

Министерство образования и науки Республики Казахстан
Костанайский государственный университет им. А. Байтурсынова
Кафедра математики и физики

Р.С. Ысмагул

Теория рядов

Учебно-методическое пособие

Костанай, 2019

ББК 22.161

Ы 88

Автор:

Ысмагул Роза Сапабековна, кандидат физико-математических наук, доцент

Рецензенты:

Ерсултанова Зауреш Сапаргалиевна – кандидат технических наук, доцент кафедры информатики КГПУ имени У.Султангазина

Утемисова Анар Алтаевна – кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой математики и физики КГУ имени А.Байтурсынова

Берденова Гульнар Жалгасовна – старший преподаватель кафедры математики и физики КГУ имени А.Байтурсынова, магистр естественных наук

Ысмагул Р.С.

Ы88 Теория рядов. Учебно-методическое пособие. – Костанай, КГУ имени А. Байтурсынова, 2019. – 84 с.

ISBN

В учебно-методическом пособии включены основные определения и утверждения теории рядов, задачи и упражнения с решениями, задачи и упражнения для самостоятельного решения, ответы.

Предназначено для студентов специальности 5В060100 – Математика, 5В060200-Информатика и студентов, изучающих курс математического анализа

ББК 22.161

Ы 88

Утверждено и рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом Костанайского государственного университета имени А. Байтурсынова,

_____ . _____ . 2019 г., протокол № _____

ISBN

©Костанайский государственный
университет им. А. Байтурсынова
© Ысмагул Р.С., 2019

Содержание

Введение	4
Тема 1 Числовые ряды.....	5
1.1 Основные понятия числового ряда.....	5
1.2 Ряды с положительными членами.....	10
1.3 Абсолютная и условная сходимость рядов.....	18
Тема 2 Функциональные ряды	22
2.1 Область сходимости функционального ряда.....	22
2.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.....	27
2.3 Степенные ряды.....	35
2.4 Разложение функции в ряд Тейлора.....	42
2.5 Приближенное вычисление с помощью степенных рядов.....	42
Тема 3 Индивидуальные задания.....	53
3.1 Типовой вариант решения индивидуального задания «Числовые ряды».....	53
3.2 Типовой вариант решения индивидуального задания «Функциональные и степенные ряды».....	58
3.3 Индивидуальные задания «Числовые ряды.....	61
3.4 Индивидуальные задания «Функциональные и степенные ряды».....	74
Ответы задач для самостоятельного решения.....	81
Список использованных источников	84

Введение

Учебно-методическое пособие посвящено методам решения и качественного исследования задач теории рядов.

Цель учебно-методического пособия теории рядов – помочь студентам в формировании их математического мышления, выработке практических навыков решения задач из теории числовых рядов, функциональных и степенных рядов, рядов Фурье.

В учебно-методическом пособии теории рядов должное внимание уделено изложению методов решения типовых задач теории рядов; подбору и решению задач, разъясняющих основные идеи, понятия, теоретические факты и их практическое применение; подбору большого числа задач для самостоятельного решения студентами.

Учебно-методическое пособие «Теория рядов» охватывает основные разделы Математического анализа и рекомендовано для студентов, изучающих курс высшей математики.

1. Числовые ряды

1.1 Основные понятия числового ряда

Определение. Рядом называется сумма бесконечного множества слагаемых.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

являющихся членами бесконечной последовательности $\{u_n\}$.

Символы $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ называются членами ряда. Они могут быть числами, функциями, матрицами и т. п., а соответствующие ряды называются числовыми, функциональными, матричными и т. п.

Сокращенно ряд обозначается так: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Индекс, стоящий у каждого члена ряда, указывает его порядковый номер в ряде.

Член u_n , номер которого не фиксирован, называется *общим членом ряда*.

Сумма n первых членов ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad (2)$$

называется *частичной суммой*.

Поскольку ряд содержит бесконечное множество слагаемых, то последовательным их сложением сумму ряда определить невозможно. Поэтому требуется специально определить, что следует считать суммой ряда.

Если в частичной сумме S_n увеличивать число слагаемых, то может встретиться один из следующих трех случаев:

1. При неограниченном возрастании числа слагаемых частичная сумма S_n стремится к определенному пределу, который мы обозначим буквой S , $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

В этом случае ряд называется *сходящимся*, а число S суммой ряда

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

2. При неограниченном возрастании числа слагаемых в частичной сумме

$$S_n \rightarrow +\infty \text{ или } S_n \rightarrow -\infty$$

В этом случае ряд называется *расходящимся*. Расходящийся ряд суммы не имеет.

3. При неограниченном возрастании числа слагаемых частичная сумма S_n не стремится ни к какому пределу. В этом случае ряд также называется *расходящимся* и суммы он не имеет [1].

Таким образом, только сходящиеся ряды имеют сумму:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (3)$$

Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Подчеркнем, что этот признак не является достаточным, т. е. из стремления к нулю общего члена нельзя еще сделать заключение, что ряд сходится. Но если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Основные свойства рядов

1. Если все члены ряда (1) умножить на одно и то же число k , то ряд

$$ku_1 + ku_2 + ku_3 + \dots + ku_n + \dots$$

будет сходиться, если ряд (1) сходится, и будет расходиться, если ряд (1) расходится.

2. Если сходятся ряды

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

и

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots$$

то будет сходиться и ряд, полученный от почленного сложения или вычитания соответствующих членов этих рядов, т. е. будет сходиться и ряд

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + (u_3 \pm v_3) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots$$

3. Если в ряде (1) приписать к началу или отбросить с его начала конечное число членов, то полученный от этого ряд будет сходиться, если ряд (1) сходится, и расходиться, если ряд (1) расходится.

Геометрический ряд

Ряд

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (4)$$

в котором каждый член образуется из предыдущего умножением на одно и то же число, называется геометрическим. Геометрический ряд сходится, если $|q| < 1$ и его сумма $S = \frac{a}{1-q}$. Если $|q| \geq 1$, то геометрический ряд

расходится

Гармонический ряд

Ряд

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots \quad (5)$$

называется гармоническим. Каждый его член, начиная со второго, есть среднее гармоническое двух соседних членов (число c

называется средним гармоническим чисел a и b , если $\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = \frac{1}{c}$).

Гармонический ряд расходится.

Обобщенный гармонический ряд

Обобщенный гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots \quad (6)$$

сходится, если $k > 1$, и расходится, если $k \leq 1$.

Пример 1. Написать одну из возможных формул для общего члена ряда, зная его первые 4 члена.

$$\frac{2}{2} + \frac{5}{6} + \frac{8}{18} + \frac{11}{54} + \dots$$

Решение. Рассмотрим сначала последовательность числителей 2, 5, 8, 11. Мы видим, что они образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 2, а разность равна 3. Поэтому в качестве общего выражения для числителя можно взять выражение общего члена арифметической прогрессии $2 + 3(n-1) = 3n - 1$. Знаменатели 2, 6, 18, 54 образуют геометрическую прогрессию с первым членом 2 и знаменателем 3. Поэтому в качестве их общего выражения можно взять $2 \cdot 3^{n-1}$. Тогда общий член ряда имеет вид: $\frac{3n-1}{2 \cdot 3^{n-1}}$

Замечание. По нескольким первым членам ряда нельзя однозначно восстановить формулу общего члена. Например, для ряда:

$$\frac{2}{2} + \frac{5}{6} + \frac{8}{18} + \frac{11}{54} + \dots$$

Можно положить и

$$a_n = \frac{3n-1}{2 \cdot 3^{n-1}} \text{ и } a_n = \frac{3n-1}{2 \cdot 3^{n-1} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

Поэтому в нижеследующих задачах мы ищем лишь одну из возможных формул, соответствующую данным числам ряда, стараясь выбрать её наиболее простой.

Пример 2.

Написать одну из возможных формул для общего члена ряда, зная его первые 4 члена:

$$\frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 8} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11} + \dots$$

Решение. Этот ряд является знакочередующимся, и поэтому каждый его член содержит множитель $(-1)^{n-1}$. Числители являются произведением членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 2. Знаменатели – произведение членов арифметической прогрессии с первым членом 2 и знаменателем 3. Применяя формулу общего члена арифметической прогрессии, получаем что

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot [1 + 2(n-1)]}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot [2 + 3(n-1)]} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$$

Пример 3.

Найти S_n – сумму n первых членов ряда:

$$\frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

Пользуясь непосредственно определением суммы ряда, показать, что этот ряд сходится и найти его сумму S . Вычислить R_{10} .

Решение. (*Первый способ*) Составим последовательность частичных сумм данного ряда:

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{4}{1 \cdot 3} = \frac{4}{3}, \\s_2 &= \frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{3}, \\s_3 &= \frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{7}.\end{aligned}$$

Мы видим, что первые частичные суммы представляют собой дроби, числители которых равны учетверенному индексу (номеру) частичной суммы, а знаменатели – удвоенному индексу, сложенному с 1. Поэтому можем предположить, что

$$s_n = \frac{4n}{2n+1}$$

Методом полной математической индукции легко доказать, что эта формула верна для всех n .

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n+1} = 2$$

Следовательно, сумма данного ряда существует и равна 2, т.е. ряд сходится.

Теперь находим

$$R_n = S - S_n = 2 - \frac{4n}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}, \quad R_{10} = \frac{2}{20+1} = \frac{2}{21}$$

Следовательно, если бы мы в качестве приближенного значения суммы ряда взяли сумму его первых 10 членов, то имели бы погрешность, равную $\frac{2}{21}$.

(*Второй способ*) Представим общий член ряда виде суммы двух дробей, т.е. разложим дробь на простейшие, пользуясь методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}.$$

Определим значения для A и B : $A=2$, $B=-2$. Таким образом,

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}.$$

Представляя теперь каждый член данного ряда в виде суммы двух слагаемых, мы получим следующее выражение для n -ой частичной суммы:

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \dots - \\&- \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} = 2 - \frac{2}{2n+1} = \frac{4n}{2n+1}\end{aligned}$$

Все слагаемые кроме первого и последнего, взаимно уничтожились.

Теперь легко находим сумму задано ряда :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n+1} = 2, R_n = \frac{2}{2n+1}, R_{10} = \frac{2}{21}.$$

При вычислении конечных сумм часто оказывается полезным следующее утверждение: если существует такая функция $F(x)$, что $f(n)=F(n+1)-F(n)$, то $f(1)+...+f(n)=F(n+1)-F(1)$

Пример 4.

Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{7} + \frac{4}{11} + \dots + \frac{n}{3n-2} + \dots$$

Решение. Находим предел общего члена a_n ряда при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$$

Так как в данном случае a_n не стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, то заданный ряд не удовлетворяет необходимому признаку и, следовательно, расходится.

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать одну из возможных формул для n -го члена ряда по указанным его первым членам.

а) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots$

б) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots$

в) $1 - \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$

г) $1 - \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$

2. Написать 5 первых членов ряда по известной формуле для общего члена

а) $a_n = \frac{3n+2}{n^2+4}$

б) $a_n = \frac{(-1)^n(n-1)}{2^{n+3}}$

в) $a_n = \frac{2+(-1)^n}{n^2+4}$

3. Получить выражения для S_n, S, R_n

а) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$

$$\text{б)} \frac{3}{1^3 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$$

$$\text{в)} \frac{2}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{3}{2^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n+1}{n^2(n+2)^2} + \dots$$

$$\text{г)} \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

4. С помощью необходимых признаков сходимости ряда установить, какие из указанных рядов заведомо расходятся:

$$\text{а)} 1-1+1-1+\dots+(-1)^{n-1}+\dots$$

$$\text{б)} \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{2n+1}{2n+2} + \dots$$

$$\text{в)} \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots + \frac{2n}{3^n} + \dots$$

$$\text{г)} \frac{1}{1001} + \frac{2}{2001} + \frac{3}{3001} + \dots + \frac{n}{1000n+1} + \dots$$

1.2 Ряды с положительными членами

Если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны, то ряд называется положительным. В этом случае частичная сумма S_n , возрастает с возрастанием n . Поэтому положительный ряд либо сходится, либо его сумма бесконечна, т. е. или $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$.

Сравнение рядов с положительными членами

Теорема 1.

а) Пусть ряды

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (7)$$

и

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (8)$$

положительны. Если ряд (8) сходится, а члены ряда (7), начиная с некоторого, *меньше* соответствующих членов ряда (8), то ряд (7) также сходится. В этом случае ряд (8) называется мажорантой ряда (7).

Таким образом *положительный ряд сходится, если он обладает сходящейся мажорантой.*

б) Если ряд (8) расходится, а члены ряда (7), начиная с некоторого, *больше* соответствующих членов ряда (8), то и ряд (7) расходится.

Теорема 2. Два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, одновременно сходятся

или одновременно расходятся, если отношение u_n/v_n при $n \rightarrow \infty$ стремится к конечному и отличному от нуля пределу.

