G облысында бір қалыпты жинақты болса, $f_n(z)$ -аналитикалық функциялар болса, онда $\sum |f'_n(z)|$ -тің G -де жататын әрбір тұйық облыста бір қалыпты жинақталатынын дәлелдеу керек.

8. Төмендегі функциялар үшін дәрежелі қатардың бірінші төрт коэффициентін есептеп шығару керек.

а) $e^{\frac{1}{1-z}}$;

б) $\sin \frac{1}{1-z}$;

в) $\ln(1+e^z)$

Жауап. а) $e^{\frac{1}{1-z}} = \left[1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + \frac{73}{24}z^4 + \dots \right]$;

б) $\sin \frac{1}{1-z} = \sigma + \tau z + \left(\tau - \frac{1}{2}\sigma \right) z^2 + \left(\frac{5}{6}\tau - \sigma \right) z^3 + \dots$; мұндағы $\sigma = \sin 1$; $\tau = \cos 1$;

в) $\ln(1+e^z) = \ln 2 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^4}{192} + \dots$

9. Төмендегі функциялар үшін толық дәрежелі қатар құру керек.

а) $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1-z} \right)^2$

Жауап. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) z^n$

б) $\sin^2 z$ және $\cos^2 z$

$\sin^2 z = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$ және $\cos^2 z = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$

10. Егер $f(z)$ бір байланысты G облыста аналитикалық болса, онда G -де жататын кез келген тұйық C контуры $f(z)=a$ теңдеуінің шектеулі санды түбірін өзінің ішінде ұстайды.

11. Нөлдік нүктеде аналитикалық, $z = \frac{1}{n} (n=1,2,3,\dots)$ нүктелерінде төмендегідей мән алатын функция бола ма?

а) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$;

б) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots$;

в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots$

г) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

12. z_0 нүктесінде аналитикалық $f(z)$ функциясының α ретті нөлі бар.

$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ функциясының z_0 нүктесінде өзгеріс – сипаты қалай болады?

Егер z_0 нүктесі $f(z)$ аналитикалық болатын z_0 маңайында жатса және интегралдау жолы осы маңайда орналасса, $\Phi(z) = \int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta$ функциясының z_0 нүктесінде өзгеріс – сипаты қандай болады?

Жауабы. $F(z)$ -тің $(\alpha + 1)$ ретті нөлі бар; $\Phi(z) - \int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta = F(2)$

13. $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$;

$z < 1$ сақинада Лоран қатарына жіктеңіз;

Жауабы: $f(z) = \frac{1}{z}$

14. $|z| > 3$ болғанда $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$ функциясын Лоран қатарына жіктіңіз.

Жауабы: $\frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{19}{z^4} + \frac{65}{z^5} + \dots$

15. $f(z) = \frac{e^z}{z}$ Лоран қатарына жіктеңіз.

Жауабы: $\frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!}$

16. $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$;

Қолданылған әдебиеттер тізімі

- 1 Ляшко И.И.
- 2 Справочное пособие по высшей математике. Т.2: Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Ч.1: Ряды: Учебное пособие .- М.: КД Либроком, 2015. - 224 с.
- 3 Ильин В.А. Математический анализ. Ч. 2: Учебник для бакалавров - Люберцы: Юрайт, 2016. - 357 с..
- 3 Зорич, В.А Математический анализ. Часть 1. - М.: МЦНМО, 2018. - 564 с.
- 4 Виноградова И.А. Математический анализ в задач и упражнениях. В 3-х томах. Т.2: Ряды и несобственные интегралы. - М.: МЦНМО, 2018. - 480 с
- 4 Қадықайырұлы Қ. Дифференциалдық және интегралдық есептеулер, -А.«Мектеп», 1977.-258 б.
- 5 Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие. - СПб.: Лань, 2008. - 480 с
- 6 Виленкин Н.Я.. Задачник по курсу математического анализа. ч. II., -М.,«Просвещение» - 1971.- 305 с.
- 7 Темірғалиев Н. Математикалық анализ. А.,«Мектеп»,1 бөлім,-1987.-288 б.
- 8 Ильин В.И.,Позняк Э.И. Основы математического анализа. ч.1 и 2. - М.: МЦНМО , 2016.- 433с.
- 9 Шипачев В.С. Математический анализ. Теория и практика: Учебное пособие. - М.: Инфра-М, 2018. - 416 с.
- 10 Никольский С. М. Курс математического анализа. Том 1. -М. «Высшая школа», 1978.-423 с.
- 11 Привалов И.И. Комплекс айнымалы функциялар теориясына кіріспе. -Алматы. Мектеп, 1978.- 498 б.