Признак Даламбера.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, то при $k < 1$ ряд будет сходиться, а при $k > 1$ расходиться.

Отметим, что если $k = 1$, то сделать заключение о сходимости или расходимости ряда (иначе говоря, о поведении ряда) нельзя. В этом случае требуется дополнительное исследование.

Признак Коши.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, то, при $k < 1$ ряд сходится, а при $k > 1$ расходится.

Интегральный признак сходимости Коши.

Этот признак основан на сравнении ряда с несобственным интегралом.

Если функция $f(x)$ непрерывна, монотонно убывает и положительна для значений $x \geq a$, то ряд

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots$$

сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$, т.е. если он имеет конечное значение, и ряд расходится, если этот интеграл равен $+\infty$.

Признак Раабе.

Если существует предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) = \rho, \quad (9)$$

то: 1) при $\rho > 1$ ряд (5) сходится,

2) при $\rho < 1$ ряд (5) расходится.

Исследование сходимости рядов на основании теоремы сравнения.

Общее указание. При исследовании сходимости ряда на основании теоремы сравнения следует найти выражение общего члена исследуемого ряда и сравнить его с общим членом ряда сравнения. Чаще всего в качестве рядов сравнения употребляются геометрический ряд (4), гармонический ряд (5) и обобщенный гармонический ряд (6).

Для решения вопроса о сходимости ряда часто оказывается полезной теорема 2.

Пример 5.

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ на сходимость.

Решение. Общий член ряда $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$.

Поэтому давая n целые положительные значения, начиная с $n = 1$ получим ряд

$$\begin{aligned} & (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ S_n &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \dots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) - \ln 1 = \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

Следовательно $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$, и поэтому на основании определения ряд расходится.

Пример 6.

Использовать ряд, исследованный в предыдущей задаче, для доказательства расходимости гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Решение. Составим отношение общего члена ряда задачи (3)

$u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ к общему члену гармонического ряда $v_n = \frac{1}{n}$ и найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$.

Используем теорему 2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля, а ряд расходится, то и исследуемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, тоже расходится.

Задачу можно решить и на основании теоремы сравнения рядов.

Пример 7.

Исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2} = \frac{4}{1^2} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{5^2} + \dots + \frac{4}{(2n-1)^2} + \dots \quad (10)$$

Решение. Ряд (10) можно записать так:

$$4 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2} \quad (11)$$

Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2}$ (12)

который получается из ряда (11), если в нем отбросить первый член, с обобщенным гармоническим рядом (6) при $k=2$.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \quad (13)$$

Так как члены ряда (12) меньше соответствующих членов ряда (13)

$$\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} < \frac{1}{n^2} \quad (n=1,2,3\dots)$$

а ряд (13) сходится, то на основании п. а) теоремы 1 сходится ряд (12). (Ряд (13) является сходящейся мажорантой ряда (12)). Вместе с рядом (12) сходится и ряд (11), отличающийся от него только приписанным в начале ряда (12) числом 4.

Пример 8.

Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(3n-1)^2} + \dots \quad (14)$$

Решение. Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (15)$$

Так как члены ряда (15) меньше соответствующих членов ряда (15) (вынесем число 3 за знак суммы, так как вынесение констант на сходимость не влияет)

$$\frac{1}{(n-\frac{1}{3})^2} < \frac{1}{n^2} \quad (n=1,2,3\dots)$$

а ряд (15) сходится, то на основании п. а) теоремы 1 сходится и меньший ряд (14).

Общие указание. Применение признака Даламбера требует составления отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ и определения предела этого отношения при $n \rightarrow \infty$. Для того, чтобы из выражения u_n общего члена ряда получить выражение u_{n+1} , надо в формуле для определения u_n заменить n на $n+1$.

Пример 9.

Пользуясь признаком Даламбера исследовать сходимость ряда:

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

Решение. Общий член ряда $u_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Член u_{n+1} получается из u_n заменой в нём n на $n+1$, т.е. $u_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Составим отношение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{3}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Так как предел равен $\frac{1}{3}$, т.е. числу <1 , то ряд сходится.

Пример 10.

Пользуясь признаком Даламбера исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$$

Решение. Общий член ряда $u_n = \frac{n}{2^n}$. Член u_{n+1} получается из u_n заменой в нём n на $n+1$, т.е. $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$.

Составим отношение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} = n \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Так как предел равен $\frac{1}{2}$, т.е. числу <1 , то ряд сходится.

Пример 11.

Пользуясь признаком Даламбера исследовать сходимость ряда

$$\frac{1 \cdot 2}{10} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10^3} + \dots$$

Решение. Общий член ряда $u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)}{10^n}$. Член u_{n+1} получается из u_n заменой в нём n на $n+1$, т.е. $u_{n+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)(n+2)}{10^{n+1}}$.

Составим отношение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)(n+2)}{10^{n+1}}}{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)}{10^n}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)(n+2)10^n}{10^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)} = \frac{n+2}{10};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{10} = \frac{1}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} n + 2 = \infty$$

Так как предел равен ∞ , следовательно ряд расходится.

Пример 12.

Пользуясь признаком Даламбера исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \dots$$

Решение. Общий член ряда $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n}$. Член u_{n+1} получается из u_n заменой в нём n на $n+1$, т.е. $u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n \cdot (3n+3)}$.

Составим отношение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n \cdot (3n+3)}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1) \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n \cdot (3n+3)} = \frac{2n+1}{3n+3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+3} = \frac{2}{3}$$

Так как предел равен $\frac{2}{3}$, следовательно ряд сходится.

Общие указания. Для решения вопроса о сходимости ряда на основании признака Коши надо исследовать $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = k$. Если этот предел окажется меньше 1, ряд сходится, если он больше 1, ряд расходится. Если предел равен 1, то никакого заключения о поведении ряда сделать нельзя и для заключения о сходимости ряда надо привлечь другие признаки.

Пример 13.

Исследовать на сходимость ряд, пользуясь признаком Коши.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$$

Решение. Общий член ряда $u_n = \frac{n}{2^n}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Так как предел равен числу меньше 1, следовательно ряд сходится.

Пример 14.

Исследовать на сходимость ряд, пользуясь признаком Коши.

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2} + \frac{1}{(\ln 2)^3} + \frac{1}{(\ln 2)^4} + \dots$$

Решение. Общий член ряда $u_n = \frac{1}{(\ln 2)^n}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln 2)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 0$$

Так как предел равен числу меньше 1, следовательно ряд сходится.

Пример 15.

Исследовать на сходимость ряд, пользуясь признаком Коши.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

Решение. Общий член ряда $u_n = \frac{1}{n^n}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Так как предел равен числу меньше 1, следовательно ряд сходится.

Пример 16.

Исследовать на сходимость ряд, пользуясь признаком Коши.

$$\left(\frac{5}{2} \cdot 4\right) + \left(\frac{7}{3} \cdot 4\right)^2 + \left(\frac{9}{4} \cdot 4\right)^3 + \left(\frac{11}{5} \cdot 4\right)^4 + \dots$$

Решение. Общий член ряда $u_n = \left(\frac{3+2n}{n+1}\right)^n$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3+2n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2n}{n+1} = 2$$

Так как предел равен числу больше чем 1, следовательно ряд расходится.

Задачи для самостоятельного решения

5. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью теорем сравнения:

а) $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000 \cdot n + 1} + \dots$

б) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{n}{n^2 + 1} + \dots$

в) $\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$

г) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

д) $\sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{8} + \frac{\sin^2 3\alpha}{27} + \dots + \frac{\sin^2 n\alpha}{n^3} + \dots$

е) $1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} + \dots$

ж) $\frac{5}{2} + \frac{25}{12} + \frac{125}{56} + \dots + \frac{5^n}{2^n(2^n - 1)} + \dots$

з) $tg \frac{\pi}{4} + tg \frac{\pi}{8} + tg \frac{\pi}{12} + \dots + tg \frac{\pi}{4n} + \dots$

и) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{4n-2} + \dots$

к) $\ln 2 + \frac{\ln 3}{\sqrt[4]{2^5}} + \frac{\ln 4}{\sqrt[4]{3^5}} + \frac{\ln 5}{\sqrt[4]{4^5}} + \dots + \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}} + \dots$

$$\text{л)} \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{17}} + \sqrt{\frac{3}{82}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n^4 + 1}} + \dots$$

6. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью признака Коши:

$$\text{а)} \frac{2}{5} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9} + \dots + \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} + \dots$$

$$\text{б)} \frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \dots$$

$$\text{в)} \arcsin 1 + \arcsin^2 \frac{1}{2} + \dots + \arcsin^n \frac{1}{n} + \dots$$

7. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью признака Даламбера:

$$\text{а)} 2 + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)} + \dots$$

$$\text{б)} 1 + \frac{1 \cdot 4}{3!!} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{5!!} + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(2n-1)!!} + \dots$$

$$\text{в)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{16} + \dots + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} + \dots$$

$$\text{г)} 2 + 1 + \frac{8}{9} + \dots + \frac{2^n}{n^2} + \dots$$

$$\text{д)} 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$$

8. Установить сходимость или расходимость рядов, выбрав самостоятельно для исследования в каждой задаче подходящий признак сходимости (расходимости) ряда:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$$

$$\text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}$$

$$\text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$\text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3}$$

$$\text{ж)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$$

$$з) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$и) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{(4n-2)!!}$$

$$к) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 11 \cdot 21 \cdot \dots \cdot (10n-9)}{(2n-1)!!}$$

$$л) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$м) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$$

$$н) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}$$

1.3 Абсолютная и условная сходимость рядов

Определение. Ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (16)$$

составленный из положительных и отрицательных членов, называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Ряд (13) называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Имеет место

Теорема. Если ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (17)$$

составленный из абсолютных величин ряда (16) сходится, то и ряд (16) сходится.

Признак абсолютной сходимости ряда. Если абсолютные величины членов ряда (16) не превосходят членов сходящегося знакоположительного ряда, то ряд (16) сходится и притом абсолютно.

Если ряд сходится условно, то от перемены мест его членов сумма ряда изменяется и больше того имеет место

Теорема (Римана).

Сумма ряда, который сходится условно, зависит от порядка, в котором расположены его члены. Изменяя этот порядок, можно заставить ряд иметь своей суммой любое число и даже расходиться.

Знакопеременные ряды.

Определение. Ряд называется знакопеременным (или знакопеременным), если его два любых соседних члена имеют противоположные знаки.

Исследование сходимости знакопеременных рядов проводится на основании теоремы Лейбница.

Теорема (Лейбница).

Знакопередающийся ряд сходится, если:

- 1) его члены убывают по абсолютной величине
- 2) его общий член стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$, т. е. если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$..

Пример 17.

Исследовать на абсолютную сходимость ряд:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Решение. Чтобы решить вопрос о том, является ли данный ряд абсолютно сходящимся, надо составить ряд из абсолютных величин членов данного ряда и для определения характера полученного положительного ряда применить один из трех разобранных выше признаков сходимости: Даламбера, Коши или интегральный признак.

Так как члены ряда убывают по абсолютной величине, а общий член ряда $u_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$, когда $n \rightarrow \infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$), то на основании теоремы Лейбница ряд сходится. Чтобы решить вопрос, сходится ли он абсолютно, составим ряд из абсолютных величин его членов

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Это гармонический ряд (5), о котором известно, что он расходится. Значит, данный ряд сходится условно.

Пример 18.

Исследовать на абсолютную сходимость ряд:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Решение. Ряд сходится на основании теоремы Лейбница:

- 1) абсолютная величина его членов убывает.
- 2) его общий член $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$.

Теперь выясним, будет ли он сходиться абсолютно. Составим ряд из абсолютных величин его членов

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Это обобщенный гармонический ряд (6), в котором $k = 2$. Известно, что при $k > 1$ этот ряд сходится. Поэтому заданный ряд сходится абсолютно.

Пример 19.

Исследовать на абсолютную сходимость ряд:

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} - \frac{1}{11^2} + \dots$$

Решение. На основании теоремы Лейбница ряд сходится, если

1) абсолютная величина его членов убывает и

2) его общий член $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{(3n-1)^2} \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$.

Чтобы решить вопрос об абсолютной сходимости этого ряда, составим ряд из абсолютных величин его членов

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{11^2} + \dots \quad (18)$$

Попробуем решить вопрос о его сходимости на основании признака Даламбера:

$$u_n = \frac{1}{(3n-1)^2}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(3n+2)^2}$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3n-1)^2}{(3n+2)^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3n-1)^2}{(3n+2)^2} = 1$$

Значит, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о характере ряда. Признак Коши также не позволяет сделать заключение о сходимости ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(3n-1)^2}} = 1$$

Применим интегральный признак Коши. Общий член ряда (18)

$$u_n = \frac{1}{(3n-1)^2}.$$

Члены ряда (18) можно рассматривать как значения функции

$$f(x) = \frac{1}{(3x-1)^2},$$

которая для значений $x > \frac{1}{3}$ удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на функцию $f(x)$ в интегральном признаке. Нижний предел интеграла возьмём равным 1. Вычислим:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(3x-1)^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{(3x-1)^2} dx = -\frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3b-1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}$$

и, значит, интеграл сходится абсолютно.

Пример 20.

При условии, что $0 < x < 1$, заданный ряд сходится, так как удовлетворяет обоим условиям теоремы Лейбница: абсолютная величина его членов убывает, а общий член

$$u_n = (-1)^{n-1} x^{n-1} \rightarrow 0, \text{ когда } n \rightarrow \infty.$$

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Этот ряд – геометрический, который при условии $0 < x < 1$, сходится. Отсюда заключаем, что заданный ряд сходится абсолютно.

Задачи для самостоятельного решения

9. Выяснить, какие из данных знакопеременных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

а) $1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} + \dots$

б) $3 - \frac{4}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n} + \dots$

в) $1 - \frac{1}{3^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3} + \dots$

г) $-1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \dots$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$

з) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}$

и) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n}$

к) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n}$

10. Убедитесь в том, что признак Лейбница не применим к данным знакопеременным рядам. Выяснить, какие из них расходятся, какие сходятся условно, какие сходятся абсолютно:

Указание: В пунктах а и г сгруппировать все члены по два, не меняя порядка следования членов ряда, и исследовать на сходимость полученные знакоположительные ряды. В пунктах б и в исследовать отдельно ряд, составленный из положительных членов и ряд, составленный из отрицательных членов.

а) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$

б) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{2n-1}} + \dots$

в) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{3^n} + \dots$

г) $\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \dots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n-3} + \dots$

2 Функциональные ряды

2.1 Область сходимости функционального ряда

Определение. Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

члены которого – функции от x , называется *функциональными*. Совокупность значений x , при которых функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$... определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называют *областью сходимости* функционального ряда.

Областью сходимости функционального ряда чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси $\hat{I}_x$. Каждому значению из области сходимости $\tilde{O}$ соответствует определенное значение величины $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Эту величину, являющуюся функцией x , называют *суммой* функционального ряда и обозначают через $S(x)$.

Представим сумму ряда в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x), \quad R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

($R_n(x)$ – остаток функционального ряда).

Сходящийся функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в некоторой области $\tilde{O}$, если для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое целое положительное число N , что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ для любого x из области $\tilde{O}$. При этом сумма $S(x)$ равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области $\tilde{O}$, где $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) – непрерывные функции, есть непрерывная функция.

Сформулируем достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса. Если функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$... по абсолютной величине не превосходят в некоторой области $\tilde{O}$ положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, причем числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

сходится, то функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

в этой области сходится равномерно.

В заключение сформулируем две теоремы, относящиеся к интегрированию и дифференцированию функциональных рядов.

1. Если ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$, где

$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ – непрерывные функции, равномерно сходятся в некоторой области $\tilde{O}$ и имеет сумму $S(x)$, то ряд

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \dots + \int_a^b u_n(x)dx + \dots$$

сходится и имеет сумму $\int_a^b S(x)dx$ (промежуток $[a, b]$ принадлежит области $\tilde{O}$).

2. Пусть функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ определены в некоторой области $\tilde{O}$ и имеют в этой области производные $u'_1(x), u'_2(x), \dots, u'_n(x), \dots$.

Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится, то его сумма равна производной от суммы первоначального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}'$$

Пример1.

Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$-\frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{3} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 + \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n + \dots$$

Решение. По признаку Даламбера ряд будет абсолютно сходиться при тех значениях x , для которых будет выполняться неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} < 1$$

В нашем примере

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^{n+1} : \frac{1}{2n-1} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^n = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|.$$

Неравенство $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$ выполняется при $x > 0$.

Таким образом, ряд абсолютно сходится при $x > 0$.

При $x < 0$ мы имеем $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| > 1$, а потому по признаку Даламбера ряд расходится.

Осталось исследовать ряд при $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в ряд получаем числовой ряд

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n-1} + \dots,$$

который сходится по признаку Лейбница.

Так как ряд

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

расходится, то исходный ряд сходится лишь условно.

Итак, областью сходимости ряда исходного является полуось $0 \leq x < \infty$, причем на открытой полуоси $0 < x < \infty$ он сходится абсолютно.

Пример 2.

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

Решение. Применим к ряду признак Даламбера. Мы имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}} : \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}} \right|.$$

Если $|x| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, значит.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}} \right| = |x| < 1,$$

А потому ряд абсолютно сходится.

Если $x > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}} + 1} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < 1,$$

И ряд снова абсолютно сходится. В точках же $x = \pm 1$ ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$$

И расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Поэтому область сходимости функционального ряда состоит из лучей $-\infty < x < -1$, $1 < x < +\infty$ и промежутка $-1 < x < 1$.

Пример 3.

Считая, что x - величина положительная, определить, при каких значениях x будет сходиться ряда:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

Решение. Так как по условию x - величина положительная, то для исследования сходимости рядов этой задачи можно применить признак Даламбера. Поэтому прежде всего следует в каждом примере найти общий член ряда u_n , заменив в нем n на $n+1$, найти член $(n+1)$ -ый, составить отношение

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ и определить предел этого отношения при $n \rightarrow \infty$. Ряд будет сходиться в

случае, если этот предел меньше 1. Из этого условия определяется те значения

x , при которых ряд сходится. Общий член ряда $u_n = \frac{x^n}{n}$. Заменяя n на $n+1$,

найдем, что $u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{n}{n+1} x.$$

Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} x = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = x \cdot 1 = x.$$

Ряд будет сходиться, если этот предел меньше 1. Поэтому ряд сходится для значений $x < 1$. А так как по условию x - величина положительная, то ряд сходится для всех значений x из интервала $(0,1)$, т.е. ряд сходится для значений x , удовлетворяющих неравенствам $0 < x < 1$.

При вычислении предела x вынесен за знак предела, так как переменной величиной является n , а x от n не зависит.

Пример 4.

Считая, что x - величина положительная, определить, при каких значениях x будет сходиться ряда:

$$\frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{4 \cdot 5} + \frac{x^3}{8 \cdot 9} + \frac{x^4}{16 \cdot 17} + \dots$$

Решение. Так как по условию x - величина положительная, то для исследования сходимости рядов этой задачи можно применить признак Даламбера. Поэтому прежде всего следует в каждом примере найти общий член ряда u_n , заменив в нем n на $n+1$, найти член $(n+1)$ -ый, составить отношение

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ и определить предел этого отношения при $n \rightarrow \infty$. Ряд будет сходиться в

случае, если этот предел меньше 1. Из этого условия определяется те значения x , при которых ряд сходится. Общий член ряда

$$u_n = \frac{x^n}{2^n(2^n + 1)}; \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(2^{n+1} + 1)}.$$

Отношение

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(2^{n+1} + 1)}}{\frac{x^n}{2^n(2^n + 1)}} = \frac{2^n(2^n + 1)}{2^{n+1}(2^{n+1} + 1)} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}{2^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)} x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^{n+1}}} \cdot x. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^{n+1}}} \cdot x = \frac{1}{4} x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{4} x. \end{aligned}$$

Здесь $\frac{1}{4}x$ вынесена за знак предела как величина постоянная, не зависящая от n .

При $n \rightarrow \infty$ дроби $\frac{1}{2^n}$ и $\frac{1}{2^{n+1}}$ стремятся к нулю.

Ряд будет сходиться, если этот предел меньше 1, т.е. если $\frac{1}{4}x < 1$. Из этого неравенства следует, что $x < 4$. Так как по условию $x > 0$, то ряд будет сходиться для всех значений x из интервала $(0,4)$, т.е. ряд сходится для значений x , удовлетворяющих неравенствам $0 < x < 4$.

Задачи для самостоятельного решения

11. Определить области сходимости (абсолютной и условной) данных функциональных рядов:

$$\begin{aligned}
& \text{а) } \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \dots + \frac{n}{x^n} + \dots \\
& \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \\
& \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x} \\
& \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n \\
& \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \\
& \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n \\
& \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n \\
& \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}} \\
& \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}})} \\
& \text{к) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)} \\
& \text{л) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)\dots(x+n)} \\
& \text{м) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2} \\
& \text{н) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n} \\
& \text{о) } \sin x + 2s \sin \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{9} + \dots + 2^{n-1} \sin \frac{x}{3^{n-1}} + \dots \\
& \text{п) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin (2n-1)x}{(2n-1)^2} + \dots
\end{aligned}$$

2.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Напомним, что последовательность функций

$$u_1(x), \dots, u_n(x)$$

называется равномерной сходящейся к функции $u(x)$ на множестве M , если для любого

$\varepsilon > 0$ найдется такое N , что при $n \geq N$ неравенство $|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$ выполняется для всех x из M .

Это определение можно сформулировать иначе, введя понятие

расстояния между функциями.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ ограничены на множестве M . Расстоянием между функциями $u(x)$ и $v(x)$ на M (по Чебышеву) называют число

$$\rho_M(u; v) = \sup |u(x) - v(x)|.$$

Если множество M фиксировано, мы будем для краткости писать $\rho(u; v)$ вместо $\rho_M(u; v)$.

Пример 5.

Найти расстояние между функциями $y = x^3$ и $y = 3x + 4$ на отрезке $[0; 2]$.

Решение. Так как функции $y = x^3$ и $y = 3x + 4$ непрерывны на отрезке $[0; 2]$, то среди значений непрерывной функции $|x^3 - (3x + 4)|$ на этом отрезке есть наибольшее. Оно и равно расстоянию между функциями $y = x^3$ и $y = 3x + 4$ на $[0; 2]$. Найдем сначала максимум функции

$$\varphi(x) = x^3 - 3x - 4.$$

Производная этой функции равна

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 3.$$

Приравнявая эту производную нулю, получаем уравнение $3x^2 - 3 = 0$, корнями которого являются числа $x_1 = -1, x_2 = 1$. Из них лишь $x_2 = 1$ лежит на отрезке $[0; 2]$. Мы имеем $\varphi(1) = 1^3 - 3 - 4 = -6$. Кроме того, найдем значения функции $y = x^3 - 3x - 4$ на концах отрезка $[0; 2]$; имеем: $\varphi(0) = -4$, $\varphi(2) = -2$. Сравнивая значения $|\varphi(1)| = 6, |\varphi(0)| = 4, |\varphi(2)| = 2$, получаем, что наибольшим из них является $|\varphi(1)| = 6$. Итак,

$$\rho_{[0;2]}(x^3, 3x + 4) = 6.$$

Пример 6.

Найти расстояние на отрезке $[0; 1]$ между функциями $u(x) = x^4$ и

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Решение. Функция $\varphi(x) = |u(x) - v(x)|$ определяется формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^4, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Когда пробегает промежуток $0 \leq x < 1$, то x^4 пробегает тот же промежуток.

Поэтому $\sup \varphi(x) = 1$. Итак, $\rho(u; v) = 1$.

Мы будем говорить, что последовательность функций

$$u_1(x), \dots, u_n(x), \dots$$

Равномерно сходится к функции $u(x)$ на множестве M , если имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_M(u_n; u) = 0$, где $\rho_M(u_n; u)$ - расстояние между функциями $u_n(x)$ и $u(x)$ на множестве M . Нетрудно проверить, что это определение равносильно приведенному выше.

Пример 7.

Доказать, что последовательность функций

$$u_n(x) = \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2}$$

Равномерно сходится к функции $u(x) = 1$ на отрезке $[0; 1]$. Будет ли сходимость равномерной на всей числовой оси?

Решение. Найдем расстояние между функциями $u_n(x)$ и $u(x)$ на отрезке $[0; 1]$. Составим разность

$$f(x) = u_n(x) - u(x) = \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2} - 1 = \frac{nx}{x^2 + n^2}.$$

Так как, $f'(x) = \frac{n^3 - nx^2}{(x^2 + n^2)^2}$, то экстремальные значения функция $f(x)$ принимает в точках $x = \pm n$. Если $n > 1$, то эти точки не принадлежат отрезку $[0; 1]$. Поэтому наибольшее и наименьшее значения функция достигает на концах отрезка. Так как

$$f(0) = 0, f(1) = \frac{n}{1 + n^2},$$

То наибольшее значение $f(x)$ на $[0; 1]$ равно $\frac{n}{1+n^2}$ и $\rho_{[0;1]}(u_n; u) = \sup|f(x)| = \frac{n}{1+n^2}$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n^2} = 0$.

Значит, последовательность функции $\{u_n(x)\}$ равномерно сходится к $u(x) = 1$ на отрезке $[0; 1]$. На всей числовой оси сходимость не является равномерной, так как

$$f(n) = \frac{n^2}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2}, f(-n) = -\frac{1}{2},$$

и потому $\rho_{(-\infty; \infty)}(u_n; u) = \sup|f(x)| = \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{(-\infty; \infty)}(u_n; u) \neq 0.$$

Пример 8.

Доказать, что последовательность

$$u_n(x) = nx^n(1 - x)$$

в каждой точке отрезка $[0; 1]$ сходится к нулю. Проверить, является ли эта сходимость равномерной. Доказать, что если $0 < a < 1$, то на отрезке $[0; a]$ сходимость равномерна.

Доказательство. Если $0 \leq x < 1$, то имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nx^n(1 - x) = 0.$$

При $x = 1$ имеем $u_n(1) = 0$, и потому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(1) = 0$. Значит, последовательность функций $u_n(x)$ в каждой точке отрезка $[0; 1]$ сходится к нулю.

Проверим теперь, равномерна ли эта сходимость. Для этого найдем экстремумы функции $u_n(x)$. Имеем:

$$u'_n(x) = n^2 x^{n-1}(1-x) - nx^n \\ = n^2 x^{n-1} - n(n+1)x^n.$$

корнями уравнения $n^2 x^{n-1} - n(n+1)x^n = 0$ являются числа $x_1 = 0, x_2 = \frac{n}{n+1}$. Но

$$u_n(0) = 0, u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

Так как $u_n(1) = 0$, то $\sup|u_n(x) - u(x)|$ достигается в точке $x = \frac{n}{n+1}$ и равен $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$. Поэтому расстояние от функции $u_n(x)$ до функции $u(x) = 0$ равно $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$. Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e},$$

то сходимость последовательности $u_n(x)$ на отрезке $[0; 1]$ к нулю неравномерна.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Найдется N , такое, что при $n \geq N$ имеем $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > a$. Поэтому при $n \geq N$ наибольшее значение функции $|u_n(x) - u(x)|$ достигает в точке $x = a$ и равно $na^n(1-a)$. Таким образом, $\rho_{[0;a]}(u_n; u) = na^n(1-a)$. Так как $0 \leq a < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{[0;a]}(u_n; u) = \lim_{n \rightarrow \infty} na^n(1-a) = 0,$$

и потому на отрезке $[0; a]$ сходимость равномерна.

Пример 9.

Доказать, что последовательность функций

$$u_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

Равномерно сходится к нулю на числовой оси, но последовательность производных этих функций не сходится к нулю.

Решение. Так как $|\sin nx| \leq 1$, то

$$u_n(x) - 0 = \left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

и потому $\rho(u_n; u) \leq \frac{1}{n}$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то последовательность функций $u_n(x)$ равномерно сходится к нулю.

Продифференцировав функции заданной последовательности получаем последовательность функций $u'_n(x) = \cos nx$.

Так как $u'_n(0) = \cos 0 = 1$, то эта последовательность не сходится к нулю.

Ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

называется равномерно сходящимся на множестве M к функции $S(x)$, если последовательность его частичных сумм $S_1(x), \dots, S_n(x)$ равномерно сходится

к $S(x)$ на множестве M .

Пример 10.

Доказать, что ряд

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$$

Равномерно сходится на всей числовой оси.

Решение. Так как $|\sin nx| \leq 1$, то для всех x выполняется неравенство

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Значит, сходящийся числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Является мажорантой функционального ряда, а потому функциональный ряд равномерно сходится на всей числовой оси.

Пример 11.

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ равномерно сходится на полуоси $0 \leq x < \infty$.

Решение. Признак Вейерштрасса к этому ряду неприменим, так как ряд сходится лишь условно: при любом $x \geq 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x}$ расходится. Чтобы доказать равномерную сходимость функционального ряда, используем теорему Лейбница. Ряд знакопеременный и при $x \geq 0$ его члены монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю, когда $n \rightarrow \infty$. Поэтому ряд сходится на полуоси $[0; +\infty]$ и остаток ряда не превышает по абсолютной величине первого отброшенного члена:

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x}.$$

При $x \geq 0$ имеем $|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$, и потому

$$\rho_{[0; \infty]}(S_n(x); S(x)) \leq \frac{1}{n+1}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, то ряд сходится равномерно.

Пример 12.

Найти область определения функции $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n$ исследовать ее на непрерывность.

Решение. Найдем область сходимости функционального ряда с помощью признака Коши. Мы имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right) = x^2$$

Поэтому ряд сходится в области, где $x^2 < 1$ и расходится в области, где $x^2 > 1$. Иными словами, ряд сходится на промежутке $(-1; 1)$. В точках $x \pm 1$ он расходится, поскольку при $x \pm 1$ общий член ряда равен $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$$

(не выполнен необходимый признак ряда).

Исследуем теперь функцию $f(x)$ на непрерывность. Для этого докажем, что ряд равномерно сходится на любом отрезке $[-a; a]$, где $0 < a < 1$. Выберем число b , лежащее между a и 1, $0 < a < b < 1$. найдется такое N , что при $n \geq N$ имеем $a + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq b$. Но тогда при $n \geq N$ и $|x| \leq a$ выполняется неравенство

$$\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(|x| + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \leq \left(a + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \leq b^{2n}$$

Это неравенство показывает, что сходящийся числовой ряд

$$b^2 + b^4 + \dots + b^{2n} + \dots$$

(геометрическая прогрессия со знаменателем $b^2 < 1$) является мажорантой для заданного ряда на отрезке $[-a; a]$, а потому ряд равномерно сходится на этом отрезке. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на всем промежутке $(-1; 1)$.

Пример 13.

Показать, что на луче $0 \leq x < \infty$ функциональный ряд

$$\frac{1}{3\sqrt{1+x}} + \frac{1}{9\sqrt{1+3x}} + \dots + \frac{1}{3^n\sqrt{1+(2n-1)x}} + \dots$$

равномерно сходится. Начиная с какого номера n остаток ряда $r_n(x)$ (независимо от значения x) удовлетворяет неравенству $|r_n(x)| < 0,01$?

Решение. Воспользуемся признаком Вейерштрасса. Так при $x \geq 0$ имеем $\sqrt{1+(2n-1)x} > 1$, то члены данного ряда в заданном интервале не больше соответствующих членов числового ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots,$$

Представляющих собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{3}$ и, следовательно, сходящегося. Поэтому данный ряд сходится равномерно.

Для оценки остатка $r_n(x)$ функционального ряда подсчитаем остаток числового ряда. Имеем:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} + \dots = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Остаток $r_n(x)$ данного функционального ряда будет не больше остатка числового ряда, поэтому $r_n(x) < 0,01$. Для этого решаем неравенство

$$\frac{1}{2 \cdot 3^n} < 0,01 \text{ или } 3^n > 50$$

Откуда $n \geq 4$.

Задачи для самостоятельного решения

12. Найти расстояние между функциями

а) $y = x^4$ и $y = 2x^2 - 5$ на отрезке $[-2; 2]$.

б) $y = 2\sqrt{x}$ и $y = -x$ на отрезке $[0; 4]$.

в) $y = \sin 2x$ и $y = x$ на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

13. доказать, что последовательность функции $u_n(x) = xe^{-nx}$ равномерно сходится к нулю на луче $[0; +\infty)$.

14. при каких значениях α последовательность функций $u_n(x) = n^\alpha xe^{-nx}$ равномерно сходится к нулю на луче $[0; +\infty]$?

15. показать, что нижеследующие последовательности сходятся на отрезке $0 \leq x \leq \pi$, но не равномерно:

а) $u_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}$;

б) $u_n(x) = \sin^n x$;

в) $u_n(x) = \sqrt[n]{x \sin x}$;

г) $u_n(x) = [f(x)]^n$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

$u_n(x) =$

д) $\sqrt[n]{f(x)}$, где $f(x)$ имеет такой же смысл, что и выше

16. показать, что ряд $x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots$ равномерно сходится на отрезке $-q \leq x \leq q$, где q – любое положительное число, меньше 1. Интегрированием данного ряда найти сумму ряда

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

17. Определить при $0 < x \leq 1$ сумму и остаток функционального ряда

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \dots + x(1-x)^{n-1} + \dots$$

И показать, что он сходится равномерно на отрезке $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. При каком значении n остаток данного ряда удовлетворяет неравенству $|r_n(x)| < 0,01$ независимо от значения x на этом отрезке?

18. показать, что функциональный ряд

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)} + \dots$$

Равномерно сходится к функции $\frac{1}{2(x+1)}$ для всех $x \geq 0$. При каком значении n остаток удовлетворяет неравенству $|r_n(x)| < 0,01$ для любого $x \geq 0$?

19. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}, 0 \leq x < \infty.$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}, -1 \leq x \leq 1.$

20. Доказать, что ряд

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x + \sqrt{n}}$

Равномерно сходится на луче $[0; \infty)$. Сколько членов ряда нужно взять, чтобы его остаток на всем луче не превосходил 0,01?

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$

Равномерно сходится на всей числовой прямой, а ряд из модулей его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

Хотя всюду сходится, но неравномерно.

в) показать, что ряд $x^2 + x^6 + \dots + x^{4n-2} + \dots$ равномерно сходится на отрезке $-q \leq x \leq q$, где q – любое положительное число, меньше 1. Интегрированием данного ряда найти сумму ряда

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \dots$$

21. убедиться, что ряд

$$\frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 4\pi x}{4} + \dots + \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n} + \dots$$

Равномерно сходится на всей числовой оси. Показать, что этот ряд нельзя почленно дифференцировать ни в каком промежутке.

22. доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$$

Равномерно сходится на отрезке $[0; 1]$ и допускает на этом отрезке дифференцирование любого порядка.

2.3 Степенные ряды

Степенной ряд имеет вид

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

где a_i ($i=1,2,3,\dots$) - числа, называемые коэффициентами степенного ряда.

Переменная величина x может принимать разные числовые значения. При частном значении $x=x_0$ степенной ряд становится числовым. Сходимость степенного ряда зависит от величины x .

Исследование вопроса о сходимости степенного ряда приводит к следующим выводам:

1. Может оказаться, что степенной ряд расходится для всех значений x , кроме $x=0$ (при $x=0$ степенной ряд сходится и его сумма равна a_0 . Это случай тривиальный.)

2. может случиться, что степенной ряд сходится при любом значении x . Тогда его называют всюду сходящимся.

3. может оказаться, что при одних значениях x ряд сходится, при других - расходится.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при некотором значении $x=x_0$, то он сходится, и притом абсолютно, при всех значениях, для которых $|x| < |x_0|$.

Если степенной ряд расходится при $x=x_0$, то он расходится и при всех значениях x , для которых $|x| > |x_0|$.

Из этой теоремы следует, что если при $x=x_0$ ряд сходится, то для всех значений x из интервала $(-x_0, x_0)$ ряд сходится абсолютно. Если при $x=x_0$ ряд расходится, то он расходится для всех значений $x > x_0$ и меньших чем $-x_0$.

Определение. Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал $(-R, R)$ такой, что для всякой точки x , которая лежит внутри этого интервала, ряд сходится, и к тому же абсолютно, а для точек x , лежащих вне его ряд расходится.

Число R , о котором идет речь в этом определении, называется радиусом сходимости. Если интервал сходимости, вырождается в точку, то $R=0$, если же ряд всюду сходится, то есть сходится при любом значении x , то $R=\infty$. Радиус сходимости степенного ряда можно определить через его коэффициенты.

Если $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, где a_n и a_{n+1} - коэффициенты соответственно n -го и $(n+1)$ -го членов ряда, то радиус сходимости степенного ряда определяется по формуле $R = \frac{1}{L}$

Ряд будет абсолютно сходиться при значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x| < \frac{1}{L}$, то есть для всех значений из интервала $(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L})$.

Если $L=0$, то $R=\infty$.

Это значит, что степенной ряд сходится при любом значении x (сходится всюду).

Если же $L=\infty$, то $R=0$, то степенной ряд расходится при любом значении

x , кроме $x=0$.

Примет 14.

Найти радиус сходимости ряда и исследовать их поведение на концах интервала сходимости:

$$1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\dots+3^{n-1}x^{n-1}+\dots$$

Решение. Коэффициент n -го члена $a_n=3^{n-1}$; коэффициент $(n+1)$ -го члена $a_{n+1} = 3^n$.

Их отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^n}{3^{n-1}}=3$; $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 3$. Радиус сходимости $R=\frac{1}{L} = \frac{1}{3}$. Ряд абсолютно сходится для всех значений x из интервала $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Для значений $x < -\frac{1}{3}$ и $x > \frac{1}{3}$ ряд расходится. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, то есть при $x = -\frac{1}{3}$ и $x = \frac{1}{3}$. Подставляем в заданный ряд $x = -\frac{1}{3}$. Получим числовой ряд $1-1+1-1+\dots$

Этот ряд, очевидно, расходится. На правом конце интервала сходимости $x = \frac{1}{3}$ подставляя это значение в заданный ряд, получим ряд $1+1+1+1+\dots$, который тоже расходится (общий член ряда $u_n=1$ и не стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$ и тем самым не выполняется необходимый признак сходимости). Итак, на обоих концах интервала сходимости ряд расходится.

Пример 15.

Найти радиус сходимости ряда и исследовать их поведение на концах интервала сходимости:

$$\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

Решение. Коэффициент общего члена ряда $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$;

отношение $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Значит, радиус сходимости $R=\frac{1}{L} = 1$. Ряд сходится для значений $|x| < 1$, то есть для всех значений x из интервала $(-1,1)$. Для всех значений $x < -1$ и $x > 1$ ряд расходится.

Осталось исследовать поведение ряда на концах интервала $(-1,1)$.

При $x=-1$ из данного ряда получится числовой ряд

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots$$

Это ряд лейбницевского типа (он удовлетворяет условиям признака Лейбница). Ряд этот сходится. При $x=1$ он превращается в ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ — обобщенный гармонический ряд, который при $k=2$ сходится.

Итак, на обоих концах интервала сходимости ряд сходится для значений x , удовлетворяющих неравенствам $-1 \leq x \leq 1$ (к интервалу сходимости присоединились его концы).

Пример 16.

Найти радиус сходимости ряда и исследовать их поведение на концах интервала сходимости:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Решение. У общего члена ряда коэффициент $a_n = \frac{1}{(n-1)!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n!}$.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}; \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Заключаем, что $R=0$. Это значит, что ряд сходится при любом значении x (то есть ряд всюду сходится).

Пример 17.

Найти радиус сходимости ряда и исследовать их поведение на концах интервала сходимости:

$$1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \dots + [(n-1)x]^{n-1}$$

Решение. Имеем $a_n = (n-1)^{n-1}$; $a_{n+1} = n^n$; Найдем отношение

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = \frac{n}{\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}} = \frac{n}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}} = \frac{n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$$

потому что числитель возрастает. А предел знаменателя равен e^{-1} . Так как $L = \infty$, то $R=0$. Это значит, что ряд расходится при любом значении x , кроме $x = 0$. В этом случае говорят, что ряд всюду расходится.

Пример 18.

Найти промежуток сходимости степенного ряда

$$\frac{x}{10} + \frac{x^2}{200} + \frac{x^3}{3000} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot 10^n} + \dots$$

Решение.

Радиус сходимости ряда находим по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{|a_{n+1}|}.$$

В нашей задаче

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 10^n}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 10^{n+1}}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 10^{n+1}}{n \cdot 10^n} = 10 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 10.$$

Значит, данный ряд сходится при значении x , удовлетворяющих неравенству $|x| < 10$ или $-10 < x < 10$.

Исследуем теперь поведение ряда на концах промежутка. Подставляя в ряд вместо x число 10, получим гармонический расходящийся ряд: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$.

Следовательно, при $x = 10$ данный степенной ряд расходится. При $x = -10$ получим числовой знакопеременный ряд $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$, который условно сходится.

Таким образом, данный степенной ряд сходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенствам $-10 < x < 10$, и его промежуток сходимости представляет собой полузамкнутый промежуток $[-10; 10)$.

Пример 19.

Найти промежуток сходимости функционального ряда

$$\frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{x^4}{2^2} + \dots + \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n} + \dots$$

исследовать его поведение на концах промежутка.

Решение. Здесь мы не вправе применить формулу для отыскания сходимости ряда, так как он не содержит нечетных степеней x .

Для отыскания промежутка сходимости ряда применим непосредственно признак Даламбера. Мы имеем:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 x^{3n+2}}{n+2^2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n} \right|$$

$$= \frac{x^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)^2} = \frac{x^2}{2}.$$

Следовательно, ряд сходится, если $x^2 < 2$, и расходится, если $x^2 > 2$. Радиус сходимости ряда равен $R_1 = \sqrt{2}$. Сходится ли он при $x = \pm\sqrt{2}$.

Подставляя в ряд $x = \pm\sqrt{2}$, получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2},$$

который расходится. Так как его общий член не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Итак, промежуток сходимости ряда определяется неравенством $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Пример 20.

Найти промежуток сходимости ряда

$$(x-1) + \frac{2!(x-1)^2}{2^2} + \dots + \frac{n!(x-1)^n}{n^n} + \dots$$

и исследовать его поведение на концах промежутка.

Решение. Находим радиус сходимости ряда:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= e. \end{aligned}$$

Следовательно, данный ряд сходится при всех значениях, удовлетворяющих неравенству $|x-1| < e$ или неравенствам $-e < x-1 < e$. Прибавляя ко всем частям неравенств по 1, будем иметь: $1-e < x-1 < 1+e$.

Исследуем теперь поведение ряда на концах промежутка.

При $x = 1+e$, получим числовой ряд:

$$e + \frac{2!e^2}{2^2} + \dots + \frac{n!e^n}{n^n} + \dots.$$

Чтобы выяснить поведение этого ряда. Воспользуемся признаком Даламбера (без предельного перехода!):

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!e^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}n!e^n} = \frac{(n+1)e \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{e \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1, \end{aligned}$$

так как $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ при любых конечных значениях n . Это равенство показывает, что члены полученного числового ряда с возрастанием номера члена возрастают. Следовательно. Не выполняется необходимый признак сходимости ряда, и ряд расходится.

При $x = 1 - e$ получим такой же, только знакопеременный ряд, и так как его члены не убывают по модулю. То он расходится.

Итак, промежутком сходимости данного степенного ряда является $(2 - e; 2 + e)$.

Задачи для самостоятельного решения

23. Найти промежуток сходимости степенного ряда и исследовать поведение ряда на концах промежутка:

а) $\frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{n(n+2)} + \dots$.

б) $\frac{\ln 2}{1} x^2 + \frac{\ln 3}{2} x^3 + \dots + \frac{\ln(n+1)}{n} x^{n+1} + \dots$.

в) $x - \frac{x^3}{3 \cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^5}{3^2 \cdot 3\sqrt{3}} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{3^{n-1} n \sqrt{n}} + \dots$.

г)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n+1}$$

д)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$$

е)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \cdot (x-5)^n}{(n+1)!}$$

ж)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n}$$

з)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}$$

$$\text{И)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

$$\text{К)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

$$\text{Л)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

$$\text{М)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}.$$

$$\text{Н)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

$$\text{О)} \sum_{n=1}^{\infty} c^{\sqrt{n}} x^n, c > 0.$$

$$\text{П)} \sum_{n=1}^{\infty} c^{\ln n} x^n, c > 0.$$

$$\text{К)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

$$\text{Л)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

$$\text{М)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}.$$

2.4 Разложение функции в ряд Тейлора

Рядом Тейлора функции $f(x)$, о которой предполагается, что она определена в окрестности точки a , и в этой точке имеет конечные производные любого порядка, называется степенной ряд

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \dots$$

Функция $f(x)$ будет суммой этого ряда только для тех значений x , при которых остаточный член формулы Тейлора имеет своим пределом нуль, когда $n \rightarrow \infty$, т.е. когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

Короче: необходимым и достаточным условием наличия равенства

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \dots \quad (1)$$

для значений x из некоторого промежутка является условием $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для всех x из этого промежутка.

Формула (1), верная при указанном условии, дает разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора.

Если в формуле (1) положить $a = 0$, то получится формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots \quad (2)$$

Указанное выше необходимое и достаточное условие для выполнения равенства (1) остается в силе для справедливости и формулы (2), причем $R_n(x)$ - теперь уже остаточный член формулы Маклорена.

Ряд, стоящий в правой части этой формулы, называется рядом Маклорена функции $f(x)$, сама формула (2) дает разложение функции в ряд Маклорена.

Разложения функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Формула верна при любом значении x .

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Формула верна при любом значении x .

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Формула верна при любом значении x .

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Формула верна для значений x , удовлетворяющих условию $-1 < x \leq 1$.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots$$

Формула верна для значений x , удовлетворяющих условию $-1 < x < 1$.

Эти разложения следует помнить.

Пример 21. Найти разложение в ряд Маклорена функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

Решение. Известно, что $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Заменяя в разложении x на $-x$, получим:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Вычитая, а потом складывая почленно эти ряды, получим

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \dots + 2\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

или

$$e^x - e^{-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right)$$

После деления обеих частей этого равенства на 2, получим в левой части $\operatorname{sh} x$ и поэтому

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

После почленного сложения получим

$$e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots\right)$$

Отсюда уже после деления обеих частей равенства на 2 получим в левой части $\operatorname{ch} x$ и тогда

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Оба разложения верны при любом x .

Пример 22. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos^2 x$.

Решение. Известно, что $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

Разложение в ряд Маклорена функции $\cos 2x$ легко получить, заменив в известной формуле x на $2x$

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

или

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Теперь ясно, что

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) \right]$$

Окончательно

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Разложение верно при любом x .

Пример 23. Применить биномиальную формулу для разложения $\sqrt{1+x}$.

Решение. Так как $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$, то в формуле биномиального разложения положим $m = \frac{1}{2}$ и тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \\ &+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots \end{aligned}$$

После упрощений получим

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

Разложение верно при условии, что $-1 < x \leq 1$.

Пример 24. Разложить ряд Маклорена функцию $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Имеем:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

пользуясь формулой, можем записать

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

Отсюда находим:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \right)$$

Раскрывая скобки, переставляя члены ряда и делая приведения подобных членов, получим:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \dots + \frac{2x^{2k-1}}{2k-1} + \dots$$

Очевидно, что полученный ряд сходится при $-1 < x < 1$.

Разложение некоторых функций получается с помощью почленного

интегрирования уже известных разложений.

Пример 25. Разложить в степенной ряд функцию $y = \arctg x$.

Решение. Так как

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots \quad |x| < 1$$

и $\arctg 0 = 0$, то при $|x| < 1$ имеем:

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \dots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Пример 26. Разложить функцию $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ в ряд Маклорена.

Решение. Как известно этот интеграл нельзя выразить через элементарные функции. Для отыскания разложения данного интеграла в ряд Маклорена разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем почленно проинтегрируем (степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри промежутка сходимости, поэтому его можно интегрировать почленно).

Разлагая функцию $\frac{\sin t}{t}$ в степенной ряд. Воспользовавшись известным разложением получим:

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \\ \frac{\sin t}{t} &= 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-2}}{(2k-1)!} + \dots \\ \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt &= x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!(2k-1)} + \dots \end{aligned}$$

Промежуток сходимости полученного ряда будет таким же, что и промежуток сходимости ряда для подынтегральной функции. Поэтому полученная формула верна при всех значениях x , т.е. $-\infty < x < \infty$.

Функцию $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ называют интегральным синусом и обозначают six .

Таким образом, мы получили разложение в ряд Маклорена функции six .

Пример 27. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\text{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}$ пользуясь разложением функций в ряд Маклорена.

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$\frac{2(\text{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5} = \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x - x^3 \cos x}{x^5 \cos x} = \frac{2 \sin x - \sin 2x - x^3 \cos x}{x^5 \cos x}$$

Используя формулы разложения, пишем разложение числителя в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$:

$$2 \sin x - \sin 2x - x^3 \cos x = \left(2x - \frac{2x^3}{6} + \frac{2x^5}{120} - \frac{2x^7}{5040} + \dots \right) - \left(2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} - \frac{128x^7}{5040} - \dots \right) - \left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{24} - \frac{x^9}{720} - \dots \right) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{60}x^7 + \dots$$

Далее, $\cos x = 1 - \dots$

Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5 - \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{60}x^7 + \dots}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{60}x^2 + \dots}{1 - \dots} = \frac{1}{4}$$

Задачи для самостоятельного решения

24. Разложить функцию $y = 2^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$.

Пользуясь формулами (25)-(29), разложить заданные функции в ряд по степеням x (в ряд Маклорена):

а) $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

б) $y = \cos^2 x$;

в) $y = \cos^3(x + \alpha)$

Указание. Воспользуйтесь формулой $\cos x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

г) $y = (1+x) \ln(1+x)$

д) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

е) $y = \arcsin x$

25. Разложить $\frac{1}{x^2 + 4x + 7}$ в ряд по степеням $(x+2)$

26. Разложить e^x в ряд по степеням $(x+2)$

27. Разложить $\sqrt{x}$ в ряд по степеням $(x-4)$

28. $y = e^x \cos x$

2.5 Приближенное вычисление с помощью степенных рядов

При приближенных вычислениях нам придется часто округлять десятичные дроби; условимся всегда применять следующее «правило дополнения»: если первая из отбрасываемых цифр меньше пяти, то последняя из удерживаемых не меняется; если же первая из отбрасываемых равна или больше пяти, то последняя из удерживаемых цифр увеличивается на единицу.

Пример 28. Если $a = 3,07827185$ и мы желаем удерживать три десятичных знака, то надо будет взять $a = 3,078$.

Если же мы желаем удерживать четыре знака, то надо взять $a = 3,0783$.

При соблюдении правила дополнения погрешность приближенного значения будет меньше половины единицы, стоящей на месте последнего сохраненного десятичного знака. Так погрешность первого из написанных приближений равна 0,00027185, т.е. меньше чем 0,0005, и тем самым меньше половины единицы, стоящей на месте последнего десятичного знака ($\frac{1}{2} * 0.001 = 0.0005$)

Для второго приближения погрешность равна 0,00002815, она меньше, чем 0,00005, т.е. опять-таки меньше, чем половина одной десятичной, (меньше половины последнего сохраненного знака: $\frac{1}{2} * 0,0001 = 0,00005$).

Условимся, что приближенное число содержит k верных десятичных знаков, если его погрешность будет меньше половины единицы, стоящей на месте последнего сохраненного десятичного знака, т.е. если она меньше, чем $\frac{5}{10^{k+1}}$.

Если какая-нибудь функция разложена в бесконечный ряд, то мы можем приближенно вычислить ее, удерживая только несколько первых членов. Это, конечно, приведет к некоторой погрешности.

Надо также учитывать, что вычисляя члены ряда, мы часто вынуждены их округлять, поэтому значение каждого слагаемого будет само по себе тоже приближенным, что также вызовет определенную погрешность. Конечно, погрешности различных слагаемых могут иметь различные знаки и, таким образом, до известной степени компенсироваться. Но мы должны равняться на самый неблагоприятный случай, когда все погрешности имеют один и тот же знак, и поэтому их приходится складывать.

Точного значения погрешности мы не знаем. В самом деле, если бы мы точно знали, чему равна наша ошибка, то мы бы ее не сделали, внося соответствующую поправку. Поэтому при вычислениях мы будем оценивать только погрешность, т.е. находить высшую границу для ее абсолютного значения.

Известно, что многие интегралы не могут быть выражены в конечном виде через элементарные функции. В этом случае интеграл можно вычислить приближенно способами, разработанными в двенадцатом практическом занятии третьей части книги автора «Практические занятия по высшей математике».

Другим способом вычисления таких интегралов является разложение подынтегральной функции в степенной ряд и его почленное интегрирование.

Пример 29. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,001.

Решение. Воспользуемся биномиальным рядом :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \text{ который как}$$

известно сходится при $-1 < x < 1$. Представим теперь данный корень в виде

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{5}{125}} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Для функции $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ получим следующее разложение :

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}x^3 + \dots =$$

$$1 + \frac{1}{3}x - \frac{1*2}{3^2*2!}x^2 + \frac{1*2*5}{3^3*3!}x^3 - \frac{1*2*5*8}{3^4*4!}x^4 + \dots$$

Подставляем вместо x число $\frac{1}{25}$, получим числовой ряд :

$$(1 + \frac{1}{25})^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3*5^2} - \frac{2}{3^2*2!*5^4} + \frac{2*5}{3^3*3!*5^6} - \frac{2*5*8}{3^4*4!*5^8} + \dots$$

Здесь мы имеем знакочередующий ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница. Поэтому, если возьмем в качестве приближенного значения суммы этого ряда сумму n первых его членов, то будем иметь абсолютную погрешность, меньшую, чем первый отброшенный член. Так как мы должны вычислить значение корня с точностью до 0,0001, то для подсчета нужно взять первые три члена ряда. В самом деле, уже четвертый член, умноженный на пять, будет:

$$\frac{5*2*5}{3^3*3!5^6} = \frac{2}{27*1*2*3*5^4} = \frac{1}{81*625} < 0,0001.$$

Производим вычисления (умножаем каждый член ряда на 5):

$$5,00000 + 0,06667 - 0,00089 = 5,06578.$$

Таким образом $\sqrt[3]{130} \approx 5,0658$ (с точностью до 0,0001).

Замечание. Бином, для которого справедлива формула разложения, состоит из единицы и второго слагаемого, которое должно быть меньше 1, поэтому подкоренное число мы разбили на 2 слагаемых: первое 125- из него легко извлекается кубический корень, и второе слагаемое 5.

Здесь нельзя было число 130 разбить, например, на такие два слагаемых, 64+66, хотя из 64 и извлекается корень 3-й степени, на второе слагаемое, деленное на 64, было бы больше единицы, и формула разложения для бинома была бы неприменима. Число 130 можно было бы представить и так:

$$130 = 216 - 86, \text{ тогда } \sqrt[3]{130} = 6\sqrt[3]{1 - \frac{86}{216}}.$$

Легко проверить, что такое представление числа $\sqrt[3]{130}$ было бы менее удачным, так как $\frac{86}{216} > \frac{5}{125}$ и числовой ряд сходил бы медленнее, для вычислений с нужной нам точностью пришлось бы взять больше членов, кроме того, мы получим и бы знакостоянный числовой ряд, для которого оценка погрешности производится сложнее.

Пример 30. Вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx,$$

взяв три члена разложения в ряд подынтегральную функции, указать при этом

допущенную погрешность.

Решение. Разложив подынтегральную функцию в степенной ряд, получим

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots,$$

значит

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots) dx = \\ &= [x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 3} + \frac{1}{4^5 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{1}{4^7 \cdot 3! \cdot 7} + \dots \end{aligned}$$

Так полученный ряд знакопеременный, то для приближенного значения интеграла, взяв первые три члена ряда, мы будем иметь абсолютную погрешность меньшую, чем первый отброшенный член, т.е. меньше, чем $\frac{1}{4^7 \cdot 3! \cdot 7} < 0,0001$.

Поэтому, производя вычисления с точностью до 0,00001, будем иметь : $0,250000 - 0,005208 + 0,000098 = 0,244890$.

Таким образом, $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx 0,24489$ (с точностью до 0,00001).

Пример 31. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} \cdot e^x dx$ с точностью до 0,001.

Решение. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Умножим все члены ряда на $\sqrt{x}$, получим функциональный ряд:

$$\sqrt{x}e^x = \sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \dots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \dots$$

Члены полученного функционального ряда при $0 \leq x \leq a$ не больше членов числового ряда

$$\sqrt{a} + a\sqrt{a} + \frac{a^2\sqrt{a}}{2!} + \dots + \frac{a^n\sqrt{a}}{n!} + \dots, \quad a > 0,$$

который сходится (это легко установить, используя признак Даламбера). Следовательно, по признаку Вейерштрасса функциональный ряд сходится равномерно на любом отрезке $[0, a]$.

Из равномерной сходимости функционального ряда вытекает, что его можно почленно интегрировать. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx &= \int_0^{\frac{1}{9}} (\sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \dots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \dots) dx = \\ &= [\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{2x^3\sqrt{x}}{2!7} + \dots + \frac{2x^{n+1}\sqrt{x}}{n!(2n+3)} + \dots]_0^{\frac{1}{9}} = \\ &= \frac{2}{3*3^3} + \frac{2}{5*3^5} + \frac{2}{2!*7*3^7} + \dots + \frac{2}{n!(2n+3)3^{2n+3}} + \dots \quad (n=0,1,2,\dots) \end{aligned}$$

Выясним, сколько членов числового ряда необходимо взять для вычисления интеграла с точностью до 0,001. Для этого сначала оценим остаточный член:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{2}{n!(2n+3)*3^{2n+3}} + \frac{2}{(n+1)!(2n+5)*3^{2n+5}} + \dots < \\ &< \frac{2}{n!(2n+3)*3^{2n+3}} [1 + \frac{1}{n*3^2} + \frac{1}{n^2*3^4} + \dots]^1 = \\ &= \frac{2}{n!(2n+3)*3^{2n+3}} * \frac{1}{1 - \frac{1}{n*3^2}} = \frac{2}{(n-1)!(2n+3)*3^{2n+1}*(3^2n-1)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что для вычисления интеграла с точностью до 0,001 достаточно взять два члена полученного числового ряда. В самом деле,

$$R_2 < \frac{2}{7*3^5*17} < 6*10^{-5}.$$

Производя вычисления с точностью до 0,0001, будем иметь: 0,0242+0,0016=0,0258.

Таким образом, $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} * e^x dx \approx 0.026$ с точностью до 0,001.

С помощью рядов можно упрощать многие формулы, если некоторые входящие в них величины малы по сравнению с другими.

Пример 32.

Тяжелая нить (провод, цепь) под влиянием собственного веса провисает по цепной линии

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = ach \frac{x}{a},$$

причем $a = \frac{H}{q}$, где H - горизонтальное натяжение нити, а q - вес единицы длины.

Какой более простой линией может быть заменена цепная линия, если x мало по сравнению с a ?

Решение. Так как

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{a}} &= 1 + \frac{x}{a} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \dots \\ e^{-\frac{x}{a}} &= 1 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{x}{a}\right)^4 - \dots \end{aligned}$$

то с точностью до $(\frac{x}{a})^4$ имеем :

$$y = a + \frac{x^2}{2a}, \text{ или } y = \frac{H}{q} + \frac{qx^2}{2H}.$$

Таким образом, при малых по сравнению с a значениях x цепная линия может быть заменена параболой.

Пример 33. Найти приближенную формулу для площади p сегмента ABC (круга радиуса r), отвечающему малому центральному углу $\angle AOC = 2\lambda$.

Решение. Обозначим через d хорду AC , через s дугу AC и через h стрелу BD . Имеем : $s = 2r\lambda$ и $p = \frac{1}{2}sr - \frac{1}{2}r^2 \sin 2\lambda = r^2(\lambda - \frac{1}{2}\sin 2\lambda)$.

Разлагая в ряд $\sin 2\lambda$, получаем :

$$p = r^2(\frac{2}{3}\lambda^3 - \frac{2}{15}\lambda^5 + \frac{4}{315}\lambda^7 - \dots) \quad (*)$$

С другой стороны,

$$d = 2r \sin \lambda = r(2\lambda - \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^5}{60} - \dots)$$

и

$$h = r(1 - \cos \lambda) = r(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{24} + \frac{\lambda^6}{720} - \dots),$$

Откуда (перемножая ряды как многочлены) имеем :

$$d * h = r^2(\lambda^3 - \frac{\lambda^5}{4} + \frac{\lambda^7}{40} - \dots).$$

Сравнивая полученные формулы убеждаемся, что с точностью до имеем :

$$p \approx \frac{2}{3}d * h.$$

Задачи для самостоятельного решения

29. Вычислить натуральные логарифмы чисел 2,3,5 с шестью верными знаками, пользуясь равенствами:

$$a) \ln \frac{9}{10} = 2 \ln 3 - \ln 2 - \ln 5;$$

$$б) \ln \frac{24}{25} = 3 \ln 2 + \ln 3 - 2 \ln 5;$$

$$в) \ln \frac{81}{80} = 4 \ln 3 - 4 \ln 2 - \ln 5.$$

30. Вычислить с четырьмя десятичными знаками $\sqrt[3]{30}$

31. Вычислить с четырьмя десятичными знаками $\sqrt[3]{0,98}$

32. Вычислить с четырьмя десятичными знаками

$$\sqrt[3]{4}$$

33. Вычислить с тремя десятичными знаками
 $\sin 0,5$

34. Вычислить с тремя десятичными знаками
 $\cos 50^0$

35. Вычислить с тремя десятичными знаками

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

36. Вычислить с тремя десятичными знаками

$$\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$$

Тема 3 Индивидуальные задания

3.1 Типовой вариант решения индивидуального задания «Числовые ряды»

Задача 1. Найти сумму ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$$

Решение. Данную сумму запишем в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(3n-2)(3n+4)}$$

$$\frac{A}{3n+4} + \frac{B}{3n-2} = \frac{6}{(3n-2)(3n+4)}$$

Приведем к общему знаменателю, получим:

$$A(3n-2) + B(3n+4) = 6$$

Далее находим коэффициенты A, B . Очевидно, что при $n = -\frac{4}{3}$ $A = -1$, а при $n = \frac{2}{3}$ $B = 1$

Формула общего члена примет вид:

$$U_n = -\frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n-2}$$

Найдем несколько первых членов ряда

$$U_1 = -\frac{1}{7} + \frac{1}{1}$$

$$U_2 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{4}$$

$$U_3 = -\frac{1}{13} + \frac{1}{7}$$

$$U_4 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{10}$$

.....

$$U_{n-3} = -\frac{1}{3n-5} + \frac{1}{3n-11}$$

$$U_{n-2} = -\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-8}$$

$$U_{n-1} = -\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n-5}$$

$$U_n = -\frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n-2}$$

.....

Суммируем все члены ряда чтобы найти сумму n членов:

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Найдем значение данного предела

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+4} \right) = \frac{5}{4}$$

Остаточный член ряда найдем по формуле

$$R = S - S_n$$

$$R = \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+4}$$

Ответ:

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+4}, \quad S = \frac{5}{4}, \quad R = \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+4}$$

Задача 2.

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{2}}{n(n+1)(n+2)}$$

Решение. При исследовании данного ряда будем использовать теорему сравнения. Сравним этот ряд с большим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{2} + \sin^2 \frac{\pi n}{2}}{n(n+1)(n+2)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{2}}{n(n+1)(n+2)}$$

Очевидно, что ряд, который мы подобрали больше. Покажем, что он является сходящимся:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{2}}{n(n+1)(n+2)}$$

$$V_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\frac{U_n}{V_n} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n^\alpha}{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n(n+1)(n+2)} \stackrel{\alpha=3}{\Rightarrow} 1$$

Значит

$$V_n = \frac{1}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \rightarrow \alpha > 1 \rightarrow \text{ряд сходится} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ тоже будет сходящимся}$$

По теореме сравнения если больший ряд сходится, то и меньший будет сходящимся, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{2}}{n(n+1)(n+2)} \text{ сходящийся}$$

Ответ: ряд сходящийся

Задача 3.

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 12}{n^2 + 10}$$

$$\text{Решение. } \ln \frac{n^2 + 12}{n^2 + 10} \sim \frac{1}{n^2 + 10}, \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 12}{n^2 + 10} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 10}$$

Сравним полученный ряд с другим рядом

$$\frac{1}{n^\alpha}$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2 + 10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходитс} \text{я, т. к. } \alpha > 1, \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 10} \text{ тоже сходитс} \text{я} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 12}{n^2 + 10} \text{ сходитс} \text{я}$$

Ответ: ряд сходящийся

Задача 4.

Исследовать на сходимос ть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3 + 1)}{(n + 1)!}$$

Решение. Для исследования данного ряда воспользуемся признаком Даламбера

$$U_n = \frac{2^{n+1}(n^3 + 1)}{(n + 1)!}$$

$$U_{n+1} = \frac{2^{n+2}((n + 1)^3 + 1)}{(n + 2)!}$$

Найдем значение $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2((n + 1)^3 + 1)}{(n^3 + 1)(n + 2)}$$

Найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2((n + 1)^3 + 1)}{(n^3 + 1)(n + 2)} = 0, \quad 0 < 1, \rightarrow \text{ряд сходитс} \text{я}$$

Ответ: сходящийся

Задача 5.

Исследовать ряд на сходимос ть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Решение. Для исследования данного ряда воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{n}}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{n}} = \frac{(\text{конечное число})}{2}$$

Рассмотрим верхний предел, предположим, что его значение, это конечное число:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{n}} = (\infty^0) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{\frac{2}{n}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}} = e^0 = 1 \text{ (кон. число)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{n}}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < 1 \rightarrow \text{ряд сходится}$$

Ответ: сходящийся

Задача 6.

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^3(n+1)}$$

Решение. Функция

$$\frac{1}{(x+1) \ln^3(x+1)} \text{ при } x \geq 1$$

положительна, непрерывна и монотонно убывает, поэтому для исследования данного ряда на сходимость можно воспользоваться интегральным признаком. Находим:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln^3(x+1)} &= \int_1^{\infty} \frac{d \ln(x+1)}{\ln^3(x+1)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln^2(x+1)} = \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2 \ln^2(n+1)} - \frac{1}{2 \ln^2 2} \right] = \frac{1}{2 \ln^2 2} \end{aligned}$$

Таким образом, соответствующий несобственный интеграл сходится, значит, данный ряд так же сходится.

Ответ: сходится

Задача 7.

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Решение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n}$$

$$V_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

Найдем предел

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)n^\alpha}{n^2+n} \xrightarrow{(\text{при } \alpha=1)} 2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходящийся} \end{aligned} \right.$$

Из этой системы следует, что исходный ряд расходится, т.е. абсолютной сходимости нет.

Исследуем на условную сходимость. Для этого проверим, выполняются ли условия теоремы Лейбница.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \\ \frac{3}{2} \geq \frac{5}{6} \geq \frac{7}{12} \geq \dots \text{(невозрастает (убывает))} \end{cases} \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \text{ ряд Лейбница (условно сходящийся)}$$

Ответ: ряд является условно сходящимся

Задача 8.

Сколько нужно взять членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01, до 0,001?

Решение. Данный ряд знакочередующийся и члены его монотонно убывают по абсолютной величине (ряд лейбницевского типа). Поэтому его остаток по абсолютной величине меньше абсолютной величины первого отброшенного члена, т.е.

$$|R_n| < a_{n+1}$$

В нашем примере

$$R_n < \frac{1}{(n+1)^2}$$

Для вычисления суммы ряда с точностью до 0,01 надо потребовать, чтобы

$$\frac{1}{(n+1)^2} < 0,01$$

Из последнего неравенства получаем, что при $n > 10$ остаток ряда будет меньше 0,01. Значит, чтобы вычислить сумму ряда с точностью до 0,01, нужно взять 10 членов ряда.

Для вычисления ряда с точностью до 0,001 необходимо взять 31 член ряда. Мы видим, что ряды лейбницевского типа удобнее для вычислений, чем знакоположительные ряды. Чтобы найти сумму ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

С точностью до 0,001, надо взять 1001 член ряда, а чтобы найти с той же точностью сумму нашего ряда достаточно взять 31 член ряда.

3.2 Типовой вариант решения индивидуального задания «Функциональные и степенные ряды»

Задача 1.

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$$

Решение. $U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+3)}$

Найдем предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+2)} \cdot \frac{(n+1)(n+3)}{1} = 1$$

$R=1$ (радиус сходимости)

$x \in (-1, 1)$ – интервал сходимости. Проверим, входит ли на концах отрезка:

$x=-1$

рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$$

данный ряд является рядом Лейбница, т.к. выполняются условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+2)} = 0 \\ \frac{1}{3} > \frac{1}{8} > \dots \end{array} \right.$$

$x=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n(n+2)}$$

$$V_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\frac{U_n}{V_n} = \frac{1^n}{n(n+2)} \cdot \frac{n^\alpha}{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+2)} = 1 \quad \alpha = 2 \rightarrow 2 > 1 \rightarrow \text{ряд сходящийся}$$

$$X = [-1, 1]$$

Ответ: $X = [-1, 1]$

Задача 2.

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$$

Решение.

$$U_{n+1} = \frac{(x-1)^{2n+2}}{(n+1)9^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{2n+2}}{(n+1)9^{n+1}} \cdot \frac{n9^n}{(x-1)^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^2}{9} \cdot \frac{n}{n+1} \right| = \left| \frac{(x-1)^2}{9} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\left| \frac{(x-1)^2}{9} \right| < 1$$

$$|(x-1)^2| < 9$$

Решая данное неравенство, мы находим интервал сходимости:
 $x \in (-4; 2)$,

но неизвестно, входят ли концы в область сходимости:

$$X = -4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n9^n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5^{2n+2}}{(n+1)9^{n+1}} \cdot \frac{n9^n}{5^{2n}} = \frac{5^2 n}{9(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n}{9(n+1)} = \frac{25}{9} > 1 \rightarrow \text{ряд расходится}$$

$$X = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{2n}}{n9^n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{(n+1)9^{n+1}} \cdot \frac{n9^n}{1} = \frac{n}{9(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{9(n+1)} = \frac{1}{9} < 1 \rightarrow \text{ряд сходится}$$

Область сходимости будет: $X \in (-4; 2]$

Ответ: $X \in (-4; 2]$

Задача 3.

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$$

Решение. Введем замену $x+3=y$ и подставим в исходный ряд, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)y^n}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n-1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^{n+2}}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3(n-1)}{n} \right| = 3$$

Радиус сходимости $R=3$

$y \in (-3, 3)$, тогда $x \in (-6, 0)$

$$x = -6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(-3)^n}{3^{n+1}} \text{ расходится}$$

$$x = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)3^n}{3^{n+1}} \text{ расходится}$$

Область сходимости будет: $x \in (-6,0)$

Ответ: $x \in (-6,0)$

Задача 4.

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x .

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Решение.

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Воспользуемся формулой разложения:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \dots$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

Очевидно, что разложение

$$x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

будет равно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+2} = x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+2} \quad (\forall x \in (-1,1))$$

Ответ:

$$x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+2} \quad (\forall x \in (-1,1))$$

Задача 5.

Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$$

Решение. Выполним разложение подынтегральной функции

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx$$

Разобьем на четыре интеграла и найдем их значения:

$$a_1 = x = 1$$

$$a_2 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{3} \approx -0,05555$$

$$a_3 = \frac{1}{120} \cdot \frac{x^5}{5} \approx 0,001667$$

$$a_4 = -\frac{1}{5040} \cdot \frac{x^7}{7} \approx -0,000028$$

$$I = 1 - 0,05555 + 0,001667 = 0,946$$

Ответ: 0,946

3.3 Индивидуальные задания «Числовые ряды»

Задача 1. Найти сумму ряда.

$$1. \sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 14n + 48}.$$

$$2. \sum_{n=9}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 13n + 40}.$$

$$3. \sum_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 12n + 35}.$$

$$4. \sum_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 11n + 28}.$$

$$5. \sum_{n=7}^{\infty} \frac{6}{n^2 - 10n + 24}.$$

$$6. \sum_{n=7}^{\infty} \frac{54}{n^2 - 9n + 18}.$$

$$7. \sum_{n=6}^{\infty} \frac{8}{n^2 - 8n + 15}.$$

$$8. \sum_{n=6}^{\infty} \frac{72}{n^2 - 7n + 10}.$$

$$9. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{10}{n^2 - 6n + 8}.$$

$$10. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{90}{n^2 - 5n + 4}.$$

$$11. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{12}{n^2 - 4n + 3}.$$

$$12. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{18}{n^2 - n - 2}.$$

$$13. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{n^2 + 4n + 3}.$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{36}{n^2 + 7n + 10}.$$

$$15. \sum_{n=10}^{\infty} \frac{30}{n^2 - 14n + 48}.$$

$$16. \sum_{n=9}^{\infty} \frac{54}{n^2 - 11n + 28}.$$

$$17. \sum_{n=9}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 12n + 35}.$$

$$18. \sum_{n=8}^{\infty} \frac{72}{n^2 - 9n + 18}.$$

$$19. \sum_{n=8}^{\infty} \frac{12}{n^2 - 10n + 24}.$$

$$20. \sum_{n=7}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 7n + 10}.$$

$$21. \sum_{n=7}^{\infty} \frac{60}{n^2 - 8n + 15}.$$

$$22. \sum_{n=6}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 5n + 4}.$$

$$23. \sum_{n=6}^{\infty} \frac{48}{n^2 - 6n + 8}.$$

$$24. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{54}{n^2 + n - 2}.$$

$$25. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{6}{n^2 - 4n + 3}.$$

$$26. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{18}{n^2 - n - 2}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n^2 + 4n + 3}.$$

$$28. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{36}{n^2 + n - 2}.$$

$$29. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2 + 6n + 8}.$$

$$30. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{54}{n^2 + 5n + 4}.$$

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^2 n}{n^3}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctgn^2}{n(n+1)(n+2)}.$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \sin n}{n - \ln n}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n}{n^3 + 2}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2 + \cos n\pi)}{2n^2 - 1}.$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 + \sin n}{\sqrt[3]{n^3 - n}}.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}.$
10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2 - n}}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2 + 2}.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^3 + 5}.$
13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2 - 3}.$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3(2 + \cos n\pi)}.$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{\sqrt[4]{n^3}}.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1}.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^3 n}{n^4 + 3}.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \cos n\pi)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7 + 5}}.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \sin n}{(n+1)(n+2)}.$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}.$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5 + n}}.$
23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}.$

24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 - \cos n}{\sqrt{n^2 - n}}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^2 n}{n(n+1)}.$
26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 + \cos n}{\sqrt[4]{n^4 - 1}}.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{n(n+2)}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \sqrt{n}}{n \sqrt{n}}.$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n(2+n^2)}}.$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n^3 + n}.$

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(1 - \cos \frac{1}{n+1} \right).$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}} \sin \frac{1}{n+1}.$
5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}.$
6. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 3}{n^2 - n}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}-1}{n^3}} - 1 \right).$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \arcsin \frac{n+1}{n^3 - 2}.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{\pi^2}} - 1 \right).$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}.$
12. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{n-1}{n^3 - n}.$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}.$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^2+5}.$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} - 1 \right).$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2-n+2}.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^3+1}.$
19. $\sum_{n=3}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}.$
20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n \cdot \sqrt[4]{n^3}-1)}.$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right).$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}.$
23. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}} - 1 \right).$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2\pi}{2n+1}.$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2.$
29. $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}.$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^{23}\sqrt{n+5}}.$

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n)!}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{2^n (3n+5)}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{arctg} \frac{5}{n}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2-1)}{n!}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n^2}{(n+2)!}.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}.$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{(3n)!}.$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}.$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}.$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n (n+2)!}.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}.$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n + 3}.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}.$
28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}.$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n + 2}.$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (2n+1)!}{(3n)!}.$

Задача 5. Исследовать ряд на сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n \cdot n^3.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1} \right)^{n^2}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \frac{n}{5^n}.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n.$
14. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3} \right)^{n^2}.$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n+1}.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}.$
19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3}.$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}.$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5}{(2n+1)^n}.$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^{n^2}.$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}.$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{n+2}}{5^n}.$$

$$30. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1} \right)^{3n}.$$

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд.

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(2n+1)}.$$

$$4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5) \ln^2(4n-7)}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2(5n+2)}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2(n\sqrt{5}+2)}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1) \ln^2(n\sqrt{3}+1)}.$$

$$8. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-3)}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(2n)}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(2n)}.$$

$$11. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n}.$$

$$12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(n+1)}.$$

$$13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3) \ln(3n+1)}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^2 n}.$$

$$\begin{aligned}
15. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}. \\
16. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}. \\
17. & \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n-1)}. \\
18. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}. \\
19. & \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}. \\
20. & \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
21. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}. \\
22. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(n+7)}. \\
23. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}. \\
24. & \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}. \\
25. & \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)\ln^2(n/2)}. \\
26. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2+5)\ln n}. \\
27. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}. \\
28. & \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}. \\
29. & \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2+2)\ln(n/2)}. \\
30. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}.
\end{aligned}$$

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

$$3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$$

$$4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n (\ln \ln n)}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^4 - n^2 + 1}.$$

$$6. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n}.$$

$$7. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4 \sqrt[4]{2n+3}}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{n} \right)^n.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}.$$

$$12. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n+1)}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n} \cos(\pi/3n)}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3/2)^n (n+1)}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{2^n}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n-1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}.$$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)}.$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos(2/\sqrt{n+4})}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}.$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^n \frac{\pi}{2n}.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$

Задача 8. Вычислить сумму ряда с точностью α .

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}, \alpha = 0,01.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \alpha = 0,01.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}, \alpha = 0,001.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}, \alpha = 0,001.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \alpha = 0,01.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \alpha = 0,0001.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}, \alpha = 0,1.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}, \alpha = 0,1.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \alpha = 0,001.$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \alpha = 0,0001.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \alpha = 0,001.$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n, \alpha = 0,01.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{7^n}, \alpha = 0,0001.$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \alpha = 0,1.$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \alpha = 0,001.$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}, \alpha = 0,01.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!2n}, \alpha = 0,00001.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!n!}, \alpha = 0,001.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}, \alpha = 0,001.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}, \alpha = 0,0001.$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!n!}, \alpha = 0,00001.$
22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (n+1)}, \alpha = 0,001.$
23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)}, \alpha = 0,001.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}, \alpha = 0,01.$
25. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)^n}, \alpha = 0,001.$
26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}, \alpha = 0,001.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}, \alpha = 0,01.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2(n+3)}, \alpha = 0,01.$
29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^3 + 1)^2}, \alpha = 0,001.$

$$30. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^3}, \alpha = 0,01.$$

3.4 Индивидуальные задания «Функциональные и степенные ряды»

Задача 1. Найти область сходимости ряда.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n + 1}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + 1)^{x+2}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n e^{n(x^2-4) + x\sqrt{n}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{x^2 + n^2}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 \sin \frac{x^2+1}{n}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^{3x-x^2}}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin 3^{-nx}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg} 2^{nx}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{x^2+1} + 4}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n 4^{\frac{n^2}{x}}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx} + 1}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{n(x^2-4x+3) + x\sqrt{n}}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{-nx}}.$$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \sin \frac{x^2+1}{n}}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^n}{1-x^n}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x^2)}}.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\sqrt{n^3}+n)^{x+1}}.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin 3^{nx}.$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+e^x)}.$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg} 2^{-nx}.$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{2+3x-x^2}}.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n e^{-\frac{n}{1+x^2}+x\sqrt{n}}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n+|x|^{-n}}{2}.$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^{x^2+2}+3}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}.$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+e^x)(n^2+1)}.$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x\sqrt{n}-1)^2}$

Задача 2. Найти область сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3}{2n+3} (x+3)^{2n}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n} (x-3)^n.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}}(x+7)^n.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-2)^{2n}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-5)^{2n+1}}{3n+8}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)\ln(n+3)}(x+6)^n.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{(2n-1)4^n}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3}(x-2)^{3n}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^n}.$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n.$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)3^n}(x+6)^n.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+1)^3}(x-4)^{2n}.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+3)2^n}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 2^n}(x-3)^n.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}.$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)3^n}(x+4)^n.$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}(x+1)^{2n-1}.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n} (x+3)^n.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(3n+1)^3} (x-1)^{3n}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+3)!} (x+4)^{2n+1}.$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n-1)2^n} (x+2)^n.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)^3} (x-4)^{3n}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)} (x+1)^n.$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4+1)^2} (x-3)^n.$

Задача 3. Найти область сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2-6x+13)^n}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2} \sin^{3n} x.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 3^{\frac{n}{x-1}}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} (x^2-4x+6)^n.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} 2^{\frac{n}{4-x}}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x^2-5x+10)^n}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \sin^{2n}(2x).$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x+e)}{n+e}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}.$

$$\begin{aligned}
11. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} tg^{2n} x. \\
12. & \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n}{\cos x}}. \\
13. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 (x^2 + 2)^n}. \\
14. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^4(3x). \\
15. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 4^{\frac{n}{x-2}}. \\
16. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 5x + 11)^n}{5^n (n^2 + 5)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
17. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} \sin^{2n} x. \\
18. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{2^n n^2}. \\
19. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(x^2 - 2x + 3)^n}. \\
20. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} tg^n(2x). \\
21. & \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n \sin x}. \\
22. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 + 1)^n}{2^n (n + 1)}. \\
23. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} tg^n x. \\
24. & \sum_{n=1}^{\infty} n 5^{\frac{n}{3-x}}. \\
25. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 (x^2 - 4x + 5)^n}. \\
26. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^{n/2}} tg^n x. \\
27. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x - e)}{n - e}. \\
28. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 2x + 2)^n}{2^n (n^2 + 2)}. \\
29. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n/2}}{\sqrt{n}} tg^n(2x). \\
30. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n \sin x}.
\end{aligned}$$

Задача 4. Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)}.$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)x^n}.$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n+1}.$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{nx^{4n-4}}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^5)^{n-1}}{n}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{3n}}.$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^4)^n}{n+1}.$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n-1)}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^{n-1}}{n}.$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}.$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)x^{5n}}.$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n+1}.$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)}.$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{nx^{3n-3}}.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^4)^{n-1}}{n}.$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n(n+1)}.$$

$$20. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)x^{2n}}.$$

$$21. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^3)^n}{n+1}.$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^{5n-5}}.$$

$$24. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n+1}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n(n+1)}.$$

$$26. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)x^{4n}}.$$

$$27. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^5)^n}{n+1}.$$

$$28. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+6}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{nx^{2n-2}}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^3)^{n-1}}{n}.$$

Ответы задач для самостоятельного решения

1. а) $a_n = \frac{1}{4n-3}$; б) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$; в) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$
 г) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$
2. а) $1+1+\frac{11}{13}+\frac{14}{20}+\frac{17}{29}+\dots$ б) $\frac{1}{32}-\frac{2}{64}+\frac{3}{128}-\frac{4}{256}+\dots$ в) $\frac{1}{5}+\frac{3}{8}+\frac{1}{13}+\frac{3}{20}+\dots$
 г) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{35}+\frac{1}{16}+\frac{1}{99}+\dots$
3. а) $S_n = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{3n-1})$, $S = 1$, $R_n = \frac{1}{3(3n+1)}$; б) $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $S = \frac{1}{3}$,
 $R_n = \frac{1}{(n+1)^2}$;
- в) $S_n = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \right]$, $S = \frac{3}{8}$, $R_n = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \right]$;
 г) $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $S = \frac{1}{2}$, $R_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$;
4. а) расходится; б) расходится; в) Необходимый признак ответа не даёт;
 г) расходится;
5. а) расходится; б) расходится; в) сходится; г) расходится;
 д) сходится; е) сходится; ж) расходится; з) расходится; и) расходится;
 к) сходится; л) сходится;
6. а) сходится; б) сходится; в) сходится;
7. а) сходится; б) расходится; в) сходится; г) расходится; д) сходится;
8. а) сходится; б) сходится; в) расходится; г) расходится; д) сходится;
 е) расходится; ж) расходится; з) сходится; и) расходится; к) расходится;
 л) сходится; м) сходится; н) расходится;
9. а) сходится абсолютно; б) расходится; в) сходится абсолютно;
 г) сходится условно; д) сходится условно; е) сходится условно; ж) сходится
 абсолютно; з) расходится; и) сходится условно; к) сходится абсолютно;
10. а) расходится; б) сходится абсолютно; в) расходится; г) сходится
 условно;
11. а) сходится абсолютно при $|x| > 1$; б) при $x > 1$ сходится абсолютно;
 в) при $x > 1$ сходится абсолютно; г) сходится абсолютно при $x > -\frac{1}{3}$ и при $x < -1$;
 д) сходится абсолютно при $|x| < 1$; е) сходится абсолютно при $|x| \neq 1$ и сходится
 условно при $x = -1$; ж) сходится абсолютно при $|x| < 1$; з) сходится абсолютно
 при $|x| < 1$; и) сходится абсолютно при $|x| \neq 1$; к) сходится абсолютно при $|x| \neq 1$;
 л) сходится абсолютно при $x > 1$; м) сходится абсолютно при

$|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); н) сходится абсолютно при $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}$, сходится

условно при $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); о) сходится абсолютно везде;

23. а) $-1 \leq x \leq 1$; б) $-1 \leq x < 1$; в) $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$; г) $-1 < x \leq 1$; д) $-6 < x < 0$; е) $-\infty < x < \infty$; ж) $0 \leq x \leq 4$; з) $1 < x < 3$; и) $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$; к) $-4 < x < 4$; л) $-1 \leq x \leq 1$; м) $-2 < x < 0$; н) $3 \leq x \leq 7$; о) $-1 \leq x \leq 1$ при $c < 1$, $-1 < x \leq 1$ при $c > 1$; п) $-1 \leq x \leq 1$ при $c < e^{-1}$, $-1 \leq x < 1$ при $e^{-1} \leq c < 1$, $-1 < x < 1$ при $c \geq 1$; р) $-1 < x < 1$ при $c \leq 1$, $-c < x < c$ при $c > 1$; с) $-1 \leq x < 1$; 24.

а) $\left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(x-1)^n \ln^n 2}{n!}, -\infty < x < \infty \right)$; б) $x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n+2}, -1 < x < 1$; в) От:

$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}, -\infty < x < \infty$; г) $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, -1 \leq x \leq 1$;

д) $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \leq x \leq 1$; е) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, -1 \leq x \leq 1$; 25. От:

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}, -2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$;

26. $e^2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} \right], -\infty < x < \infty$;

27. $2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(x-4)^n}{2^{2n-1}}, 0 \leq x < \infty$;

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} \cdot x^n, -\infty < x < \infty$;

29. а) $\ln 2 = 0,693147$; б) $\ln 3 = 1,098612$; в) $\ln 5 = 1,609438$;

30. 3,1072;

31. 0,9933;

32. 1,5874;

33. 0,479;

34. 0,643;

35. 0,946;

36. 0,764

37. $\left(\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \right)$;

38. $\left(2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} \right)$

;

$$39. \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right)$$

$$40. \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2} \times \cos \pi(2n-1)x + \sin \pi x \right);$$

41.

$$\left(\frac{2}{\pi} \sin a\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{a^2 - n^2} \sin nx \right);$$

$$42. \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n}{\pi(4n^2 - 1)} \sin 2nx \right);$$

$$43. \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \right); \left(\frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l} \right);$$

44.

$$\left(S(x_1) = -\frac{1}{2}, S(x_2) = 0, S(x_3) = -\frac{1}{2}, S(x_4) = 0 \right);$$

$$46. \left(\frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi nx}{l} \right);$$

$$47. \left(\frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi nx}{l} - \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l} \right);$$

Список использованных источников

- 1 Ляшко И.И. Справочное пособие по высшей математике. Т.2: Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Ч.1: Ряды: Учебное пособие .- М.: КД Либроком, 2015. - 224 с.
- 2 Ильин В.А. Математический анализ. Ч. 2: Учебник для бакалавров. –Любцы: Юрайт, 2016. - 357 с..
- 3 Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. - М.: МЦНМО, 2018. - 564 с.
- 4 Виноградова И.А. Математический анализ в задач и упражнениях. В 3-х томах. Т.2: Ряды и несобственные интегралы. - М.: МЦНМО, 2018. - 480 с
- 5 Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие. - СПб.: Лань, 2008. - 480 с
- 6 Виленкин Н.Я. Задачник по курсу математического анализа. ч. II., -М.:«Просвещение» - 1971.- 305 с.
- 7 Темірғалиев Н. Математикалық анализ. А.:«Мектеп»,1 бөлім,-1987.-288 б.
- 8 Ильин В.И., Позняк Э.И. Основы математического анализа. ч.1 и 2. - М.: МЦНМО , 2016.- 433с.
- 9 Шипачев В.С. Математический анализ. Теория и практика: Учебное пособие. - М.: Инфра-М, 2018. - 416 с.
- 10 Никольский С. М. Курс математического анализа. Том 1. -М. «Высшая школа», 1978.-423 с.